O. SACTER

CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICI

PROPUSE LA EXAMENELE SCRISE DE MATURITATE
ŞI DE ADMITERE ÎN INSTITUTE ŞI FACULTĂŢI

EDITURA TEHNICĂ

Scanned with OKEN Scanner

O. SACTER

D. Stanga
4. iulie. 1964. Iași

CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICI

PROPUSE LA EXAMENELE SCRISE DE MATURITATE
ȘI DE ADMITERE ÎN INSTITUTE ȘI FACULTĂȚI

EDIȚIA A TREIA REVIZUITĂ ȘI ADĂUGITĂ

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI – 1963

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea conține probleme date la examenele de admitere în institute și facultăți între anii 1951—1962 și la examenele de maturitate între anii 1957—1962. Ea cuprinde probleme de algebră, geometrie, trigonometrie, geometrie analitică și analiză, grupate pe discipline, și separat probleme de sinteză.

Problemele corespund tuturor gradelor de dificultate: ușoare, grele și foarte grele.

Rezolvîndu-le, cititorii parcurg teoremele importante din matematica predată în școlile medii de cultură generală și capătă îndemînare pentru rezolvarea altor probleme asemănătoare.

Lucrarea se adresează elevilor din ultimele clase, candidaților la examenele de maturitate și la examenele de admitere în învățămîntul superior.

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A TREIA

Această ediție conține, față de cea precedentă, două capitole noi de probleme propuse la lucrările scrise de la examenele de maturitate și examenele de admitere în institute și facultăți: „Geometrie analitică" și „Analiză matematică".

De asemenea, cuprinde un număr apreciabil de probleme propuse pentru lucrările scrise (la aceleași examene) de algebră, geometrie și trigonometrie din anii 1960—1962, *precum și de probleme combinate.*

Autorul s-a străduit să dea cele mai simple soluții; cititorii sînt îndrumați să găsească și alte rezolvări, ceea ce îi va ajuta și mai mult la buna lor pregătire pentru examene. Soluțiile problemelor din ediția precedentă au fost revăzute, cu care prilej s-au îndreptat unele lipsuri.

AUTORUL

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

ALGEBRĂ

A. Exerciții și probleme rezolvate

1. Să se determine un număr natural care îndeplinește următoarele condiții:

a) nu are factori primi decît pe 2 și 3;

b) suma tuturor divizorilor săi este egală cu 28;

c) suma pătratelor acelorași divizori este egală cu 210.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1960.

R. Numărul N căutat avînd factori primi numai pe 2 și 3 are cel puțin divizorii 1; 2; 3; 6, a căror sumă nu depășește 28; rezultă, deci, $N > 2 \cdot 3 = 6$. Pe de altă parte, suma pătratelor divizorilor fiind 210, avem

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 6^2 + \ldots + N^2 = 210$$

și prin urmare

$$N^2 < 210 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + 6^2) = 160;$$

sau

$$N < \sqrt{160}.$$

Rezultă $6 < N \leqslant 14$.

Singurul număr de forma $2^\alpha \cdot 3^\beta$, situat în intervalul (6; 14), este $12 = 2^2 \cdot 3$, care îndeplinește condițiile din problemă. Așadar $N = 12$.

2. Să se determine m, n, p astfel, încît polinomul

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + 8$$

să fie divizibil cu $(x - 1)(x^2 + 6x + 8)$.

Institutul forestier, Brașov, 1954.

R. Avem

$$A = (x - 1)(x^2 + 6x + 8) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8.$$

Pentru ca polinomul $P(x)$ să se dividă exact prin A este necesar să avem identitatea

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + 8 \equiv (x^3 + 5x^2 + 2x - 8)(x + r).$$

Scriind că coeficienții aceleași puteri sînt egali, obținem

$$m = 4;\ n = -3;\ p = -10;\ r = -1.$$

3. Să se determine m, n, p astfel încît polinomul

$$x^4 + mx^2 + nx + p$$

să fie divizibil cu $(x-1)^3$.

Institutul forestier, Brașov, 1954.

R. Trebuie să avem identitatea

$$x^4 + mx^2 + nx + p = (x-1)^3(x+r).$$

Scriind că coeficienții aceleași puteri sînt egali, deducem

$$m = -6;\ n = 8;\ p = -3;\ r = 3.$$

4. Să se verifice identitatea

$$\frac{1}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^3} + \frac{1}{\left(1+\frac{x}{y}\right)^3} + \frac{3}{\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{x}{y}\right)^3} + \frac{3}{\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{x}\right)^3} +$$

$$+ \frac{6}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2\left(1+\frac{x}{y}\right)^3} + \frac{6}{\left(1+\frac{x}{y}\right)^2\left(1+\frac{y}{x}\right)^3} = 1.$$

Institutul politehnic, Brașov, 1956.

R. Dacă notăm $1 + \frac{y}{x} = \frac{1}{z}$, atunci avem $1 + \frac{x}{y} = \frac{1}{1-z}$, astfel că ne revine să demonstrăm

$$z^3 + (1-z)^3 + 3z(1-z)^3 + 3z^3(1-z) + 6z^2(1-z)^3 + 6z^3(1-z)^2 = 1. \quad (1)$$

Deoarece avem $z + (1-z) = 1$, rezultă $z^2 + (1-z)^2 = 1 - 2z(1-z)$ și prin urmare

$$z^3 + (1-z)^3 = [z + (1-z)]\,[z^2 - z(1-z) + (1-z)^2] = 1 - 3z(1-z),$$

$$3z(1-z)^3 + 3z^3(1-z) = 3z(1-z)\,[z^2 + (1-z)^2] = 3z(1-z) - 6z^2(1-z)^2$$

și

$$6z^2(1-z)^3 + 6z^3(1-z)^2 = 6z^2(1-z)^2\,[(1-z) + z] = 6z^2(1-z)^2$$

Înlocuind în (1), membrul stîng devine

$$1 - 3z(1 - z) + 3z(1 - z) - 6z^2(1 - z)^2 + 6z^2(1 - z^2)$$

expresie care este evident egală cu 1.

5. Să se arate că există identitatea

$$8x^3 + 20x^2 + 14x + 3 \equiv (ax + b)(ax + c)^2, \qquad (1)$$

unde a, b, c sînt constante reale care se vor determina.

Utilizînd identitatea (1), să se găsească valorile lui x pentru care este verificată inegalitatea

$$8x^3 + 20x^2 + 14x + 3 \leqslant 0. \qquad (2)$$

Institutul politehnic, Iași, 1957.

R. 1. Avem

$$8x^3 + 20x^2 + 14x + 3 \equiv a^3x^3 + a^2(2c + b)x^2 + ac(c + 2b)x + bc^2.$$

Pentru a exista identitatea, este necesar ca sistemul

$$a^3 = 8;\ a^2(2c + b) = 20;\ ac(c + 2b) = 14 \text{ și } bc^2 = 3$$

să fie compatibil.

Din primele trei ecuații cu necunoscutele a, b, c obținem soluțiile reale

$$a = 2;\ b_1 = 3;\ c_1 = 1$$

și

$$a = 2;\ b_2 = \frac{1}{3};\ c_2 = \frac{7}{3},$$

dintre care numai $a = 2$, $b = 3$ și $c = 1$ verifică $bc^2 = 3$.

Așadar există identitatea

$$8x^3 + 20x^2 + 14x + 3 \equiv (2x + 3)(2x + 1)^2.$$

2. Ținînd seama de rezultatul de la pct. 1, inegalitatea (2) devine

$$(2x + 3)(2x + 1)^2 \leqslant 0,$$

care este verificată de mulțimea de valori

$$x \leqslant -\frac{3}{2} \text{ și } x = -\frac{1}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

6. Să se verifice identitatea

$$\frac{1}{x^3-3x^2+3x-1}-\frac{1}{x^3-x^2-x+1}-\frac{1}{x^4-2x^3+2x-1}-$$
$$-\frac{1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\frac{2}{(x^4-1)(x-1)^2}.$$

Institutul de construcții, București, 1951.

R. Avem

$$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3;$$
$$x^3-x^2-x+1=x^3+1-x(x+1)=$$
$$=(x+1)(x^2-x+1-x)=(x+1)(x-1)^2;$$
$$x^4-2x^3+2x-1=x^4-1-2x(x^2-1)=$$
$$=(x^2-1)(x-1)^2=(x-1)^3(x+1);$$
$$x^4-2x^3+2x^2-2x+1=(x^2+1)^2-2x(x^2+1)=$$
$$=(x^2+1)(x-1)^2;$$

deci

$$\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^3(x+1)}-\frac{1}{(x^2+1)(x-1)^2}=$$
$$=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)^3}-\frac{(x^2+1)+(x-1)(x+1)}{(x-1)^3(x+1)(x^2+1)}=\frac{2}{(x+1)(x-1)^3}-$$
$$-\frac{2x^2}{(x-1)^3(x+1)(x^2+1)}=2\,\frac{x^2+1-x^2}{(x+1)(x^2+1)(x-1)^3}=\frac{2}{(x^4-1)(x-1)^2}.$$

7. Să se simplifice fracția

$$F=\frac{x^5-ax^4-a^4x+a^5}{x^4-ax^3-a^2x^2+a^3x}.$$

Facultatea de geologie-geografie, București, 1954.

R. Fracția se transformă, succesiv, astfel

$$F=\frac{x^5-ax^4-a^4x+a^5}{x^4-ax^3-a^2x^2+a^3x}=\frac{x^4(x-a)-a^4(x-a)}{x^3(x-a)-a^2x(x-a)}=$$
$$=\frac{(x-a)(x^4-a^4)}{x(x-a)(x^2-a^2)}=\frac{x^4-a^4}{x(x^2-a^2)}.$$

de unde rezultă

$$F=\frac{x^2+a^2}{x}.$$

8. Să se determine toate valorile posibile ale parametrului m, astfel încît fracţia

$$\frac{x^4 + m^2x^3 + (m+1)\,x^2 + (4m+1)\,x - 3}{x^2 - 1}$$

să se simplifice.

Să se facă simplificarea corespunzătoare fiecăreia dintre valorile obţinute pentru m.

Facultatea de matematică şi fizică, Bucureşti, 1954.

R. Notăm numărătorul fracţiei cu $P(x)$. Pentru ca fracţia să se simplifice, trebuie ca unul dintre cei doi factori în care se descompune numitorul să fie un divizor al lui $P(x)$.

Cazul I. $P(x)$ se divide cu $x - 1$; atunci trebuie să avem $P(1) = 0$ sau

$$m^2 + 5m = 0,$$

care dă pentru m valorile

$$m_1 = 0 \quad \text{şi} \quad m_2 = -5.$$

Pentru $m = 0$ avem

$$\frac{P(x)}{x^2 - 1} = \frac{x^4 + x^2 + x - 3}{x^2 - 1} = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 3}{x + 1};$$

pentru $m = -5$ avem

$$\frac{P(x)}{x^2 - 1} = \frac{x^4 + 25x^3 - 4x^2 - 19x - 3}{x^2 - 1} = \frac{x^3 + 26x^2 + 22x + 3}{x + 1}.$$

Cazul II. $P(x)$ se divide cu $x + 1$; atunci trebuie să avem $P(-1) = 0$ sau

$$-(m^2 + 3m + 2) = 0,$$

care dă

$$m_1 = -2 \quad \text{şi} \quad m_2 = -1.$$

Pentru $m = -2$ avem

$$\frac{P(x)}{x^2 - 1} = \frac{x^4 + 4x^3 - x^2 - 7x - 3}{x^2 - 1} = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 3}{x - 1};$$

pentru $m = -1$ avem

$$\frac{P(x)}{x^2 - 1} = \frac{x^4 + x^3 - 3x - 3}{x^2 - 1} = \frac{x^3 - 3}{x - 1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

9. Să se simplifice fracția

$$F = \frac{(x^2-1)\sqrt{x^2-4} + x^3 - 3x - 2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-4} + x^3 - 3x + 2}.$$

Institutul de transporturi și căi ferate, București, 1956.

R. Putem scrie $x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2) = (x+1)^2 \times (\sqrt{x-2})^2$ și $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = (x-1)^2(\sqrt{x+2})^2$.

Înlocuind, fracția F devine

$$F = \frac{(x-1)(x+1)\sqrt{(x-2)(x+2)} + (x+1)^2(\sqrt{x-2})^2}{(x-1)(x+1)\sqrt{(x-2)(x+2)} + (x-1)^2(\sqrt{x+2})^2}.$$

Dînd factor comun la ambii termeni ai fracției F, obținem

$$F = \frac{(x+1)\sqrt{x-2}\,[(x-1)\sqrt{x+2} + (x+1)\sqrt{x-2}]}{(x-1)\sqrt{x+2}\,[(x+1)\sqrt{x-2} + (x-1)\sqrt{x+2}]},$$

de unde rezultă

$$F = \frac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}}.$$

10. Să se simplifice fracția

$$E = \frac{x^2 + 2x + 2x\sqrt{y} + y + 2\sqrt{y}}{x^2 - x + x\sqrt{y} - \sqrt{y}}.$$

Institutul de arhitectură, București, 1954.

R. Punînd $y = z^2$, expresia devine

$$E = \frac{x^2 + 2x + 2xz + z^2 + 2z}{x^2 - x + xz - z} = \frac{(x^2 + 2xz + 2z^2) + 2(x+z)}{x^2 + xz - (x+z)} =$$

$$= \frac{(x+z)^2 + 2(x+z)}{x(x+z) - (x+z)},$$

de unde rezultă

$$E = \frac{(x+z)(x+z+2)}{(x+z)(x-1)} = \frac{x+z+2}{x-1} = \frac{x+\sqrt{y}+2}{x-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

11. Să se simplifice fracția

$$F = \frac{x^2 + y + 1 - 2x\sqrt{y} + 2x - 2\sqrt{y}}{x^2 - y - 1 + 2\sqrt{y}}.$$

Institutul de transporturi și căi ferate, București, 1954.

R. Punînd $y = u^2$, expresia devine

$$F = \frac{x^2 + u^2 + 1 - 2ux + 2x - 2u}{x^2 - u^2 - 1 + 2u} = \frac{(x - u + 1)^2}{x^2 - (u - 1)^2} =$$

$$= \frac{(x - u + 1)^2}{(x + u - 1)(x - u + 1)};$$

simplificînd cu $x - u + 1$, obținem

$$F = \frac{x - u + 1}{x + u - 1} = \frac{x - \sqrt{y} + 1}{x + \sqrt{y} - 1}.$$

12. Să se simplifice fracțiile:

a) $E = \dfrac{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 16} + x^3 - 12x + 16}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 16} + x^3 - 12x - 16}$;

b) $G = \dfrac{x^2 + y + 1 - 2x\sqrt{y} + 2x - 2\sqrt{y}}{x^2 - 1 - y + 2\sqrt{y}}$;

c) $F = \dfrac{(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x - 8}{(m + 1)x^2 + (3 - m)x - 4}$.

Facultatea de chimie, București, 1954.

R. a) Fracția se scrie succesiv

$$E = \frac{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 16} + (x - 2)^2(x + 4)}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 16} + (x + 2)^2(x - 4)} =$$

$$= \frac{(x - 2)\sqrt{x + 4}\left[(x + 2)\sqrt{x - 4} + (x - 2)\sqrt{x + 4}\right]}{(x + 2)\sqrt{x - 4}\left[(x + 2)\sqrt{x - 4} + (x - 2)\sqrt{x + 4}\right]},$$

de unde

$$E = \frac{(x - 2)\sqrt{x + 4}}{(x + 2)\sqrt{x - 4}}.$$

b) Avem

$$G = \frac{(x - \sqrt{y} + 1)^2}{x^2 - (\sqrt{y} - 1)^2} = \frac{(x - \sqrt{y} + 1)^2}{(x + \sqrt{y} - 1)(x - \sqrt{y} + 1)} = \frac{x - \sqrt{y} + 1}{x + \sqrt{y} - 1}.$$

c) Fracția se mai poate scrie astfel

$$F = \frac{(x-2)[(m+1)x+4]}{(x-1)[(m+1)x+4]},$$

de unde, după simplificări, rezultă

$$F = \frac{x-2}{x-1}.$$

13. Să se determine valoarea expresiei

$$E = \left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + 1}{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1}\right]^{-\frac{1}{2}} + \left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1}{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + 1}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

pentru $x = 2a^{\frac{1}{2}}(1+a)^{-1}$, $a > 1$.

Egalînd rezultatul aflat cu $a + 4\sqrt{a} - 3$, să se determine valoarea lui a.

Institutul politehnic, Timișoara, 1954.

R. Din $x = 2a^{\frac{1}{2}}(1+a)^{-1}$ deducem, succesiv,

$$x^2 = 4a(1+a)^{-2} = \frac{4a}{(1+a)^2}; \quad 1 - x^2 = 1 - \frac{4a}{(1+a)^2} = \frac{(1-a)^2}{(1+a)^2};$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1+a}{1-a}; \quad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + 1 = \frac{2}{1-a}$$

și

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{2a}{1-a}.$$

Înlocuind expresiile aflate, obținem

$$E = \left(\frac{2}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{2a}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{a+1}{\sqrt{a}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca această expresie să fie egală cu $a + 4\sqrt{a} - 3$, avem de rezolvat ecuaţia

$$\frac{a+1}{\sqrt{a}} = a + 4\sqrt{a} - 3,$$

sau

$$(\sqrt{a})^3 + 3(\sqrt{a})^2 - 3\sqrt{a} - 1 = 0,$$

de unde rezultă

$$\sqrt{a} = 1 \text{ sau } -2 \pm \sqrt{3},$$

care dă valorile

$$a = 1 \quad \text{sau} \quad a = 7 \pm 4\sqrt{3}.$$

14. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}} = \sqrt{5}.$$

Institutul pedagogic, Timişoara, 1956.

R. Aplicînd proprietăţile proporţiilor, obţinem imediat

$$\frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}, \quad \text{sau} \quad \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Ridicînd la pătrat, avem

$$\frac{3+x}{3-x} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

şi deci

$$\frac{3}{x} = \frac{7+3\sqrt{5}+2}{7+3\sqrt{5}-2}, \quad \text{adică} \quad \frac{3}{x} = \frac{9+3\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}.$$

Rezultă

$$x = \frac{5+3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Scanned with OKEN Scanner

15. Să se demonstreze că ecuația $\frac{2a}{x-a} + \frac{2b}{x-b} = 1$ are rădăcini reale, oricare ar fi numerele reale a, b.

Institutul pedagogic, Timișoara, 1956.

R. Ecuația dată se transformă succesiv

$$1 - \frac{2a}{x-a} - \frac{2b}{x-b} = 0,$$

$$\frac{(x-a)(x-b) - 2a(x-b) - 2b(x-a)}{(x-a)(x-b)} = 0,$$

sau

$$\frac{x^2 - 3(a+b)x + 5ab}{(x-a)(x-b)} = 0.$$

Presupunem $a \neq b$, pentru că în cazul $a = b$ ecuația se reduce la una de gradul întîi $\frac{4a}{x-a} = 1$, cu rădăcina $x = 5a$.

Dacă $a \neq b$, rădăcinile ecuației sînt date de

$$x^2 - 3(a+b)x + 5ab = 0,$$

al cărei discriminant este

$$D = 9(a+b)^2 - 20ab = 8(a^2+b^2) + (a-b)^2$$

și care este pozitiv pentru orice valori reale ale lui a și b, ceea ce demonstrează afirmația din enunț.

16. Să se rezolve ecuația

$$\frac{5x-2}{4x^2-x} - \frac{7x-4}{4x^2+x} = \frac{14x}{16x^2-1} + \frac{3}{1-4x}.$$

Verificare.

Institutul de industrii alimentare, Galați, 1955.

R. Ecuația dată se mai scrie astfel

$$\frac{5x-2}{x(4x-1)} - \frac{7x-4}{x(4x+1)} = \frac{14x}{(4x-1)(4x+1)} - \frac{3}{4x-1}.$$

După eliminarea numitorilor și efectuarea reducerilor, obținem

$$10x^2 - 23x + 6 = 0,$$

ale cărei soluții sînt

$$x_1 = 2 \quad \text{și} \quad x_2 = \frac{3}{10}.$$

Verificare. Înlocuim $x = 2$ în membrul întîi și al doilea al ecuației date și obținem

$$\frac{8}{7 \cdot 2} - \frac{10}{9 \cdot 2} = \frac{14 \cdot 2}{9 \cdot 7} - \frac{3}{7},$$

egalitate care se verifică ușor după efectuarea operațiilor asupra fracțiilor din membrul întîi și al doilea. La fel se verifică și cealaltă soluție, $x_2 = \frac{3}{10}$.

17. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} - \sqrt{2x+10} = 0.$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1952.

R. Scriem ecuația sub forma

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} = \sqrt{2x+10} - \sqrt{x-2}.$$

Ridicăm ambii membrii la pătrat și după reduceri, regrupăm termenii și facem unele simplificări; obținem

$$\sqrt{(x+1)(2x-5)} - 6 = -\sqrt{(x-2)(2x+10)}.$$

Ridicăm din nou la pătrat; după noi reduceri și simplificări ajungem la ecuația

$$-3x + 17 = 4\sqrt{(x+1)(2x-5)}.$$

Ridicînd din nou la pătrat, obținem ecuația

$$23x^2 + 54x - 369 = 0$$

cu rădăcinile

$$x_1 = 3 \quad \text{și} \quad x_2 = -\frac{123}{23}.$$

Soluția x_2 este străină ecuației propuse, singura rădăcină fiind $x = 3$.

18. Se dă expresia

$$f(x) = 1 + \frac{mx}{4x-5} - \frac{63x^2 - 84x + 28}{(21x-14)(2x-3)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se cere:

a) să se aducă la forma cea mai simplă;

b) să se determine valorile parametrului m pentru care ecuaţia $f(x) = \frac{3m+9}{2}$ să aibă rădăcini reale.

Institutul de petrol şi gaze, Bucureşti, 1958.

R. a) Avem $f(x) = 1 + \frac{mx}{4x-5} - \frac{7(3x-2)^2}{7(3x-2)(2x-3)}$,

de unde rezultă

$$f(x) = 1 - \frac{3x-2}{2x-3} + \frac{mx}{4x-5} = \frac{mx}{4x-5} - \frac{x+1}{2x-3}.$$

b) Ecuaţia $f(x) = \frac{3m+9}{2}$ devine, după reduceri şi simplificări admise,

$$\frac{4(m+4)x^2 - 4(3m+10)x + (9m+25)}{(2x-3)(4x-5)} = 0.$$

Dacă $x = \frac{3}{2}$ sau $x = \frac{5}{4}$ nu anulează polinomul de la numărător (ceea ce se întîmplă cînd m nu este egal cu zero), atunci ecuaţia dată admite două rădăcini reale cînd avem

$$\Delta = 4(3m+10)^2 - 4(m+4)(9m+25) \geqslant 0.$$

Efectuînd reducerile, găsim condiţia $m \leqslant 0$.

Ţinînd seama că pentru $m = 0$, ecuaţia se reduce la una de gradul întîi, rezultă condiţia ca $f(x) = \frac{3m+9}{2}$ să aibă două rădăcini reale:

$$m < 0.$$

19. Între care limite ale valorilor lui x, respectiv ale lui y, putem alege perechi de numere reale (x, y) care să satisfacă ecuaţia

$$E(x, y) = x^2 + 12xy + 4y^2 + 4x + 8y + 20 = 0?$$

Facultatea de matematică şi fizică, Cluj, 1958.

R. Scriem $E(x, y)$ după puterile lui y. Avem

$$E(x, y) = 4y^2 + 4y(3x+2) + x^2 + 4x + 20 = 0.$$

Pentru ca y să fie real o dată cu x trebuie să avem

$$4(3x+2)^2 - 4(x^2 + 4x + 20) \geqslant 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$x^2 + x - 2 \geqslant 0$, de unde rezultă $x \leqslant -2$, sau $x \geqslant 1$.

Dacă ordonăm $E(x, y)$ după puterile lui x, obținem

$$E(x, y) = x^2 + 4x(3y + 1) + 4y^2 + 8y + 20 = 0.$$

Pentru ca x să fie real o dată cu y, trebuie să avem

$$4(3y + 1)^2 - 4y^2 - 8y - 20 \geqslant 0,$$

sau

$$2y^2 + y - 1 \geqslant 0.$$

Rezultă

$$y \leqslant -1, \quad \text{sau} \quad y \geqslant \frac{1}{2}.$$

20. Să se arate că ecuația $\frac{x}{x - a^2} + \frac{x}{x - b^2} = c$ are rădăcini reale, oricare ar fi numerele a, b și c.

Facultatea de chimie, Cluj, 1957.

R. Ecuația dată se mai poate scrie astfel

$$\frac{(2 - c)x^2 + (a^2 + b^2)(c - 1)x - a^2b^2c}{(x - a^2)(x - b^2)} = 0.$$

Dacă $x = a^2$ sau $x = b^2$ nu anulează numărătorul (aceasta se întîmplă în cazul cînd avem $a^2 \neq b^2$ și $c \neq 2$), ecuația dată admite două rădăcini, care sînt reale, pentru că discriminantul

$$\Delta = (a^2 + b^2)^2 (c - 1)^2 + 4a^2b^2c(2 - c)$$

se mai poate scrie și sub forma

$$\Delta = (a^2 - b^2)^2 (c - 1)^2 + 4a^2b^2,$$

care este pozitiv pentru orice valoare a lui a, b sau c.

Dacă $a^2 = b^2$ și $c \neq 2$, ecuația admite rădăcina

$$x = \frac{a^2c}{c - 2}.$$

În cazul cînd $a^2 = b^2 \neq 0$ și $c = 2$, ecuația este imposibilă.
Dacă $a^2 = b^2 = 0$ și $c = 2$, avem identitate.
În cazul $a^2 \neq b^2$ și $c = 2$, ecuația admite rădăcina

$$x = \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

21. Să se rezolve

$$a\left(2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{3}{x}(a+1),$$

apoi să se afle valorile lui a în așa fel, încît o rădăcină a ecuației să fie mai mare decît $\frac{1}{2}$.

Institutul tehnic, Craiova, 1957.

R. Eliminînd numitorii, obținem ecuația de gradul al doilea

$$2(a-1)x^2-3(a+1)x+a+2=0,$$

care are rădăcinile $x_1=\frac{a+2}{a-1}$ și $x_2=\frac{1}{2}$.

Pentru a avea o rădăcină mai mare decît $\frac{1}{2}$, trebuie să fie satisfăcută inegalitatea

$$\frac{a+2}{a-1}>\frac{1}{2} \quad \text{sau} \quad \frac{a+5}{2(a-1)}>0.$$

Rezultă, deci,

$$a<-5, \quad \text{sau} \quad a>1.$$

22. Se dă ecuația

$$4x^2-4x-a+2=0,$$

ale cărei rădăcini le notăm cu u și v. Se cere să se calculeze expresia

$$E=\frac{\dfrac{u-v}{u^2+v^2+uv}+\dfrac{1}{u-v}}{\dfrac{u^2}{v(u-v)}-\dfrac{v^2}{u(v-u)}}$$

folosind valorile rădăcinilor, și apoi să se verifice rezultatul cu ajutorul relațiilor dintre rădăcini și coeficienți.

Institutul politehnic, Timișoara, 1954.

R. Rădăcinile ecuației sînt

$$u=\frac{1+\sqrt{a-1}}{2} \quad \text{și} \quad v=\frac{1-\sqrt{a-1}}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Calculăm direct expresiile care intervin în E

$$u - v = \frac{1 + \sqrt{a-1}}{2} - \frac{1 - \sqrt{a-1}}{2} = \sqrt{a-1};$$

$$u^2 = \frac{a + 2\sqrt{a-1}}{4}; \quad v^2 = \frac{a - 2\sqrt{a-1}}{4}; \quad uv = \frac{2-a}{4},$$

$$u^2 + v^2 + uv = \frac{a + 2\sqrt{a-1} + a - 2\sqrt{a-1} + 2 - a}{4} = \frac{a+2}{4}.$$

Înlocuind expresiile aflate, obținem

$$E = \frac{\frac{4\sqrt{a-1}}{a+2} + \frac{1}{\sqrt{a-1}}}{\frac{1}{2\sqrt{a-1}}\left[\frac{a+2\sqrt{a-1}}{1-\sqrt{a-1}} + \frac{a-2\sqrt{a-1}}{1+\sqrt{a-1}}\right]} =$$

$$= \frac{2\left[\frac{4(a-1)}{a+2} + 1\right]}{\frac{(a+2\sqrt{a-1})(1+\sqrt{a-1}) + (a-2\sqrt{a-1})(1-\sqrt{a-1})}{2-a}}.$$

După efectuarea înmulțirilor și a reducerilor de termeni asemenea, obținem

$$E = \frac{(5a-2)(2-a)}{(a+2)(3a-2)}.$$

La aceeași expresie se poate ajunge folosind relațiile dintre rădăcini și coeficienți. În acest scop efectuăm calculele din membrul al doilea al egalității, punînd în evidență expresiile $u + v$ și uv. Avem

$$E = \frac{uv\,[2(u+v)^2 - 5uv]}{[(u+v)^2 - uv]\,[(u+v)^3 - 3uv(u+v)]}.$$

Introducînd valorile $u + v = 1$ și $uv = \frac{2-a}{4}$, obținem

$$E = \frac{\frac{2-a}{4}\left[2 - 5\frac{2-a}{4}\right]}{\left(1 - \frac{2-a}{4}\right)\left(1 - 3\frac{2-a}{4}\right)} = \frac{(2-a)(5a-2)}{(a+2)(3a-2)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

23. Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea ale cărei rădăcini x_1 şi x_2 verifică relaţiile

$$x_1 + x_2 + 3x_1x_2 = 0 \quad \text{şi} \quad a(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 3a + 4,$$

a fiind cunoscut.

Institutul forestier, Braşov, 1954.

R. Notăm $x_1 + x_2 = u$ şi $x_1x_2 = v$, pe care le substituim în relaţiile date. Obţinem sistemul

$$\begin{cases} u + 3v = 0 \\ au - v = 3a + 4, \end{cases}$$

a cărui soluţie este

$$u = \frac{3(3a+4)}{3a+1}; \quad v = -\frac{3a+4}{3a+1}.$$

Ecuaţia care admite rădăcinile x_1 şi x_2 este; deci,

$$(3a + 1)x^2 - 3(3a + 4)x - (3a + 4) = 0.$$

24. Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea, ale cărei rădăcini x_1 şi x_2 satisfac relaţiile următoare

$$4x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 4 = 0, \quad (x_1 - 1)(x_2 - 1) = \frac{1}{1+a},$$

a fiind cunoscut.

Institutul forestier, Braşov, 1954.

R. Notăm $x_1 + x_2 = u$ şi $x_1x_2 = v$, după care relaţiile date devin

$$\begin{cases} 4v - 5u + 4 = 0 \\ v - u + 1 = \frac{1}{1+a}. \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul, obţinem

$$u = x_1 + x_2 = \frac{4}{1+a} \quad \text{şi} \quad v = x_1x_2 = \frac{4-a}{1+a}.$$

Ecuaţia care admite rădăcinile x_1 şi x_2 este, deci,

$$(1 + a)x^2 - 4x + 4 - a = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

25. Fiind dată ecuația

$$x^2 + px + q = 0$$

cu rădăcinile x_1 și x_2 să se formeze ecuațiile ale căror rădăcini să fie

$$x_1 + \frac{1}{x_2} \quad \text{și} \quad x_2 + \frac{1}{x_1} \tag{1}$$

$$\frac{x_1}{x_2} \quad \text{și} \quad \frac{x_2}{x_1} \tag{2}$$

$$\frac{x_1}{x_2 + 1} \quad \text{și} \quad \frac{x_2}{x_1 + 1}. \tag{3}$$

Să se aplice apoi relațiile obținute ecuației

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

și să se verifice justețea lor.

Institutul politehnic, București, 1954.

R. Rădăcinile ecuației (1) vor fi

$$\frac{x_1x_2 + 1}{x_2}; \quad \frac{x_1x_2 + 1}{x_1};$$

ținînd seama de relațiile $x_1 + x_2 = -p$ și $x_1x_2 = q$, suma rădăcinilor ecuației (1) va fi $\frac{-p\,(q+1)}{q}$, iar produsul $\frac{(q+1)^2}{q}$. Ecuația (1) va avea deci forma

$$qX^2 + p\,(q + 1)\,X + (q + 1)^2 = 0$$

sau, considerînd cazul numeric, avem

$$6X^2 - 35X + 49 = 0,$$

în care prima rădăcină $\frac{7}{2}$ este egală cu $\frac{6+1}{2}$ (ținînd seama de relații și de ecuația numerică dată); iar a doua rădăcină $\frac{7}{3}$ este egală cu $\frac{6+1}{3}$.

Rădăcinile ecuației (2) fiind $\frac{x_1}{x_2}$ și $\frac{x_2}{x_1}$, suma acestor rădăcini va fi

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{p^2 - 2q}{q},$$

iar produsul lor va fi egal cu

$$\frac{x_1x_2}{x_1x_2} = 1.$$

Ecuaţia (2) va avea deci forma

$$qX^2 - (p^2 - 2q)X + q = 0$$

sau, considerînd cazul numeric,

$$6X^2 - 13X + 6 = 0.$$

Justeţea relaţiilor este evidentă.

Rădăcinile ecuaţiei (3) fiind $\frac{x_1}{x_2+1}$ şi $\frac{x_2}{x_1+1}$, suma lor va fi

$$S = \frac{x_1(x_1+1) + x_2(x_2+1)}{x_1x_2 + x_2 + x_1 + 1} = \frac{p^2 - 2q - p}{q - p + 1},$$

iar produsul

$$P = \frac{q}{q-p+1}.$$

Ecuaţia (3) va fi de forma

$$(q - p + 1)X^2 - (p^2 - 2q - p)\,X + q = 0$$

sau, considerînd cazul numeric, obţinem

$$12X^2 - 18X + 6 = 0.$$

Justeţea relaţiilor este evidentă.

26. Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea care admite ca rădăcini pe

$$y_1 = x_1^3 + \frac{1}{x_2} \text{ şi } y_2 = x_2^3 + \frac{1}{x_1},$$

unde x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 + px + q = 0.$$

Facultatea de matematică şi fizică, Bucureşti 1955.

R. Calculăm

$$y_1 + y_2 = x_1^3 + \frac{1}{x_2} + x_2^3 + \frac{1}{x_1} = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2\,(x_1 + x_2) + \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$$

și

$$y_1y_2 = \left(x_1^3 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2^3 + \frac{1}{x_1}\right) =$$

$$= (x_1x_2)^3 + x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1x_2} = (x_1x_2)^3 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + \frac{1}{x_1x_2}.$$

Ţinînd seama că $x_1 + x_2 = -p$ și că $x_1x_2 = q$, rezultă că avem

$$y_1 + y_2 = -\frac{p^3q - 3pq^2 + p}{q} \quad \text{și} \quad y_1y_2 = \frac{q^4 + p^2q - 2q^2 + 1}{q}.$$

Ecuaţia care admite ca rădăcini pe $x_1^3 + \frac{1}{x_2}$ și $x_2^3 + \frac{1}{x_1}$ va fi deci

$$qy^2 + p(p^2q - 3q^2 + 1)\, y + (q^4 + p^2q - 2q^2 + 1) = 0$$

27. Să se demonstreze că discriminantul ecuaţiei

$$ax^2 + bx + c + m\,(a'x^2 + b'x + c') = 0$$

este un pătrat perfect, dacă ecuaţiile

$$ax^2 + bx + c = 0;\ a'x^2 + b'x + c' = 0$$

au o rădăcină comună.

Academia tehnică militară, 1955.

R. Să găsim condiţia ca ecuaţiile

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ și } a'x^2 + b'x + c' = 0$$

să aibă o rădăcină comună și expresiile rădăcinilor celor două ecuaţii.

Fie α rădăcina comună, β și γ celelalte rădăcini ale ecuaţiilor date.

Scriem relaţiile dintre rădăcini și coeficienţi:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \longrightarrow (1) \qquad \alpha + \gamma = -\frac{b'}{a'}; \longrightarrow (3)$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}, \longrightarrow (2) \qquad \alpha\gamma = \frac{c'}{a'}. \longrightarrow (4)$$

Din scăderea ecuaţiilor (1), (3) și împărţirea ecuaţiilor (2) și (4), obţinem sistemul

$$\beta - \gamma = \frac{ab' - a'b}{aa'}; \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a'c}{ac'},$$

care rezolvat dă

$$\beta = -\frac{c}{a} \cdot \frac{ab' - a'b}{ac' - a'c}, \quad \gamma = -\frac{c'}{a'} \cdot \frac{ab' - a'b}{ac' - a'c}.$$

Introducînd β în (1), obţinem

$$\alpha = -\frac{bc' - b'c}{ac' - a'c}.$$

Sistemul de mai sus de patru ecuaţii cu trei necunoscute α, β, γ trebuie să fie compatibil; de aceea, este necesar ca valorile găsite să verifice una din ecuaţiile (2) sau (4).

Introducînd α, β, γ în (2), obţinem condiţia cerută

$$(ab' - a'b)(bc' - b'c) = (ac' - a'c)^2.$$

Pe baza celor stabilite, se poate trece la rezolvarea problemei. S-a văzut că valorile rădăcinilor celor două ecuaţii cu o soluţie comună se exprimă prin funcţii raţionale de coeficienţii ecuaţiei pe care îi considerăm ca fiind numere raţionale. Aceste constatări ne conduc să dovedim că şi rădăcinile ecuaţiei

$$ax^2 + bx + c + m(a'x^2 + b'x + c') = 0 \qquad (5)$$

sînt numere raţionale.

În adevăr, folosind descompunerea unui trinom în factori, avem

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \quad \text{şi} \quad a'x^2 + b'x + c' = a'(x - \alpha)(x - \gamma).$$

Înlocuind în (5) ecuaţia devine

$$a(x - \alpha)(x - \beta) + ma'(x - \alpha)(x - \gamma) = 0$$

sau

$$(x - \alpha)[a(x - \beta) + ma'(x - \gamma)] = 0,$$

care admite rădăcinile

$$x_1 = \alpha \quad \text{şi} \quad x_2 = \frac{a\beta + ma'\gamma}{a + ma'};$$

ambele sînt expresii raţionale de coeficienţii ecuaţiilor

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{şi} \quad a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

de unde rezultă că discriminantul ecuaţiei (5) este un pătrat perfect.

Scanned with OKEN Scanner

28. Să se determine parametrul m, astfel încît ecuaţiile

$$x^2 + mx + 1 = 0 \text{ şi } x^2 + x + m = 0$$

să aibă o rădăcină comună. Să se afle rădăcinile lor în acest caz.

Academia tehnică militară, 1955.

R. Scriem condiţia ca cele două ecuaţii să admită o rădăcină comună

$$(ab' - a'b)(bc' - b'c) = (ac' - a'c)^2.$$

Obţinem ecuaţia care ne dă parametrul m, înlocuind valorile coeficienţilor; avem

$$(1 \cdot 1 - 1 \cdot m)(m \cdot m - 1 \cdot 1) = (1 \cdot m - 1 \cdot 1)^2,$$

de unde rezultă $m = 1$ sau $m = -2$.

Pentru $m = 1$ ambele rădăcini sînt comune şi egale cu

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}).$$

Pentru $m = -2$, rădăcina comună este $\alpha = 1$, iar celelalte rădăcini sînt $\beta = 1$ şi $\gamma = -2$.

29. Să se rezolve ecuaţia

$$x^2 + ax + 2 = 0,$$

ştiind că între rădăcinile ei există relaţia

$$x_1^4 + x_2^4 = 17.$$

Institutul tehnic, Craiova, 1955.

R. Relaţiile dintre coeficienţi şi rădăcini sînt

$$x_1 + x_2 = -a, \quad x_1 x_2 = 2.$$

Ridicînd la pătrat prima egalitate şi ţinînd seama de a doua, obţinem

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 4.$$

După o nouă ridicare la pătrat, avem

$$x_1^4 + x_2^4 = (a^2 - 4)^2 - 8.$$

Pentru ca relaţia dată să aibă loc, trebuie să avem

$$(a^2 - 4)^2 - 8 = 17,$$

ceea ce dă

I) $a^2 - 4 = 5$, cu soluţiile $a_{1,2} = \pm 3$,

Scanned with OKEN Scanner

și

II) $a^2 - 4 = -5$, cu soluțiile $a_{3,4} = \pm\sqrt{-1}$.

Rezolvînd ecuația pentru orice a, avem

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 8}}{2}.$$

Pentru $a = -3$, rădăcinile ecuației sînt $x_1 = 1$; $x_2 = 2$;
„ $a = +3$ „ „ „ $x_1 = -2$; $x_2 = -1$;
„ $a = -i$ „ „ „ $x_1 = -i$; $x_2 = 2i$;
„ $a = +i$ „ „ „ $x_1 = -2i$; $x_2 = i$.

30. Fie trinomul

$$y = 2x^2 - 5x - 3. \qquad (1)$$

a) Să se descompună în factori de gradul întîi.

b) Pentru ce valoare a lui x trinomul y ia valoarea cea mai mică.

c) Pentru ce valori ale lui y ecuația (1) are rădăcini imaginare.

d) Să se reprezinte grafic funcția (1) și să se indice pe figură rezultatele de la punctele (a), (b), (c).

Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1952.

R. a) Rădăcinile trinomului sînt $x_1 = -\frac{1}{2}$ și $x_2 = 3$. Le introducem în formula de descompunere $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ și avem

$$2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3).$$

b) Scriem trinomul sub forma canonică

$$y = 2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right].$$

Trinomul are valoarea minimă $y_m = -\frac{49}{8}$ pentru $x = \frac{5}{4}$.

c) Discriminantul ecuației (1)

$$2x^2 - 5x - (3 + y) = 0$$

este

$$\Delta = 25 + 8(3 + y) = 49 + 8y.$$

Pentru ca rădăcinile să fie imaginare trebuie să avem

$$\Delta < 0, \text{ adică } y < -\frac{49}{8}.$$

Scanned with OKEN Scanner

d) Introducem valorile obținute mai sus pentru x și cele corespunzătoare pentru y în următoarea tabelă de variație a trinomului

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
	$+\infty$	$\searrow\searrow$	0	$\searrow$	-3	$\searrow$	$-\frac{49}{8}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Reprezentarea grafică a trinomului este parabola din fig. 1.

31. Se dă ecuația

$$mx^2 - 2(m-2)x - 10 - m = 0.$$

I. Să se găsească valorile parametrului m pentru care ecuația are:

a) rădăcini reale și distincte;

b) rădăcini egale;

c) rădăcini imaginare.

II. Să se arate că există o relație între rădăcinile ecuației, independentă de m.

III. Să se regăsească cu ajutorul acestei relații valorile rădăcinilor duble.

Institutul de construcții, București, 1951.

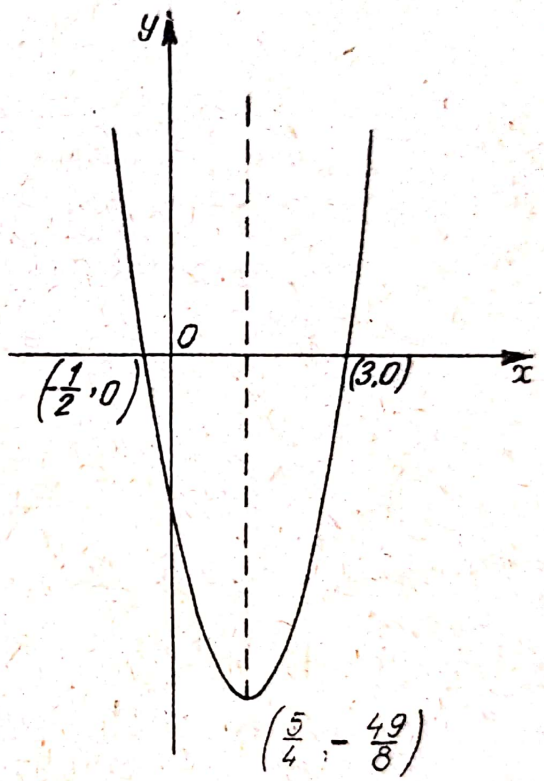


Fig. 1

R. I. a) Pentru ca ecuația să aibă rădăcini distincte, trebuie ca realizantul ecuației să fie pozitiv, adică $m^2 + 3m + 2 > 0$.

Rădăcinile ecuației $m^2 + 3m + 2 = 0$ fiind $m_1 = -2$ și $m_2 = -1$, trinomul va fi pozitiv, cînd m va fi în afara rădăcinilor adică

$$m < -2 \text{ sau } m > -1.$$

b) Pentru ca ecuația să aibă o rădăcină dublă, trebuie să avem

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

(cu rădăcinile -2 și -1);

pentru $m = -2$ avem rădăcinile egale

$$x_1 = x_2 = \frac{m-2}{m} = 2;$$

pentru $m = -1$ avem rădăcinile egale

$$x_1 = x_2 = 3.$$

c) Ecuația propusă nu are rădăcini reale cînd realizantul este negativ, ceea ce cere ca să avem

$$-2 < m < -1.$$

II. Fie s și p suma și produsul rădăcinilor x_1 și x_2; avem

$$s = x_1 + x_2 = 2 - \frac{4}{m}; \qquad p = x_1 x_2 = \frac{-10}{m} - 1,$$

de unde

$$-\frac{2}{m} = \frac{s}{2} - 1 = \frac{p}{5} + \frac{1}{5} \text{ sau } 5s = 2p + 12,$$

relația căutată, independentă de m.

III. Înlocuind s și p prin valorile $x_1 + x_2$ și $x_1 x_2$, în cazul cînd $x_1 = x_2 = x$, adică făcînd în relația găsită

$$s = 2x \text{ și } p = x^2,$$

obținem ecuația

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

de unde rezultă valorile rădăcinilor duble

$$x = \frac{5 \pm 1}{2} = 2 \text{ și } 3,$$

cum s-a găsit mai sus.

32. Se dă ecuația

$$x^2 - mx + 2 = 0$$

cu rădăcinile x_1 și x_2 și m un parametru.

Se cere:

a) fără să se rezolve ecuația, să se arate că expresia

$$E = x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2^2} + x_2^2 + \frac{21}{4}$$

este pozitivă, oricare ar fi m;

b) să se determine parametrul m, astfel ca expresia E să aibă valoarea cea mai mică;

Scanned with OKEN Scanner

c) să se calculeze valoarea expresiei

$$E' = \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1}$$

fără a rezolva ecuația;

d) să se determine m în așa fel, încît să avem

$$x_1^4 + x_2^4 > 3m\,(x_1^3 + x_2^3).$$

Institutul politehnic, București, 1959.

R. a) Avem

$$E = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} + \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} + \frac{21}{4}.$$

Înlocuind $x_1 + x_2 = m$ și $x_1x_2 = 2$, obținem

$$E = m^2 - 4 + \frac{m}{2} + \frac{m^2 - 4}{4} + \frac{21}{4} = \frac{5m^2 + 2m + 1}{4} =$$

$$= \frac{5}{4}\left[\left(m + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{25}\right].$$

Din rezultatul obținut este evident că $E > 0$ pentru orice valoare a lui m.

b) Se obține cea mai mică valoare a lui E, dacă $m + \frac{1}{5} = 0$, adică pentru $m = -\frac{1}{5}$. Valoarea minimă a lui E este $\frac{1}{5}$.

c) Avem succesiv

$$E' = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1x_2} = \pm\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2},$$

de unde rezultă $E' = \frac{\pm m\sqrt{m^2 - 8}}{2}$.

d) Ținînd seama că avem $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2 = (m^2 - 4)^2 - 8$ și $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = m^3 - 6m$, inegalitatea dată devine

$$(m^2 - 4)^2 - 8 > 3m(m^3 - 6m) \text{ sau } m^4 - 5m^2 - 4 < 0.$$

Rezultă

$$\frac{5 - \sqrt{41}}{2} < m^2 < \frac{5 + \sqrt{41}}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece m^2 este pozitiv, dubla inegalitate se reduce la

$$m^2 < \frac{5+\sqrt{41}}{2}$$

și prin urmare

$$-\sqrt{\frac{5+\sqrt{41}}{2}} < m < \sqrt{\frac{5+\sqrt{41}}{2}}.$$

33. Se dă ecuația $m(m-1)x^2 - 2m(m+1)x + (m+1) = 0$. Se cere:

a) să se discute rădăcinile ecuației după toate valorile parametrului m;

b) x_1 și x_2 fiind rădăcinile ecuației, să se determine m, astfel ca să avem

$$2 > \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} > -3.$$

Institutul politehnic, București, 1958.

R. a) Calculăm discriminantul $\Delta = m^2(m+1)^2 - m(m-1) \times (m+1)$ sau $\Delta = m(m+1)(m^2+1)$. Semnul expresiei Δ este dat de produsul $m(m+1)$. Dacă $m < -1$ sau $m > 0$, ecuația admite două rădăcini reale și distincte. Pentru $-1 < m < 0$, ecuația are rădăcini imaginare. Dacă $m = -1$, rădăcinile sînt reale și egale, $x_1 = x_2 = 0$. În cazul cînd $m = 0$ ecuația nu există. Studiind semnul produsului și a sumei rădăcinilor, $x_1x_2 = \frac{m+1}{m(m-1)}$, $x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{(m-1)}$, ajungem la următoarele concluzii:

Pentru $m < -1$ rădăcinile ecuației sînt de semne contrare $x_1 > 0$ și $x_2 < 0$, cea mai mare în valoare absolută este în acest caz cea pozitivă $|x_1| > |x_2|$.

Dacă $0 < m < 1$, avem $x_1 < 0$ și $x_2 > 0$ cu notația $|x_1| > |x_2|$. Pentru $m > 1$ ambele rădăcini sînt pozitive. În cazul $m = 1$ ecuația dată se reduce la una de gradul întîi cu rădăcina $x = \frac{1}{2}$.

b) Exprimînd $x_1^3 + x_2^3$ și $x_1^2 + x_2^2$ cu ajutorul sumei $x_1 + x_2$ și a produsului x_1x_2, obținem

$$\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{(m+1)(4m^2+m+3)}{(m-1)(2m^2+m+1)},$$

iar dubla inegalitate de rezolvat se transformă în sistemul de inegalități simultane

$$E_1 = \frac{(m+1)(4m^2+m+3)}{(m-1)(2m^2+m+1)} - 2 < 0 \text{ și } E_2 = \frac{(m+1)(4m^2+m+3)}{(m-1)(2m^2+m+1)} + 3 > 0$$

sau

$$E_1 = \frac{7m^2 + 4m + 5}{(m-1)(2m^2+m+1)} < 0 \qquad \text{și} \qquad E_2 = \frac{2m(5m^2 + m + 2)}{(m-1)(2m^2+m+1)} > 0.$$

$E_1 < 0$ este echivalentă cu $m - 1 < 0$, iar $E_2 > 0$ cu $m(m-1) > 0$, astfel că dubla inegalitate este adevărată pentru toate valorile lui m pentru care avem

$$m < 0.$$

34. Se dă ecuația

$$\frac{5x}{5m^2-6m} - \frac{10}{(2m+1)(6-5m)} = \frac{-1}{mx(2m+1)},$$

unde m este un parametru.

a) Să cere să se discute rădăcinile ecuației după valorile parametrului m.

b) Să se determine parametrul m astfel ca suma inverselor rădăcinilor să fie egală cu 10.

Institutul tehnic, Galați, 1954.

R. a) După eliminarea numitorilor și ordonarea după puterile lui x, ecuația devine:

$$5(2m+1)x^2 + 10mx + (5m-6) = 0,$$

al cărei discriminant este:

$$\Delta = 25m^2 - 5(2m+1)(5m-6) = -5(5m^2 - 7m - 6).$$

Rădăcinile acestei expresii sînt: $m_1 = \frac{-3}{5}$ și $m_2 = 2$.

Dacă $m < -\frac{3}{5}$ sau $m > 2$, Δ este negativ, iar rădăcinile ecuației sînt complexe.

În cazul cînd $-\frac{3}{5} < m < 2$, Δ este pozitiv, iar rădăcinile sînt reale și distincte.

Pentru $m = -\frac{3}{5}$ rădăcinile sînt egale, $x_1 = x_2 = -3$, iar în cazul $m = 2$ avem $x_1 = x_2 = -\frac{2}{5}$.

Pentru $m = -\frac{1}{2}; 0; \frac{6}{5}$, ecuația dată nu are sens.

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$E_1 = \frac{7m^2 + 4m + 5}{(m-1)(2m^2+m+1)} < 0 \qquad \text{și} \qquad E_2 = \frac{2m(5m^2 + m + 2)}{(m-1)(2m^2+m+1)} > 0.$$

$E_1 < 0$ este echivalentă cu $m - 1 < 0$, iar $E_2 > 0$ cu $m(m-1) > 0$, astfel că dubla inegalitate este adevărată pentru toate valorile lui m pentru care avem

$$m < 0.$$

34. Se dă ecuația

$$\frac{5x}{5m^2-6m} - \frac{10}{(2m+1)(6-5m)} = \frac{-1}{mx(2m+1)},$$

unde m este un parametru.

a) Să cere să se discute rădăcinile ecuației după valorile parametrului m.

b) Să se determine parametrul m astfel ca suma inverselor rădăcinilor să fie egală cu 10.

Institutul tehnic, Galați, 1954.

R. a) După eliminarea numitorilor și ordonarea după puterile lui x, ecuația devine:

$$5(2m+1)x^2 + 10mx + (5m-6) = 0,$$

al cărei discriminant este:

$$\Delta = 25m^2 - 5(2m+1)(5m-6) = -5(5m^2 - 7m - 6).$$

Rădăcinile acestei expresii sînt: $m_1 = \frac{-3}{5}$ și $m_2 = 2$.

Dacă $m < -\frac{3}{5}$ sau $m > 2$, Δ este negativ, iar rădăcinile ecuației sînt complexe.

În cazul cînd $-\frac{3}{5} < m < 2$, Δ este pozitiv, iar rădăcinile sînt reale și distincte.

Pentru $m = -\frac{3}{5}$ rădăcinile sînt egale, $x_1 = x_2 = -3$, iar în cazul $m = 2$ avem $x_1 = x_2 = -\frac{2}{5}$.

Pentru $m = -\frac{1}{2}; 0; \frac{6}{5}$, ecuația dată nu are sens.

Scanned with OKEN Scanner

b) Condiția

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 10$$

echivalează cu relația

$$10x_1x_2 = x_1 + x_2.$$

Avînd în vedere că

$$x_1 + x_2 = -\frac{2m}{1+2m} \text{ și } x_1x_2 = \frac{5m-6}{5(2m+1)},$$

relația devine

$$\frac{10(5m-6)}{5(2m+1)} = -\frac{2m}{2m+1};$$

ea este verificată de $m = 1$.

35. Care sînt valorile parametrului m pentru care trinomul

$$(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6$$

este pozitiv, oricare ar fi x.

Institutul de mine, București, 1955.

R. Pentru ca trinomul

$$(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6$$

să fie pozitiv pentru orice valoare a lui x, este necesar ca discriminantul să fie mai mic sau cel mult egal cu zero, iar coeficientul lui x^2 să fie pozitiv.

Adică, inegalitățile

$$(2m-3)^2 - (m-2)(5m-6) \leqslant 0 \text{ și } m - 2 > 0$$

să fie verificate simultan.

După reducerea termenilor asemenea, obținem

$$m^2 - 4m + 3 \geqslant 0, \quad m > 2.$$

Aceste inegalități sînt verificate simultan numai de valorile lui m pentru care avem $m \geqslant 3$.

36. Se dă ecuația

$$mx(2-x) = 2x^2 + 1$$

și se cere:

a) să se discute natura rădăcinilor, cînd m variază de la $-\infty$ la $+\infty$;

Scanned with OKEN Scanner

b) să se determine m cu ajutorul relațiilor între rădăcinile și coeficienții ecuației date, astfel ca între rădăcinile ecuației să avem relația

$$\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{20}{x_1x_2}.$$

Institutul politehnic. Timișoara, 1955.

R. a) Ecuația dată se scrie

$$(m+2)\,x^2-2mx+1=0.$$

Discriminantul acestei ecuații are expresia

$$\Delta=m^2-m-2,$$

iar rădăcinile discriminantului sînt $m_1=-1$; $m_2=2$.

Dacă $m<-1$ sau $m>2$, atunci $\Delta>0$ și ecuația dată are rădăcinile reale și distincte.

Pentru $-1<m<2$, discriminantul este negativ și rădăcinile ecuației sînt complexe.

În cazul cînd $m=-1$ avem două rădăcini egale cu -1, iar pentru $m=2$, fiecare din rădăcinile egale are valoarea $\frac{1}{2}$.

b) După eliminarea numitorilor, relația dintre rădăcini devine

$$x_1^3+x_2^3=x_1x_2(x_1^2+x_2^2)+20(x_1x_2)^2.$$

Avînd în vedere că avem

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2) \text{ și } x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2,$$

relația între rădăcini devine

$$(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=x_1x_2\,[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+20(x_1x_2)^2.$$

După ce înlocuim

$$x_1+x_2=\frac{2m}{m+2} \quad \text{și} \quad x_1x_2=\frac{1}{m+2}$$

și eliminăm numitorii, găsim ecuația care ne dă pe m

$$2m^2(2m-1)=3(m+2)(m+3)$$

sau

$$4m^3-5m^2-15m-18=0.$$

Descompunem polinomul din membrul întîi, căutînd factori de forma $m\pm a$. Se știe că dacă există astfel de factori, este necesar ca a să fie divizor al termenului liber, în cazul nostru -18.

După încercări se găsește factorul $m-3$. Polinomul se descompune în

$$(m-3)(4m^2+7m+6)=0.$$

Rezolvînd ecuația, găsim valorile pe care le poate avea m pentru ca să existe relația dată între rădăcinile ecuației, și anume

$$m_1=3,\quad m_{2,3}=\frac{-7\pm i\sqrt{47}}{8}.$$

37. Fiind dată ecuația

$$x^2-2mx+2-m=0$$

se cere:

a) să se discute natura rădăcinilor ecuației cînd $m\in(-\infty,+\infty)$;

b) fără a rezolva ecuația, să se determine m astfel ca

$$\frac{x_1-1}{x_2}+\frac{x_2-1}{x_1}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}-26.$$

Institutul politehnic, Timișoara, 1961.

R. a) Realizantul este $R=m^2+m-2$. Avem $x_1x_2=2-m$ și $x_1+x_2=2m$.

Tabloul semnelor realizantului, produsului și sumei rădăcinilor este

m	R	x_1x_2	x_1+x_2	Concluzii
$-\infty$				
	$+$	$+$	$-$	x_1, x_2 negative
-2	0	4	-4	$x_1=x_2=-2$
0				x_1, x_2 complexe
1	0	1	2	$x_1=x_2=1$
	$+$	$+$	$+$	x_1, x_2 pozitive
2	$+$	0	$+$	$x_1=0,\ x_2=4$
$+\infty$	$+$	$-$	$+$	$x_1>0,\ x_2<0$ cu $\lvert x_1\rvert>\lvert x_2\rvert$

b) Relația dată se mai scrie $\frac{(x_1+x_2-1)^2-1}{x_1x_2}+24=0$, sau $\frac{(2m-1)^2-1}{2-m}+24=0$, ceea ce ne dă $m=3$ sau $m=4$.

Scanned with OKEN Scanner

38. Se consideră ecuația în x

$$\frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = a$$

și se cere:

a) să se arate că rădăcinile ecuației sînt reale, orice valoare reală ar avea a;

b) să se determine a în așa fel, încît să avem relația

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} = a,$$

unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației considerate.

Institutul de mine, Petroșeni, 1961

R. a) Ecuația $x^2 - x - 2 = a(x + 1)$ are rădăcinile $x_1 = -1$ și $x_2 = a + 2$; însă ecuația dată $\frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = a$ are numai rădăcina $a + 2$, pentru că fracția $(x^2 - x - 2)/(x + 1)$ nu are sens pentru $x = -1$.

b) Pentru ca rădăcinile ecuației $x^2 - x - 2 = a(x + 1)$ să satisfacă relația dată, trebuie să avem

$$\frac{(-1)^2 + (a + 2)^2}{(-1) + (a + 2)} = a$$

care este verificată pentru $a = -\frac{5}{3}$.

39. Se dă ecuația:

$$x^2 - (a - 1)x - 3(a + 2) = 0,$$

în care necunoscuta este x. Se cere:

a) să se rezolve ecuația;

b) să se afle valorile lui a pentru care suma pătratelor rădăcinilor ecuației este mai mică decît 18;

c) să se simplifice fracția

$$F = \frac{x^2 - (a - 1)x - 3(a + 2)}{x^2 + 2x - 3}.$$

Institutul politehnic, București, 1960

R. a) $x_1 = -3$; $x_2 = a + 2$.

b) $x_1^2 + x_2^2 = 9 + (a + 2)^2 < 18$

este verificată de orice valoare a lui a pentru care avem $-5 < a < 1$.

c) $F = \frac{x - a - 2}{x - 1}$.

Scanned with OKEN Scanner

40. Să se formeze ecuația de gradul al doilea ale cărei rădăcini x_1 și x_2 să satisfacă relațiile:

$$4x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 4 = 0$$

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = \frac{1}{1+a},$$

a fiind un număr cunoscut.

Să se determine a astfel, încît suma $x_1^2 + x_2^2$ să fie egală cu 11.

Institutul de construcții, București, 1960.

R. Notînd $x_1 + x_2 = u$ și $x_1x_2 = v$, avem sistemul

$$\begin{cases} 4v - 5u + 4 = 0 \\ (1 + a)(v - u) + a = 0 \end{cases}$$

care are soluția

$$u = \frac{4}{1+a}; \quad v = \frac{4-a}{1+a}.$$

Ecuația de gradul al doilea căutată este, deci,

$$(1 + a)x^2 - 4x + 4 - a = 0.$$

Pentru ca suma $x_1^2 + x_2^2$ să fie egală cu 11, trebuie să avem

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = u^2 - 2v = \frac{16}{(1+a)^2} - \frac{2(4-a)}{1+a} = 11,$$

care este verificată de către $a = -3$ și $a = -\frac{1}{9}$.

41. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației

$$x^2 + 2mx - m = 0,$$

iar X_1 și X_2 rădăcinile ecuației

$$X^2 - (m + 1)X + m^2 = 0,$$

în care m este un parametru.

Să se determine valorile lui m pentru care rădăcinile celor două ecuații verifică inegalitatea

$$(x_1 + x_2)X_1X_2 < (X_1 + X_2)x_1x_2.$$

Facultatea de matematică și fizică, Cluj, 1953.

R. Ținînd seama de relațiile dintre rădăcini și coeficienți, inegalitatea dată devine

$$-2m \cdot m^2 < -(m + 1)m$$

sau

$$m(2m^2 - m - 1) > 0.$$

Trinomul $T = 2m^2 - m - 1$, cu rădăcinile $-\frac{1}{2}$ și 1, este pozitiv pentru $m < -\frac{1}{2}$ sau $m > 1$ și negativ pentru $-\frac{1}{2} < m < 1$.

Pentru $m < -\frac{1}{2}$, produsul mT este negativ; dacă avem $-\frac{1}{2} < m < 0$, atunci $mT > 0$; pentru $0 < m < 1$, $mT < 0$ și pentru $m > 1$, avem $mT > 0$. Din cercetarea efectuată rezultă că inegalitatea este satisfăcută numai cînd avem

$$-\frac{1}{2} < m < 0$$

sau

$$m > 1.$$

42. Se consideră polinomul

$$P(x) = 2x^2 + 6x + 3 - m(x^2 + 1)$$

și se cere:

a) Să se determine m astfel ca $P(x)$ să fie un pătrat perfect.

b) Să se calculeze $u = x_1^3 + x_2^3$, unde x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației $P(x) = 0$, fără a rezolva ecuația.

c) Ce valori poate lua parametrul m pentru ca $u > 0$?

Institutul de construcții, București, 1962

R. a) Pentru ca $P(x)$ să fie un pătrat perfect este necesar ca discriminantul trinomului, care este $\Delta = -m^2 + 5m + 3$, să fie nul. Valorile căutate pentru m sînt deci,

$$m_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}.$$

b) Avem

$$u = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \frac{-18(m^2 - 5m - 6)}{(m-2)^3}.$$

c) Pentru a avea $u > 0$ este necesar ca valorile lui m să aparțină reuniunii de intervale

$$m \in (-\infty, -1) \cup (2, 6).$$

Scanned with OKEN Scanner

43. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{\dfrac{x(x-a)}{x^2+a^2}}{\dfrac{a}{x+a}-1}+\frac{\dfrac{x}{x^2+a^2}-\dfrac{x}{x^2-a^2}}{\dfrac{a^2}{x^2-a^2}+1}+\frac{2a^2(a^2+x)}{x^2(x^2+a^2)}=0.$$

Institutul de transporturi şi căi ferate, Bucureşti, 1955.

R. După efectuarea operaţiilor şi a simplificărilor în membrul întîi, ecuaţia devine

$$-\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}-\frac{2a^2}{x(x^2+a^2)}+\frac{2a^2(a^2+x)}{x^2(x^2+a^2)}=0.$$

Prin eliminarea numitorilor şi reducerea termenilor asemenea, ajungem la ecuaţia bipătrată

$$x^4-a^2x^2-2a^4=0,$$

ale cărei soluţii sînt

$$x_{1,2}=\pm a\sqrt{2} \quad \text{şi} \quad x_{3,4}=\pm a\sqrt{-1}.$$

44. Ce devine expresia $E=\frac{1}{4}x^2+\frac{b}{x^2}$, pentru $x=\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}$. Să se afle valorile lui x pentru care $E=a$.

Institutul politehnic, Bucureşti, 1957.

R. Calculăm x^2 şi $\frac{1}{x^2}$. Avem

$$x^2=a+\sqrt{b}+a-\sqrt{b}-2\sqrt{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}=2(a-\sqrt{a^2-b})$$

şi

$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2(a-\sqrt{a^2-b})}=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2b}.$$

Rezultă deci

$$E=\frac{1}{4}x^2+\frac{b}{x^2}=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}+\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}=a.$$

Pentru a afla pe x, ca să avem $E=a$ rezolvăm ecuaţia

$$\frac{x^2}{4}+\frac{b}{x^2}=a, \text{ sau } x^4-4ax^2+4b=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scriem ultima ecuație sub forma

$$x^4 - 4ax^2 + 4a^2 = 4(a^2 - b),$$

sau

$$(x^2 - 2a)^2 = 4(a^2 - b).$$

Rezultă succesiv

$$x^2 - 2a = \pm 2\sqrt{a^2 - b}; \qquad x = \pm\sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 - b}}.$$

Avem deci patru valori pentru x care fac ca $E = a$.

Deoarece avem $2a + 2\sqrt{a^2 - b} = \left(\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2$, rezultă că cele patru valori sînt respectiv egale cu

$$x_{1,2} = \pm\left(\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}\right) \text{ și } x_{3,4} = \pm\left(\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}}\right).$$

45. Se consideră ecuația

$$(a^2 - 1)x^4 - 2(a^2 + 3a + 5)x^2 + a^2 + 6a + 11 = 0.$$

a) Care sînt valorile lui a pentru care ecuația are toate rădăcinile reale.

b) Să se rezolve ecuația și să se așeze rădăcinile în ordine crescătoare. *Discuție.*

c) În ce caz cele patru rădăcini sînt în progresie aritmetică?

Institutul politehnic, București, 1957.

R. Punem $x^2 = y$, după care ecuația dată devine

$$E(y) = (a^2 - 1)y^2 - 2(a^2 + 3a + 5)\cdot y + a^2 + 6a + 11 = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuații sînt

$$y_1 = \frac{a^2 + 6a + 11}{a^2 - 1}, \quad y_2 = 1.$$

de unde rezultă rădăcinile

$$x_1 = -\sqrt{\frac{a^2 + 6a + 11}{a^2 - 1}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{a^2 + 6a + 11}{a^2 - 1}}, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 1.$$

a) Ținînd seama că $a^2 + 6a + 11 = (a + 3)^2 + 2 > 0$ pentru orice valoare a lui a, rezultă că rădăcinile x sînt reale, dacă $a^2 - 1 > 0$, ceea ce implică să avem $a < -1$ sau $a > 1$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru a așeza rădăcinile în ordine crescătoare trebuie să comparăm $|x_{1,2}|$ cu 1. În acest scop studiem semnul expresiei

$$U = \frac{a^2 + 6a + 11}{a^2 - 1} - 1 = \frac{6(a+2)}{a^2 - 1}.$$

I. Dacă avem $a < -2$, sau $-1 < a < 1$, atunci U este negativ și prin urmare $|x_{1,2}| < 1$. În acest caz ordinea crescătoare a rădăcinilor ecuației date este

$$-1,\ x_1,\ x_2,\ 1.$$

II. În cazul cînd $-2 < a < -1$, sau $a > 1$, atunci $|x_{1,2}| > 1$ și în acest caz ordinea crescătoare a rădăcinilor este

$$x_1,\ -1,\ 1,\ x_2.$$

c) Pentru ca cele patru rădăcini să fie în progresie aritmetică în cazul I, trebuie să avem

$$x_1 + 1 = x_2 - x_1 = 1 - x_2$$

sau

$$-\sqrt{\frac{a^2 + 6a + 11}{a^2 - 1}} + 1 = 2\sqrt{\frac{a^2 + 6a + 11}{a^2 - 1}} = 1 - \sqrt{\frac{a^2 + 6a + 11}{a^2 - 1}}.$$

Rezolvînd în acest caz, obținem $a = \frac{-27 \pm i\sqrt{71}}{8}$, adică nu există numere reale pentru ca cele patru rădăcini să fie în progresie aritmetică.

În cazul II trebuie să avem

$$-1 - x_1 = 2 = x_2 - 1$$

sau

$$-1 + \sqrt{\frac{a^2 + 6a + 11}{a^2 - 1}} = 2 = \sqrt{\frac{a^2 + 6a + 11}{a^2 - 1}} - 1.$$

Acestea din urmă ne conduc la ecuația $8a^2 - 6a - 20 = 0$ cu rădăcinile $a_1 = 2$ și $a_2 = -\frac{5}{4}$.

Pentru cazul $a = 2$, rădăcinile sînt -3, -1, 1, 3, care sînt în progresie aritmetică cu rația 2.

Dacă $a = -\frac{5}{4}$, rădăcinile sînt aceleași -3; -1; 1; 3.

Scanned with OKEN Scanner

46. Se dă sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x+a}{3} = \dfrac{y-2a}{-1} = \dfrac{z+a}{5}, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 4a^2 - 135. \end{cases}$$

Se cere:

a) Să se rezolve sistemul.

b) Să se determine a în așa fel, încît sistemul de soluții (x_1, y_1, z_1) să fie în progresie aritmetică, apoi să se determine a astfel, încît sistemul de soluții (x_2, y_2, z_2), să fie în progresie aritmetică.

c) În ambele cazuri să se afle suma primilor 21 de termeni ai progresiei.

Institutul politehnic, București, 1962.

R. a) Sistemul are soluțiile

$$x_1 = -9 - a,\ y_1 = 2a + 3,\ z_1 = -15 - a \text{ și } x_2 = 9 - a,$$
$$Y_2 = 2a - 3,\ z_2 = 15 - a.$$

b) Pentru ca x_1, y_1, z_1 să fie în progresie aritmetică, trebuie să avem $x_1 + z_1 = 2y_1$, ceea ce ne dă $a = -5$, iar progresia este $-4, -7, -10$, cu rația -3.

Pentru ca x_2, y_2, z_2 să fie în progresie aritmetică este necesar să avem $x_2 + z_2 = 2y_2$ care ne conduce la soluția $a = 5$ și progresia corespunzătoare: 4, 7, 10, cu rația 3.

c) Aplicînd formulele $a_n = a_1 + (n-1)\,r$ și $S_n = \dfrac{1}{2} n(a_1 + a_n)$, obținem, în primul caz, $a_{21} = -64$ și $S_{21} = -714$, iar în al doilea caz, $a_{21} = 64$ și $S_{21} = 714$.

47. Se dă sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + 4y = 3. \end{cases}$$

Pentru ce valori ale lui m avem $x > 0$, $y > 0$.

Facultatea de matematică și fizică, Cluj, 1955.

R. Rezolvînd sistemul, obținem

$$x = \frac{3m-4}{m^2-4} \text{ și } y = \frac{m-3}{m^2-4}.$$

Să studiem semnele expresiilor lui x și y. Pentru aceasta introducem într-o tabelă variația semnului lui $m^2 - 4$; $3m - 4$ și $m-3$.

Avem

m	m^2-4	$3m-4$	$m-3$	semnul lui x	semnul lui y
-2	$+$ 0	$-$	$-$	$-$	$-$
$\frac{4}{3}$	$-$ 0	$-$ 0	$-$	$+\infty -$ 0	$+\infty +$ $+$
2	$-$ 0	$+$ $+$	$-$	$-\infty +$	$-\infty +$
3	$+$ $+$	$+$ $+$	$-$ 0	$+\infty -$	$-$ 0
	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Din tabelă rezultă că $x > 0$ și $y > 0$ cînd $-2 < m < \frac{4}{3}$, sau $m > 3$.

48. a) Să se rezolve și să se discute sistemul

$$\begin{cases} x + (m+1)\,y + z = 2 + m - m^2 \\ mx + y - z = 0 \\ x - 2y - mz = -2 + 3m - m^2 \end{cases}$$

știind că m este un parametru.

b) Să se examineze cazurile particulare

$$m = -1; \quad m = 2; \quad m = -2.$$

Facultatea de matematică și fizică, București, 1956.

R. a) Rezolvînd prin una din metodele de eliminare a necunoscutelor, obținem

$$x = \frac{2m}{m+1}; \quad y = 1 - m \text{ și } z = \frac{1+m^2}{m+1},$$

care se obțin în cursul rezolvării, după simplificări prin factorii $m-2$ și $m+2$, ceea ce este posibil dacă presupunem $m \neq 2$ și $m \neq -2$. Pe de altă parte, observăm că atît x cît și z conțin pe $m+1$ la numitor. Se impune deci să examinăm ce se întîmplă cu sistemul în următoarele cazuri: $m = -1$; $m = 2$ și $m = -2$.

b) Dacă $m = -1$, sistemul devine

$$x + z = 0; \quad y - (x + z) = 0; \quad x + z - 2y = -6.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din primele două obținem $x + z = 0$ și $y = 0$ care nu verifică pe a treia. Sistemul este deci imposibil.

Dacă $m = 2$, avem

$$x + 3y + z = 0;\ 2x + y - z = 0;\ x - 2y - 2z = 0.$$

Observînd că $x - 2y - 2z = (2x + y - z) - (x + 3y + z)$, rezultă că sistemul dat se reduce numai la ecuațiile $x + 3y + z = 0$ și $2x + y - z = 0$, care admite o infinitate de soluții $x = \frac{4}{5} z$; $y = -\frac{3}{5} z$. El este deci nedeterminat. Dacă $m = -2$, sistemul devine

$$x - y + z = -4;\ -2x + y - z = 0;\ x - 2y + 2z = -12.$$

Și în acest caz el este nedeterminat. Sistemul se reduce la $x = 4$;

$$y - z = 8.$$

49. Să se rezolve și să se discute sistemul liniar

$$\begin{cases} x + y + az = a + 2 \\ x + ay + z = a + 2 \\ ax + y + z = 3. \end{cases}$$

Institutul politehnic, Iași, 1957.

R. Adunînd, membru cu membru, obținem

$$(a + 2)\, x + (a + 2)\, y + (a + 2)\, z = 2\,(a + 2) + 3.$$

Dacă presupunem $a \neq -2$, împărțim prin $a + 2$, de unde rezultă

$$x + y + z = 2 + \frac{3}{a+2}. \qquad (1)$$

Scăzînd pe (1) din fiecare din ecuațiile date, obținem

$$x = \frac{1}{a+2};\qquad y = \frac{a+3}{a+2};\qquad z = \frac{a+3}{a+2},$$

care au rezultat în cursul operațiilor prin simplificare cu $a-1$, posibilă numai dacă $a \neq 1$. Avînd în vedere aceasta și faptul că la numitorul fiecărei fracții, care dă pe x, y și z, se află $a + 2$, se impune să examinăm ce se întîmplă cînd $a = -2$ și $a = 1$.

Dacă $a = -2$, sistemul devine

$$x + y - 2z = 0;\ x - 2y + z = 0;\ -2x + y + z = 3.$$

Scanned with OKEN Scanner

Adunînd membru cu membru, obținem o absurditate $0=3$; sistemul este, prin urmare, imposibil.

Dacă $a = 1$, obținem sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + z = 3, \end{cases}$$

care se reduce numai la ecuația $x + y + z = 3$. Sistemul este deci nedeterminat.

50. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x + y = m - 1 \\ (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = m^2 + 3. \end{cases}$$

a) Să se calculeze x și y în funcție de m.

b) Să se arate că oricare ar fi m real, rădăcinile x, y ale sistemului sînt reale.

c) Să se calculeze valorile lui x și m care verifică sistemul dat, dacă $y = 1$.

Institutul politehnic, București, 1961.

R. a) Sistemul dat se mai scrie

$$\begin{cases} (x+1) + (y- 1) = m - 1 \\ (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = m^2 + 3 \end{cases}$$

care este echivalent cu

$$\begin{cases} (x + 1) + (y - 1) = m - 1 \\ (x + 1)(y - 1) = -(m + 1). \end{cases}$$

Valorile $(x+1)$, $(y-1)$ sînt rădăcinile ecuației

$$z^2 - (m-1)z - (m + 1) = 0.$$

Deducem soluțiile sistemului dat:

$$x = \frac{m - 3 + \sqrt{m^2 + 2m + 5}}{2}; \qquad y = \frac{m + 1 - \sqrt{m^2 + 2m + 5}}{2}$$

și

$$x = \frac{m - 3 - \sqrt{m^2 + 2m + 5}}{2}; \qquad y = \frac{m + 1 + \sqrt{m^2 + 2m + 5}}{2};$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru orice m, avem $m^2 + 2m + 5 = (m + 1)^2 + 4 > 0$, deci soluţiile x, y, sînt reale.

c) Dacă $y = 1$, avem $x = m - 2$ şi $(x + 1)^2 = m^2 + 3$; prin urmare $(m - 1)^2 = m^2 + 3$, care este verificată de $m = -1$. Valorii găsite, îi corespunde $x = -3$.

51. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} E_1 = x + 2y + 3z + 4u = 1 \\ E_2 = 4x + y + 2z + 3u = 2 \\ E_3 = 3x + 4y + z + 2u = 3. \\ E_4 = 2x + 3y + 4z + u = 4. \end{cases}$$

Facultatea de matematică şi fizică, Cluj, 1958

R. Adunînd membru cu membru şi simplificînd prin $1 + 2 + 3 + 4$. obţinem

$$x + y + z + u = 1. \qquad (1)$$

Pe de altă parte avem

$$\begin{cases} E_1 - E_2 = -3x + y + z + u = -1 \\ E_2 - E_3 = x - 3y + z + u = -1 \\ E_3 - E_4 = x + y - 3z + u = -1 \\ E_4 - E_1 = x + y + z - 3u = 3. \end{cases}$$

Scăzînd pe fiecare din aceste ecuaţii din (1), obţinem imediat

$$x = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{1}{2}; \quad z = \frac{1}{2}; \quad u = -\frac{1}{2}.$$

52. Să se rezolve sistemul

$$\frac{xyz}{y+z} = a; \quad \frac{xyz}{z+x} = b; \quad \frac{xyz}{x+y} = c,$$

unde $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Institutul de petrol şi gaze, Bucureşti, 1954

R. Inversînd fracţiile, sistemul se scrie

$$\frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{a},$$
$$\frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} = \frac{1}{b},$$
$$\frac{1}{zx} + \frac{1}{zy} = \frac{1}{c}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin adunarea ecuațiilor, obținem

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Scăzînd din aceasta pe fiecare din ecuațiile precedente, obținem

$$\frac{1}{yz}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right),$$
$$\frac{1}{xz}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right),$$
$$\frac{1}{xy}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$$

sau

$$yz=\frac{2abc}{ac+ab-bc};\quad xz=\frac{2abc}{ab+bc-ac};\quad xy=\frac{2abc}{ac+bc-ab}.$$

Înmulțind membru cu membru, rezultă

$$xyz=\frac{2abc\sqrt{2abc}}{\sqrt{(ac+ab-bc)\,(ab+bc-ac)\,(ac+bc-ab)}}$$

și apoi

$$x=\sqrt{\frac{2abc\,(ac+ab-bc)}{(ab+bc-ac)(ac+bc-ab)}};\quad y=\sqrt{\frac{2abc\,(ab+bc-ac)}{(ac+ab-bc)(ac+bc-ab)}};$$
$$z=\sqrt{\frac{2abc\,(ac+bc-ab)}{(ac+ab-bc)(ab+bc-ac)}}.$$

53. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{2}\\[2ex]\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z+x}=\dfrac{1}{3}\\[2ex]\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

R. Notăm $x+y+z=t$, atunci sistemul devine

$$\begin{cases}xy+xz=2t\\xy+yz=3t\\xz+zy=4t.\end{cases}\qquad(1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Adunînd ecuaţiile, obţinem

$$2(xy + xz + yz) = 9t \quad \text{sau} \quad xy + xz + yz = 4{,}5t;$$

scăzînd din aceasta fiecare ecuaţie a sistemului (1), deducem ecuaţiile

$$\begin{cases} yz = 2{,}5t \\ xz = 1{,}5t \\ xy = 0{,}5t. \end{cases} \tag{2}$$

Înmulţind membru cu membru obţinem

$$(xyz)^2 = 1{,}875t^3 \quad \text{sau} \quad xyz = \sqrt{1{,}875} \cdot t\sqrt{t},$$

care împărţit prin fiecare ecuaţie a sistemului (2), ne dă

$$x = \frac{\sqrt{1{,}875\,t}}{2{,}5}; \quad y = \frac{\sqrt{1{,}875\,t}}{1{,}5}; \quad z = \frac{\sqrt{1{,}875\,t}}{0{,}5} \tag{3}$$

Introducînd aceste valori în $x + y + z = t$, obţinem ecuaţia care dă pe t:

$$\sqrt{1{,}875\,t}\left(\frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{0{,}5}\right) = t, \quad \text{de unde} \quad t = \frac{529}{30}.$$

Pentru a afla x, y, z, substituim valoarea lui t în sistemul (3). Avem

$$\sqrt{1{,}875\,t} = \frac{23}{4},$$

de unde rezultă

$$x = \frac{23}{10}; \quad y = \frac{23}{6}; \quad z = \frac{23}{2}.$$

54. Să se determine p şi q astfel ca ecuaţiile

$$(5p - 52)x^2 + (4 - p)\,x + 4 = 0,$$
$$(2q + 1)\,x^2 - 5qx + 20 = 0.$$

să aibă aceleaşi rădăcini.

Institutul politehnic, Iaşi, 1954.

R. Pentru ca ecuaţiile să aibă aceleaşi rădăcini, trebuie să scriem proporţionalitatea coeficienţilor. Deci, avem

$$\frac{5p - 52}{2q + 1} = \frac{4 - p}{-5q} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Rezolvînd sistemul format, obţinem $p = 11$; $q = 7$.

Scanned with OKEN Scanner

55. Să se determine numerele p și q astfel ca ecuațiile

$$px^2 - (ap - 4)\,x + 2a\,(p - 1) = 0,$$
$$(q - 1)\,x^2 - (a - 2)\,(q - 1)\,x + a\,(2q - 4) = 0$$

să aibă aceleași rădăcini. După ce se determină p și q să se discute ecuația.

Institutul de petrol și gaze, București, 1952.

R. Pentru ca cele două ecuații să aibă aceleași rădăcini, trebuie să avem coeficienții proporționali

$$\frac{p}{q-1} = \frac{ap-4}{(a-2)(q-1)} = \frac{2a(p-1)}{a(2q-4)}.$$

Rezolvînd sistemul, găsim

$$p = 2; \quad q = 3.$$

După înlocuirea lui p, q prin 2 și 3, ecuațiile iau forma următoare

$$x^2 - (a - 2)\,x + a = 0,$$

al cărei discriminant este

$$\Delta = (a - 2)^2 - 4a = a^2 - 8a + 4.$$

Pentru $a < 4 - 2\sqrt{3}$ sau $a > 4 + 2\sqrt{3}$, ecuația admite rădăcini reale și distincte, cînd $4 - 2\sqrt{3} < a < 4 + 2\sqrt{3}$, ecuația are două rădăcini complex conjugate și, în sfîrșit, dacă avem $a = 4 \pm 2\sqrt{3}$, atunci $x_1 = x_2 = 1 \pm \sqrt{3}$.

56. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1952.

R. Ecuația a doua se scrie sub forma

$$(x + y)^3 - 3xy\,(x + y) = 35.$$

Ținînd seama că $x + y = 5$, deducem $xy = 6$.

Obținem soluțiile, rezolvînd sistemul

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6. \end{cases}$$

Aceste soluţii sînt

$$x = 2;\ y = 3 \text{ sau } x = 3;\ y = 2.$$

57. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Facultatea de matematică şi fizică, Cluj, 1953

R. Sistemul dat se scrie sub forma

$$\begin{cases} xy\ (x + y) = 30 \\ \frac{x+y}{xy} = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Notăm $x + y = u$ şi $xy = z$. Avem de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} uz = 30 \\ 6u = 5z. \end{cases}$$

Soluţiile sînt $z = \varepsilon 6$ şi $u = \varepsilon 5$, unde $\varepsilon = \pm 1$. Sistemul dat iniţial spre rezolvare devine în acest caz

$$\begin{cases} x + y = \varepsilon 5 \\ xy = \varepsilon 6 \end{cases}$$

care admite soluţiile

$$x = 3,\ y = 2;\ x = 2,\ y = 3;\ x = 1,\ y = -6;\ x = -6,\ y = 1.$$

58. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + 8\ (x^2 + y^2) - 2 = 0 \\ xy = -3 \end{cases}$$

Institutul politehnic, Bucureşti, 1957.

R. Dacă notăm $x + y = u$, atunci $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 + 6$ şi $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 + 6)^2 - 18$.

Înlocuind în prima ecuaţie, obţinem

$$(u^2 + 6)^2 - 18 + 8\ (u^2 + 6) - 2 = 0$$

sau

$$(u^2 + 6)^2 + 8\ (u^2 + 6) - 20 = 0,$$

de unde rezultă

$$u^2 + 6 = -4 \pm \sqrt{36} = -4 \pm 6.$$

Avem deci

$$u^2 + 6 = 2 \text{ sau } u^2 + 6 = -10.$$

care dau

$$u = \pm 2i \text{ și } u = \pm 4i.$$

Sistemul dat se desface astfel în următoarele sisteme

$$\begin{cases} x + y = \pm 2i \\ xy = -3 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x + y = \pm 4i \\ xy = -3. \end{cases}$$

unde $i = \sqrt{-1}$,

ale căror soluții sînt

$(i + \sqrt{2},\ i - \sqrt{2})$; $(i - \sqrt{2};\ i + \sqrt{2})$; $(-i + \sqrt{2};\ -i - \sqrt{2})$
$(-i - \sqrt{2}; -i + \sqrt{2})$; $(3i;\ i)$; $(i;\ 3i)$ $(-3i; -i)$ $(-i; -3i)$;

59. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19 \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

Institutul politehnic, Brașov, 1958

R. Punem $x = zy$, după care sistemul dat devine

$$\begin{cases} y^3 (z^3 - 1) = 19 \\ y^3 (z^2 - z) = 6. \end{cases} \tag{1}$$

Împărțind, membru cu membru, deducem

$$\frac{z^3 - 1}{z(z-1)} = \frac{19}{6}$$

sau

$$6z^2 - 13z + 6 = 0$$

cu rădăcinile

$$z_1 = \frac{2}{3} \text{ și } z_2 = \frac{3}{2}.$$

Introducînd pe rînd pe z_1 și z_2 în ecuația a doua din (1), obținem valorile reale pentru x și y, soluții ale sistemului dat

$$y_1 = -3 \text{ și deci } x_1 = \frac{2}{3} y_1 = -2,$$

$$y_2 = 2 \quad \text{și deci } x_2 = \frac{3}{2} y_2 = 3.$$

60. Să se rezolve și să se discute sistemul

$$\begin{cases} xy + 2x + 2y + a = 0, \\ xy + x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1954.

R. Scăzînd cele două ecuații, obținem

$$x + y + a + 1 = 0.$$

Din aceasta scoatem

$$y = -(x + a + 1),$$

pe care o introducem în ecuația a doua și avem

$$-x(x + a + 1) - a - 1 - 1 = 0,$$

sau

$$x^2 + (a + 1)x + (a + 2) = 0. \qquad (1)$$

Cu soluțiile acestei ecuații formăm soluția sistemului

$$\begin{cases} x = \dfrac{-(a+1) + \varepsilon\sqrt{a^2 - 2a - 7}}{2} \\ y = \dfrac{-(a+1) - \varepsilon\sqrt{a^2 - 2a - 7}}{2}. \end{cases} \qquad \varepsilon = \pm 1$$

Dacă $a < 1 - 2\sqrt{2}$ sau $a > 1 + 2\sqrt{2}$, soluțiile sînt reale și distincte.

Pentru $1 - 2\sqrt{2} < a < 1 + 2\sqrt{2}$ soluțiile sînt imaginare.

Cînd $a = 1 \pm 2\sqrt{2}$, atunci $x = y = -\dfrac{a+1}{2}$.

61. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases}$$

Institutul politehnic, Iași, 1954.

R. După ridicarea la pătrat a ecuației a doua și trecerea unor termeni dintr-un membru în altul, obținem sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}(8 - \sqrt{xy}) \\ x + y = 2(8 - \sqrt{xy}). \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin împărțire, deducem

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

după care obținem

$$2(x^2 + y^2) = (x + y)^2,$$

de unde avem

$$x = y.$$

Soluția sistemului este deci

$$x = 4;\ y = 4.$$

62. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} (x + y - xy)(x^2 + y^2 + 2xy - x^2y^2) = 5 \\ (x + y + xy)(x^2 + y^2 + 2xy + x^2y^2) = 65. \end{cases}$$

Facultatea de matematică și fizică, București, 1955.

R. Notînd $x + y = u$ și $xy = z$, sistemul devine

$$\begin{cases} (u - z)(u^2 - z^2) = 5 \\ (u + z)(u^2 + z^2) = 65. \end{cases}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem, punem $z = tu$ și împărțim membru cu membru. Obținem

$$\frac{(u - tu)(u^2 - t^2u^2)}{(u + tu)(u^2 + t^2u^2)} = \frac{5}{65} = \frac{1}{13}.$$

După simplificarea cu u^3 și cu factorul $1 + t$, ecuația devine

$$\frac{(1 - t)^2}{1 + t^2} = \frac{1}{13},$$

ale cărei soluții sînt

$$t_1 = \frac{2}{3} \text{ și } t_2 = \frac{3}{2}.$$

Pentru $t_1 = \frac{2}{3}$, obținem soluția reală $u = 3$ și $z = 2$, la care corespund soluțiile

$$x = 1,\ y = 2 \text{ și } y = 1,\ x = 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $t_2 = \frac{3}{2}$ obținem soluția reală $u = 2$ și $z = 3$, la care corespund soluțiile complexe

$x = 1 + i\sqrt{2}$; $y = 1 - i\sqrt{2}$ și $x = 1 - i\sqrt{2}$; $y = 1 + i\sqrt{2}$.

63. Să se rezolve și să se discute sistemul

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{6}{x-y} \\ x^4 + y^4 = 2m^2, \end{cases}$$

apoi să se determine m astfel încît, notînd cu P produsul valorilor lui x, să avem

$$\frac{3P}{m+1} < 4\,(3 - m).$$

Institutul politehnic, București, 1955

R. Izolînd radicalul în membrul întîi și ridicînd ambii termeni la pătrat, obținem, după eliminarea numitorilor,

$$(x^2 - y^2) - 13\,(x^2 - y^2) + 36 = 0$$

care conduce la

$$x^2 - y^2 = 9 \text{ sau } x^2 - y^2 = 4.$$

Dintre acestea numai $x^2 - y^2 = 4$ convine, după cum se poate constata prin verificare. În adevăr, membrul întîi al primei ecuații se mai poate scrie și astfel:

$$x + y + \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = x + y + \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x - y} = \frac{(x^2 - y^2) + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - y}.$$

Această din urmă fracție devine $\frac{12}{x-y}$, atunci cînd $x^2 - y^2 = 9$, și $\frac{6}{x-y}$, cînd $x^2 - y^2 = 4$, ceea ce confirmă că numai $x^2 - y^2 = 4$ convine.

Sistemul de rezolvat devine în acest caz

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ x^4 + y^4 = 2m^2. \end{cases}$$

Avînd în vedere că avem

$$x^4 + y^4 = (x^2 - y^2)^2 + 2x^2y^2 = 2m^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

sistemul ia o formă mai simplă și anume

$$\begin{cases} x^2 + (-y^2) = 4, \\ x^2 (-y^2) = 8 - m^2. \end{cases}$$

Ecuația care dă pe x^2 și $-y^2$ este

$$z^2 - 4z + (8 - m^2) = 0,$$

de unde rezultă că valorile pentru x și y sînt date de sistemele

$$\begin{cases} x^2 = \sqrt{m^2 - 4} + 2 \\ y^2 = \sqrt{m^2 - 4} - 2 \end{cases} \qquad (I)$$

și

$$\begin{cases} x^2 = -\sqrt{m^2 - 4} + 2. \\ y^2 = -\sqrt{m^2 - 4} - 2. \end{cases} \qquad (II)$$

În total, opt soluții.

Dacă $-2 < m < 2$, toate soluțiile sînt complexe.

Să examinăm acum cazul cînd $m \leqslant -2$ sau $m \geqslant 2$.

Soluțiile sistemului (II) sînt totdeauna imaginare, pentru că avem $y^2 = -(2 + \sqrt{m^2 - 4}) < 0$.

Soluțiile sistemului (I) dau pentru x valori reale, pentru că

$$x^2 = 2 + \sqrt{m^2 - 4} > 0.$$

Ca să avem și y real, este necesar să avem $\sqrt{m^2 - 4} \geqslant 2$, ceea ce se întîmplă numai dacă $m \geqslant 2\sqrt{2}$. Așadar, sistemul are soluții reale numai în acest din urmă caz.

Produsul rădăcinilor x este $P = 8 - m^2$. Inegalitatea de rezolvat devine astfel

$$\frac{3(8 - m^2)}{m + 1} < 4 (3 - m),$$

sau, după trecerea termenilor din dreapta în partea stîngă și efectuarea reducerilor, avem

$$\frac{m^2 - 8m + 12}{m + 1} < 0.$$

Numărătorul este pozitiv pentru $m < 2$ sau $m > 6$ și negativ cînd $2 < m < 6$, iar numitorul este negativ pentru $m < -1$ și pozitiv pentru $m > -1$. Ținînd seama de aceasta, deducem că fracția este negativă pentru $m < -1$ sau $2 < m < 6$.

Scanned with OKEN Scanner

64. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4\sqrt{a} \\ \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} = (\sqrt{41} - 3)\, a. \end{cases}$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1955

R. Din prima ecuație, ridicată la pătrat, deducem

$$\sqrt{x^2 - y^2} = 8a - x. \tag{1}$$

Introducem această expresie în ecuația a doua și obținem

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a(\sqrt{41} + 5) - x. \tag{2}$$

După ce ridicăm ecuația (2) la pătrat și efectuăm reducerile, deducem

$$x = \frac{a^2(66 + 10\sqrt{41}) - y^2}{2a(\sqrt{41} + 5)}. \tag{3}$$

Din ecuația (1), ridicată la pătrat, se obține

$$x = \frac{64a^2 + y^2}{16a}. \tag{4}$$

Egalînd cele două expresii ale lui x din (3) și (4), obținem ecuația care ne dă pe y

$$\frac{a^2(66+10\sqrt{41})-y^2}{2a(\sqrt{41}+5)} = \frac{64a^2+y^2}{16a} = \frac{a^2(66+10\sqrt{41})-y^2+64a^2+y^2}{2a(\sqrt{41}+5)+16a} = 5a.$$

(Am aplicat o proprietate a șirului de rapoarte egale). De unde,

$$y = \pm 4a.$$

Înlocuind aceasta în (4), obținem

$$x = 5a.$$

Sistemul admite soluțiile

$$x = 5a;\quad y = 4a \text{ și } x = 5a;\quad y = -4a.$$

Ambele soluții verifică sistemul dat.

65. Să se găsească soluțiile pozitive ale sistemului

$$\begin{cases} x(y - z) + y(y + z) = m \\ y(z - x) + z(z + x) = n \\ z(x - y) + x(x + y) = m. \end{cases}$$

Să se examineze cazul $m = 2$ și $n = 7$.

Institutul de petrol și gaze, București, 1955.

R. Scădem ecuația a treia din prima ecuație și obținem

$$xy - xz + y^2 + yz = xz - yz + x^2 + xy,$$

sau

$$(y - x)(x + y + 2z) = 0. \tag{1}$$

Ținînd seama de ecuația (1), sistemul dat se desface în două sisteme de ecuații

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ x(y - z) + y(y + z) = m \\ y(z - x) + z(z + x) = n \end{cases} \tag{I}$$

și

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x(y - z) + y(y + z) = m \\ y(z - x) + z(z + x) = n. \end{cases} \tag{II}$$

Rezolvarea sistemului (I). Substituim $y = x$ în celelalte două ecuații ale sistemului și obținem

$$2x^2 = m \text{ și } 2xz - x^2 + z^2 = n,$$

de unde deducem x și z.

Notînd $\pm 1 = \varepsilon$, soluțiile sistemului (I) sînt

$$x = y = \frac{\varepsilon\sqrt{2m}}{2} \text{ și } z = \frac{-\varepsilon\sqrt{2m} \pm 2\sqrt{m+n}}{2}.$$

Rezolvarea sistemului (II). Substituind $x = -(y + 2z)$ în celelalte două ecuații, obținem sistemul pentru y și z.

$$\begin{cases} 2z^2 = m \\ 2yz + y^2 - z^2 = n. \end{cases}$$

Rezolvîndu-l pe acesta și ținînd seama de $x = -(y + 2z)$, deducem soluțiile sistemului (II), și anume

$$x = -\frac{\varepsilon\sqrt{2m} \pm 2\sqrt{m+n}}{2},$$

$$y = \frac{-\varepsilon\sqrt{2m} \pm 2\sqrt{m+n}}{2},$$

$$z = \frac{\varepsilon\sqrt{2m}}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $m = 2$ și $n = 7$, soluțiile obținute devin $(1; 1; 2)$; $(1; 1; -4)$ $(-1; -1; 4)$; $(-1; -1; -2)$; $(-4; 2; 1)$; $(2; -4; 1)$; $(-2; 4; -1)$; $(4; -2; -1)$. În paranteze sînt puse în ordine valorile lui x, y și z.

66. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 8 \\ x + y + 2z = 20 \\ z^2 - xy = 4. \end{cases}$$

Institutul de transport și căi ferate, București, 1955.

R. Din ecuația a doua avem $x + y = 20 - 2z$. Ridicînd ambii membri la pătrat și ținînd seama de celelalte două ecuații, găsim o ecuație numai în z.

$$8 + 2z^2 + 2(z^2 - 4) = 4(10 - z)^2,$$

ceea ce dă $z = 5$.

Sistemul care dă pe x și y este, în acest caz,

$$x + y = 10; \quad xy = 21,$$

de unde deducem

$$x = 3; \; y = 7 \text{ sau } x = 7; \; y = 3.$$

Soluțiile sistemului sînt, deci,

$$x = 3; \; y = 7; \; z = 5 \text{ și } x = 7; \; y = 3; \; z = 5.$$

67. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} xy = x + y, \\ x^2y^2 - 2(x^2 + y^2) = 0 \end{cases}$$

Institutul politehnic, Brașov, 1961.

R: Notînd $x + y = u$ și $xy = v$, sistemul devine

$$\begin{cases} u = v \\ v^2 = 2(u^2 - 2v) \end{cases}$$

Deducem: $u_1 = 0$; $v_1 = 0$ și $u_2 = 4$; $v_2 = 4$, cărora le corespund soluțiile

$$x = 0; \; y = 0 \text{ și } x = 2; \; y = 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

68. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 18 \\ xy + x^2 + y^2 = 19. \end{cases}$$

Institutul politehnic, Braşov. 1961.

R. Notînd $x + y = u$; $xy = v$, avem de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} u^2 + u - 2v = 18 \\ u^2 - v = 19. \end{cases}$$

Substituind $v = u^2 - 19$ în prima ecuaţie, obţinem soluţiile:

$$u_1 = 4;\ v_1 = -3 \text{ şi } u_2 = 5;\ v_2 = 6,$$

cărora le corespund sistemele în x, y;

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = -3 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x + y = 5. \\ xy = 6. \end{cases}$$

Există, deci, patru soluţii pentru sistemul dat în enunţ; ele sînt:

$$(x = -2 + \sqrt{7};\quad y = -2 - \sqrt{7}),$$

$$(x = -2 - \sqrt{7};\quad y = -2 + \sqrt{7}),\ (x = 2;\ y = 3)$$

şi

$$(x = 3;\ y = 2).$$

69. Să se găsească valorile lui m pentru care sistemul

$$\begin{cases} x + y = 4m - 4 \\ xy + 5x + 5y = 6m^2 - 6 \\ 5xy + 4x + 4y = m^2 - 3m + 2 \end{cases}$$

are soluţii. În caz afirmativ, se va rezolva.

Institutul de industrie uşoară, Iaşi, 1955.

R. Din primele două relaţii deducem

$$x + y = 4(m - 1)$$

$$xy = 2(3m^2 - 10m + 7) = 2(m - 1)(3m - 7).$$

Pentru ca sistemul să fie compatibil, trebuie ca acestea să verifice ecuaţia a treia, ceea ce conduce la

$$5(6m^2 - 20m + 14) + 4(4m - 4) = m^2 - 3m + 2$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$29m^2 - 81m + 52 = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt

$$m_1 = 1 \text{ și } m_2 = \frac{52}{29}.$$

Pentru $m = 1$, sistemul care determină pe x și y devine

$$y + x = 0; \quad xy = 0,$$

cu soluția $x = 0$ și $y = 0$.

Pentru $m = \frac{52}{29}$ avem

$$x + y = 2 \cdot \frac{46}{29} \text{ și } xy = -\frac{46 \cdot 47}{29^2},$$

ale cărei soluții sînt date de ecuația

$$z^2 - 2 \cdot \frac{46}{29} z - \frac{46 \cdot 47}{29^2} = 0,$$

de unde

$$z_1 = \frac{46 + \sqrt{4\,278}}{29} \text{ și } z_2 = \frac{46 - \sqrt{4\,278}}{29}.$$

Sistemul are soluțiile

$$x = \frac{46 \pm \sqrt{4\,278}}{29}; \quad y = \frac{46 \mp \sqrt{4\,278}}{29}.$$

Semnele superioare se corespund.

70. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ u + v = 10 \\ xy = uv \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 200. \end{cases}$$

Institutul tehnic, Craiova, 1955.

R. Ultima ecuație se pune sub forma

$$(x + y)^2 - 2xy + (u + v)^2 - 2uv = 200.$$

Ținînd seama de primele două ecuații, aceasta devine

$$196 - 2xy + 100 - 2uv = 200.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă $xy + uv = 48$, care împreună cu $xy = uv$ ne dă

$$xy = 24 \text{ și } uv = 24.$$

Soluțiile sînt date acum de sistemele

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ xy = 24; \end{cases} \qquad \begin{cases} u + v = 10 \\ uv = 24. \end{cases}$$

Ele sînt

$$x = 12;\ y = 2;\ u = 6;\ v = 4,$$
$$x = 12;\ y = 2;\ u = 4;\ v = 6,$$
$$x = 2;\ y = 12;\ u = 6;\ v = 4,$$
$$x = 2;\ y = 12;\ u = 4;\ v = 6.$$

71. Să se rezolve ecuația

$$\frac{1 - ax}{1 + ax}\sqrt{\frac{5 + ax}{5 - ax}} = 1.$$

Institutul tehnic, Craiova, 1955.

R. Punem $ax = y$, ridicăm la pătrat ambii membri și eliminăm numitorii; obținem

$$(1 + y)^2 (5 - y) = (1 - y)^2 (5 + y),$$

care admite soluțiile $y = 0$ și $y = \pm 3$, date de ecuația $18y - 2y^3 = 0$.

Dintre acestea, singura care convine ecuației este $y = 0$ și căreia îi corespunde $x = 0$.

72. Suma a trei numere în progresie aritmetică este 12. Dacă se adaugă fiecăruia respectiv 1, 2, 11 se obțin trei numere în progresie geometrică. Să se afle aceste numere.

Institutul politehnic, Brașov, 1956.

R. Deoarece suma celor trei numere în progresie aritmetică este 12, ele trebuie să fie $4 - x;\ 4;\ 4 + x$.

Conform enunțului, trebuie ca numerele

$$(4 - x) + 1;\ 4 + 2;\ (4 + x) + 11$$

să fie progresie geometrică, ceea ce ne conduce la ecuația

$$\frac{6}{5 - x} = \frac{15 + x}{6},$$

ale cărei soluții sînt $x_1 = 3$ și $x_2 = -13$.

Scanned with OKEN Scanner

Așadar cele trei numere căutate pot fi

I) 1; 4; 7 sau
II) 17; 4; —9.

73. Trei numere sînt în progresie geometrică. Dacă se mărește al doilea termen cu 32, progresia devine aritmetică, iar dacă se mărește apoi și termenul al treilea cu 576, progresia devine din nou geometrică. Să se găsească cele trei numere.

Institutul de mine, Petroșeni, 1959.

R. Cei trei termeni căutați sînt de forma

$$x,\ xy,\ xy^2.$$

Ținînd seama că x, $xy + 32$, xy^2 sînt în progresie aritmetică, se formează ecuația

$$(xy + 32) - x = xy^2 - (xy + 32),$$

și că x, $xy + 32$, $xy^2 + 576$ sînt în progresie geometrică, mai avem

$$\frac{xy + 32}{x} = \frac{xy^2 + 576}{xy + 32}.$$

Urmează, deci, să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} 2(xy + 32) = x + xy^2 \\ (xy + 32)^2 = x(xy^2 + 576) \end{cases}$$

care este echivalent cu

$$\begin{cases} x(y - 1)^2 = 64 \\ x(9 - y) = 16. \end{cases}$$

Acesta are soluțiile $x = 4$; $y = 5$ și $x = 1$; $y = -7$.

Deci cele trei numere sînt 4, 20, 100 sau 1, —7, 49.

74. Să se demonstreze că expresiile

$$(a + x)^2;\ (a^2 + x^2);\ (a - x)^2$$

sînt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Să se calculeze suma primilor n termeni, primul termen fiind $(a+x)^2$.

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

R. Avem

$$(a^2 + x^2) - (a + x)^2 = (a - x)^2 - (a^2 + x^2) = -2ax$$

ceea ce ne arată că cele trei expresii sînt în progresie aritmetică cu rația $r = -2ax$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă primul termen este $a_1 = (a + x)^2$ și rația fiind $r = -2ax$ atunci avem

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, r = (a + x)^2 - 2ax\,(n - 1).$$

Suma primilor n termeni este dată de expresia

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2} = n\,[(a + x)^2 - ax\,(n - 1)].$$

75. Să se calculeze expresia

$$E = (4\sqrt{3} + 8)\left[\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}} + \ldots\right],$$

demonstrînd în prealabil, că expresia din paranteza mare este suma unei progresii geometrice descrescătoare.

Institutul de petrol și gaze, București, 1955.

R. Termenul al doilea din paranteza mare se simplifică

$$\frac{3 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2.$$

Astfel, dînd factor comun $(\sqrt{3} - 2)$, expresia de calculat devine, în acest caz,

$$E = (4\sqrt{3} + 8)\,(\sqrt{3} - 2)\left[\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots\right]. \qquad (1)$$

Suma din paranteza mare este o progresie geometrică descrescătoare cu rația $\frac{1}{\sqrt{3}}$ și cu un număr nesfîrșit de termeni; valoarea ei, la limită, este

$$\frac{a_1}{1 - q} = \frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{3(\sqrt{3} + 1)}{2}.$$

Înlocuind în (1), obținem

$$E = 4\,(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2) \cdot \frac{3(\sqrt{3} + 1)}{2} = -6\,(1 + \sqrt{3}).$$

Scanned with OKEN Scanner

76. Să se simplifice expresia următoare $(a > 0)$

$$X = \frac{a^{\frac{3}{2}} \frac{1}{1-\sqrt{a}} + a + \frac{a}{1+\sqrt{a}} + \frac{a}{(1+\sqrt{a})^2} + \dots}{\frac{a+3}{a^2+2a-3} + \frac{2-2a}{a^2+2a+1} - 1}.$$

Institutul de construcții, București, 1955.

R. Suma

$$S = a + \frac{a}{1+\sqrt{a}} + \frac{a}{(1+\sqrt{a})^2} + \dots$$

este o progresie geometrică descrescătoare cu un număr nesfîrșit de termeni și cu rația $q = \frac{1}{1+\sqrt{a}}$, mai mică decît unitatea. Limita acestei sume este

$$S = \frac{a}{1 - \frac{1}{1+\sqrt{a}}} = a + \sqrt{a}.$$

Înlocuind valoarea acestei sume în expresia dată, obținem

$$X = \frac{\frac{a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + a + \sqrt{a}}{\frac{a+3}{(a-1)(a+3)} + \frac{2(1-a)}{(a+1)^2} - 1}.$$

După efectuarea simplificărilor și a calculelor indicate, ajungem la rezultatul

$$X = \frac{(a+1)^2(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(a^2+2a-7)}.$$

77. Să se calculeze

a) Suma

$$S = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots + nx^n.$$

b) Termenul general din șirul de numere

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n,$$

unde

$$x_0 = a, \; x_1 = b \text{ și } x_k = \frac{x_{k-2} + x_{k-1}}{2}, \text{ pentru } k \geqslant 2.$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1952.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Suma de calculat se poate descompune în următoarele sume

$$\begin{aligned} &x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + x^n, \\ &\quad + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + x^n, \\ &\quad\quad + x^3 + \ldots + x^{n-1} + x^n, \\ &\quad\quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\quad\quad\quad\quad\quad\quad x^{n-1} + x^n, \\ &\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + x^n. \end{aligned}$$

Fiecare rînd constituie o progresie geometrică cu raţia x şi în care sînt indicaţi primul şi ultimul termen.

Avem deci

$$S = \frac{x^{n+1} - x}{x-1} + \frac{x^{n+1} - x^2}{x-1} + \ldots + \frac{x^{n+1} - x^n}{x-1}$$

sau

$$S = \frac{nx^{n+1} - (x + x^2 + \ldots + x^n)}{x-1} = \frac{nx^{n+1} - \dfrac{x^{n+1} - x}{x-1}}{x-1}.$$

După efectuarea calculelor indicate, obţinem

$$S = \frac{nx^{n+2} - (n+1)\,x^{n+1} + x}{(x-1)^2} = \frac{x}{(x-1)^2}\{x^n[nx - (n+1)] + 1\}.$$

b) Relaţia dată se scrie sub forma

$$x_k - x_{k-1} = -\frac{1}{2}(x_{k-1} - x_{k-2}).$$

Notăm $x_k - x_{k-1} = u_k$. În acest caz avem

$$u_k = -\frac{1}{2}\,u_{k-1},$$

$$u_{k-1} = -\frac{1}{2}\,u_{k-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}\,u_1.$$

Înmulţind membru cu membru şi simplificînd cu expresia comună din ambii membri, obţinem

$$u_k = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}\,u_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem deci

$$x_k - x_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}} \cdot u_1,$$

$$x_{k-1} - x_{k-2} = \frac{(-1)^{k-2}}{2^{k-2}} \cdot u_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_1 - x_0 = u_1$$

Adunînd membru cu membru, deducem

$$x_k - x_0 = u_1\left[1 + \frac{(-1)^1}{2^1} + \frac{(-1)^2}{2^2} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}\right]$$

sau

$$x_k - x_0 = u_1 \frac{\frac{(-1)^k}{2^k} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{2}{3} u_1\left[1 - \frac{(-1)^k}{2^k}\right].$$

Înlocuind $x_0 = a$, $x_1 = b$ și $u_1 = b - a$, obținem

$$x_k = a + \frac{2}{3}(b - a)\left[1 - \frac{(-1)^k}{2^k}\right].$$

78. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \sqrt[y]{9^x} = 243\sqrt[x]{27^y} \\ \sqrt[y]{5^x} = 5\sqrt[y]{25^{1-y}}. \end{cases}$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1952.

R. Sistemul dat se poate înlocui cu următorul sistem echivalent

$$\begin{cases} 3^{\frac{2x}{y}} = 3^5 \cdot 3^{\frac{3y}{x}} \\ 5^{\frac{x}{y}} = 5^1 \cdot 5^{\frac{2(1-y)}{y}}, \end{cases}$$

de unde deducem

$$\begin{cases} \frac{2x}{y} = 5 + \frac{3y}{x} \\ \frac{x}{y} = 1 + \frac{2(1-y)}{y} \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 2x^2 = 5xy + 3y^2 \\ x = 2 - y, \end{cases}$$

ale cărui soluții sînt

$$x = \frac{3}{2}; \quad y = \frac{1}{2} \text{ și } x = -2; \; y = 4.$$

79. Să se rezolve ecuația

$$\lg\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = \lg\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{m}\right) + \lg \frac{m + 10}{\frac{1}{m} + \frac{1}{10}} \qquad (1)$$

și să se discute.

Institutul de petrol și gaze, București, 1952.

R. Ecuația dată se poate scrie astfel

$$\lg 10\left(x + \frac{1}{x}\right) = \lg\left[\frac{m + x}{mx} \cdot \frac{10\,m\,(m + 10)}{m + 10}\right],$$

de unde rezultă ecuația echivalentă ($m \neq -10$)

$$10\left(x + \frac{1}{x}\right) = 10 \cdot \frac{m + x}{x},$$

sau

$$x^2 - x + (1 - m) = 0, \qquad (2)$$

ale cărei rădăcini sînt

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4m - 3}}{2}.$$

Dacă $m < \frac{3}{4}$, ecuația (2) are rădăcini complexe conjugate și prin urmare ecuația (1) nu admite soluții reale.

Pentru $m = \frac{3}{4}$, avem $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.

Pentru $1 > m > \frac{3}{4}$, ecuația (2) are două rădăcini reale distincte și pozitive; prin urmare, ecuația (1) are două rădăcini reale și diferite.

Pentru $m = 1$ ecuația (2) are o rădăcină $x_1 = 0$ și alta $x_2 = 1$ singura care are sens pentru ecuația (1).

Pentru $m > 1$ ecuația (2) are rădăcini distincte și de semne contrare; de aceea ecuația (1) are numai o rădăcină reală.

Scanned with OKEN Scanner

80. Să se afle raţia şi primul termen al unei progresii aritmetice în care termenul al nouălea şi al unsprezecelea sînt daţi de cea mai mare şi cea mai mică rădăcină a ecuaţiei

$$\frac{1}{2}\lg 2 + \lg\sqrt{x^2+4x+5} = \frac{1}{2}\left[\lg(x^2-4x+5)+1\right].$$

Se cere suma a 20 de termeni ai progresiei.

Institutul de petrol şi gaze, Bucureşti, 1952.

R. Ecuaţia dată se înlocuieşte cu următoarea echivalentă

$$\lg\sqrt{2\,(x^2+4x+5)} = \lg\sqrt{(10(x^2-4x+5)}$$

sau

$$10(x^2-4x+5) = 2(x^2+4x+5),$$

care ne conduce la ecuaţia

$$x^2-6x+5=0$$

cu rădăcinile

$$x_1 = 1;\ x_2 = 5.$$

Al nouălea termen al progresiei este $a_9 = 5$, iar al unsprezecelea este $a_{11} = 1$.

Din relaţia $a_9 = a_{11} - 2r$ deducem raţia $r = -2$, şi după aceea, $a_1 = a_9 - 8r = 21$.

Al douăzecilea termen este $a_{20} = a_9 + 11r = -17$ şi, prin urmare, suma primilor 20 termeni este

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20})\,20}{2} = 40.$$

81. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x^3y^2 = a^{13} \\ (\log x)^2 + (\log y)^2 = \dfrac{130}{9}(\log a)^2. \end{cases}$$

Institutul de petrol şi gaze, Bucureşti, 1955.

R. Notăm $\log x = u$; $\log y = v$ şi $\log a = b$. Sistemul dat devine în acest caz

$$3u + 2v = 13b,$$

$$u^2 + v^2 = \frac{130}{9}b^2,$$

care se rezolvă prin substituţie.

Scanned with OKEN Scanner

Obținem soluțiile

$$u_1 = \frac{11b}{3}; \quad v_1 = b \text{ și } u_2 = \frac{7b}{3}; \quad v_2 = 3b,$$

cărora le corespunde soluțiile

$$x_1 = a^3\sqrt[3]{a^2}; \quad y_1 = a \text{ și } x_2 = a^2\sqrt[3]{a}; \quad y_2 = a^3.$$

82. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \log_3 \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{y}} + \log_3 \dfrac{\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{5}{3} \\ x^2 + y^2 = 738. \end{cases}$$

Institutul politehnic, Timișoara, 1958.

R. Prima ecuație se transformă succesiv, astfel

$$\log_3 \left(\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{y}} \cdot \frac{\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[3]{x}} \right) = \frac{5}{3}; \quad \frac{\sqrt[4]{(xy)^3}}{\sqrt[3]{xy}} = 3^{\frac{5}{3}},$$

$$(xy)^{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{5}{3}}; \quad (xy)^{\frac{5}{12}} = 3^{\frac{5}{3}}; \quad xy = 3^{\frac{5}{3}\cdot\frac{12}{5}},$$

de unde rezultă $xy = 81$.

Astfel, sistemul dat este înlocuit prin

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 738 \\ xy = 81, \end{cases}$$

care are soluțiile (3; 27); (27, 3); (—3; —27); (—27; —3). Soluțiile pentru care logaritmii au sens sînt

$$x = 27 \text{ și } y = 3 \text{ sau } x = 3 \text{ și } y = 27.$$

83. Să se arate că ecuația

$$x^5 - 55x + 21 = 0$$

are două rădăcini al căror produs este egal cu 1. Să se calculeze aceste două rădăcini.

Facultatea de matematică-mecanică, Cluj, 1962.

R. Trebuie demonstrat că polinomul $P(x) \equiv x^5 - 55x + 21$ se divide printr-un polinom de forma $Q(x) \equiv x^2 + ax + 1$. Efectuînd împărțirea $P(x)$ la $Q(x)$ găsim cîtul

$$C(x) \equiv x^3 - ax^2 + (a^2 - 1)x + 2a - a^3 \text{ și restul } R(x) \equiv$$

$$\equiv (a^4 - 3a^2 - 54)x + (a^3 - 2a + 21).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece una dintre rădăcinile ecuației $a^4 - 3a^2 - 54 = 0$, $a = -3$, anulează și pe $a^3 - 2a + 21$, rezultă că $Q(x) \equiv x^2 - 3x + 1$, iar cele două rădăcini, al căror produs este 1, sînt date de ecuația

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Aceste rădăcini sînt $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

84. Știind că $y = \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}}$ și $z = \frac{a^{4x} + a^{-4x}}{a^{4x} - a^{-4x}}$, să se arate că între y și z avem următoarea dependență funcțională

$$y = \frac{\sqrt[4]{z+1} + \sqrt[4]{z-1}}{\sqrt[4]{z+1} - \sqrt[4]{z-1}}.$$

Facultatea de mecanică, Timișoara, 1957.

R. Avem $z + 1 = \frac{2a^{4x}}{a^{4x} - a^{-4x}}$ și $z - 1 = \frac{2a^{-4x}}{a^{4x} - a^{-4x}}$ de unde rezultă

$$\frac{\sqrt[4]{z+1} + \sqrt[4]{z-1}}{\sqrt[4]{z+1} - \sqrt[4]{z-1}} = \frac{a^x \sqrt[4]{\frac{2}{a^{4x} - a^{-4x}}} + a^{-x} \sqrt[4]{\frac{2}{a^{4x} - a^{-4x}}}}{a^x \sqrt[4]{\frac{2}{a^{4x} - a^{-4x}}} - a^{-x} \sqrt[4]{\frac{2}{a^{4x} - a^{-4x}}}}.$$

Simplificînd cu $\sqrt[4]{\frac{2}{a^{4x} - a^{-4x}}}$, obținem $\frac{\sqrt[4]{z+1} + \sqrt[4]{z-1}}{\sqrt[4]{z-1} - \sqrt[4]{z-1}} = \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}}$,

ceea ce demonstrează afirmația din enunț.

B. Exerciții și probleme urmate de răspunsuri și indicații

Școala de poduri și șosele București, Școala politehnică București și Școala politehnică Timișoara, anii 1895—1945

85. Să se determine constantele a, b, c, astfel, încît polinomul

$$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + x^2 + x + 1$$

să se dividă cu $(x - 1)^3$.

R. Se va scrie că restul împărțirii polinomului prin $(x - 1)^3$ este identic nul; se obține $a = -10$; $b = 26$ și $c = -19$.

86. Să se descompună în factori polinomul

$$3x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 10x + 4.$$

R. Divizorul 2 al termenului liber 4 anulează polinomul. Polinomul admite ca factor pe $x-2$; celălalt factor este

$$3x^3 + x^2 - 6x - 2 = x^2(3x + 1) - 2(3x + 1) = (x^2 - 2)(3x + 1).$$

Descompunerea polinomului are forma

$$(x - 2)\,(x - \sqrt{2})\,(x + \sqrt{2})\,(3x + 1).$$

87. Să se arate că $b^2 - 4ac$ este un pătrat perfect dacă $a + 2b + 4c = 0$ sau $9a + 3b + c = 0$.

R. În cazul $a + 2b + 4c = 0$, $b^2 - 4ac$ devine

$$b^2 + 4c\,(2b + 4c) = (b + 4c)^2$$

și în al doilea caz avem

$$b^2 - 4ac = b^2 + 4\,(9a + 3b)\,a = (b + 6a)^2.$$

88. Să se simplifice expresia

$$\frac{1 - \frac{1}{x}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 1}.$$

R. $x(x - 1)$.

89. Să se determine a, b, c astfel, încît să avem următoarea identitate

$$\frac{x + a}{(x - 2)^2} - \frac{x + b}{x^2 - 4} + \frac{x + c}{(x + 2)^2} = \frac{1}{x + 2}.$$

R. Prin eliminarea numitorilor, obținem o nouă identitate, care fiind adevărată pentru orice x, va fi verificată și de valorile particulare $x = -2$; $x = 0$ și $x = 2$, ceea ce ne dă $a = -2$; $b = 2$ și $c = 2$.

90. Să se facă rațional numitorul fracției

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}.$$

R. $\frac{\sqrt{30}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Scanned with OKEN Scanner

91. Se consideră funcția $y(x) = x^2 - x$ și se notează cu $y(a)$ rezultatul înlocuirii în funcția $y(x)$ a lui x prin a. Să se verifice indentitățile

$$y\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right) + y\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3},$$

$$y(0) + 3y\left(\frac{1}{3}\right) + 3y\left(\frac{2}{3}\right) + y(1) = -\frac{4}{3}.$$

R. Se efectuează calculele indicate de membrii întîi ai egalităților.

92. Să se efectueze următorul calcul pînă la cea mai simplă expresie

$$\frac{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x}\sqrt[8]{y} + \sqrt[4]{xy} + \sqrt[8]{y^3}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{y}} : \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{y} + \sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[8]{y}}.$$

R. Se înmulțește prima fracție cu a doua răsturnată și se găsește rezultatul

$$\frac{x - \sqrt{y}}{x + \sqrt{y}}.$$

93. Să se efectueze următorul calcul

$$\sqrt[4]{a^3b}\cdot\sqrt[3]{abc}\cdot\sqrt{\frac{a^2b^3c^5}{d^3}} : \left(\sqrt[6]{\frac{bc}{a^4}}\cdot\sqrt[12]{ab^3c^7}\right).$$

R. Se transformă radicalii în puteri cu exponenți fracționari și se găsește rezultatul

$$\frac{a^2c^2b\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b^2}\sqrt[12]{c}}{d\sqrt{d}}.$$

94. Să se efectueze următorul calcul

$$\frac{x - \sqrt[3]{y^2} - \sqrt{z} + 2\sqrt[12]{y^4z^3}}{x + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt{z} - 2\sqrt[6]{x^3y^2} + 2\sqrt[4]{x^2z} - 2\sqrt[12]{y^4z^3}} : \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{z}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{z}}.$$

R. Se pune $x = u^2$; $y = v^3$ și $z = t^4$; după descompunerea în factori și simplificări, obținem rezultatul

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} - \sqrt[4]{z}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{z}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

95. Să se simplifice expresia

$$\frac{x^2+y+\sqrt[3]{z^2}-2x\sqrt{y}+2x\sqrt[3]{z}-2\sqrt[6]{y^3z^2}}{x^2-y-\sqrt[3]{z^2}+2\sqrt[6]{y^3z^2}}.$$

R. Se pune $y=t^2$ și $z=u^3$; se găsește rezultatul

$$\frac{x-\sqrt{y}+\sqrt[3]{z}}{x+\sqrt{y}-\sqrt[3]{z}}.$$

96. Să se rezolve ecuația

$$3x^3+7x^2-15x-35=0.$$

R. Membrul întîi se descompune în factori și avem

$$P(x)=3x(x^2-5)+7(x^2-5)=(3x+7)(x^2-5)=0.$$

Rădăcinile sînt

$$x_1=-\frac{7}{3},\quad x_2=-\sqrt{5},\quad x_3=\sqrt{5}.$$

97. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1.$$

R. $x=\frac{16}{25}$.

98. Se consideră sistemul de ecuații

$$\begin{cases} y=2(x-a) \\ 2(y-1)+x=0, \end{cases} \tag{1}$$

în care a este o constantă oarecare. Se cere

a) să se rezolve sistemul;

b) să se determine cea mai mică valoare pozitivă a constantei a, cu condiția ca soluțiile sistemului (1) să fie numere întregi;

c) constanta a astfel determinată, să se reprezinte grafic ecuațiile date.

R. a) $x=\frac{4a+2}{5}$; $y=\frac{4-2a}{5}$.

b) Se scrie $x=a+\frac{2-a}{5}$; pentru ca x să fie întreg trebuie ca $2-a$ să se dividă prin 5; de unde rezultă că cea mai mică valoare a lui a, pentru care obținem x întreg, este 2. În acest caz, avem $x=2$ și $y=0$.

c) Ecuațiile reprezintă drepte.

Scanned with OKEN Scanner

99. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x - ay + a^2z - a^3 = 0 \\ x - by + b^2z - b^3 = 0 \\ x - cy + c^2z - c^3 = 0. \end{cases}$$

R. $x = abc$; $y = ab + ac + bc$; $z = a + b + c$.

100. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \\ \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2} = \frac{1}{d} \\ \frac{x}{a^3} + \frac{y}{b^3} + \frac{z}{c^3} = \frac{1}{d^3}. \end{cases}$$

R. $x = \frac{a^3(d-b)(d-c)}{d^2(a-b)(a-c)}$; $y = \frac{b^3(d-c)(d-a)}{d^2(b-c)(b-a)}$ și $z = \frac{c^3(d-a)(d-b)}{d^2(c-a)(c-b)}$.

101. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} xy(x + y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

R. Se adună la ecuația a doua, prima înmulțită cu 3; obținem $(x+y)^3=125$. Din $x+y=5$ și $xy(x+y) = 30$, deducem soluțiile

$$x = 2;\ y = 3 \text{ și } x = 3;\ y = 2.$$

102. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} y^2 - x^2 + x + y = 18 \\ x(x + y) = 12. \end{cases}$$

R. Se substituie $y = \frac{12}{x} - x$. Soluțiile sînt

$$x = 2;\ y = 4 \text{ și } x = -\frac{12}{7};\ y = -\frac{37}{7}.$$

103. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x(x + 1) = a(x + y + 1) \\ y(y + 1) = b(x + y + 1). \end{cases}$$

R. Se scad ecuațiile și se obține

$$(x - y)(x + y + 1) = (a - b)(x + y + 1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul se desface în

$$x + y + 1 = 0;\ x(x+1) = 0$$

și

$$x - y = a - b;\ x(x+1) = a(x+y+1).$$

Soluțiile sînt

$$x = 0;\ y = -1 \text{ și } x = -1;\ y = 0;$$

$$x = \frac{1}{2}(2a - 1 \pm \sqrt{4ab+1}) \text{ și } y = \frac{1}{2}(2b - 1 \pm \sqrt{4ab+1}).$$

104. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + x - y = 20 \\ x^2 + xy + y^2 = 19. \end{cases}$$

R. Prima ecuație se mai scrie

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 20;$$

ținînd seama de ecuația a doua, sistemul se reduce la

$$x - y = 1 \text{ și } xy = 6.$$

Soluțiile sînt

$$x = 3;\ y = 2 \text{ și } x = -2;\ y = -3.$$

105. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + z = 23 \\ xy + yz + zx = 107 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 110. \end{cases}$$

R. Din prima ecuație deducem

$$x + y + z = 23 - x.$$

Ridicăm la pătrat ambii termeni și ținînd seama de celelalte ecuații, deducem $x = 5$ și $x = 41$.

Soluțiile sînt

$$x = 5,\ y = 6,\ z = 7;\ x = 5,\ y = 7,\ z = 6$$

și $x = 41,\ y,\ z = \dfrac{-59 \pm i\sqrt{6623}}{2}$.

106. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 29 \\ x + y + z = 9 \\ xy = 12. \end{cases}$$

R. Adunăm $2xy = 24$ la prima ecuație, și după ce înlocuim $x + y = 9 - z$, obținem

$$z^2 - 9z + 14 = 0.$$

Soluțiile sînt

$$x = 3;\ y = 4;\ z = 2 \text{ și } x = 4;\ y = 3;\ z = 2;$$

$$x = 1 + i\sqrt{11};\quad y = 1 - i\sqrt{11};\quad z = 7$$

și

$$x = 1 - i\sqrt{11};\quad y = 1 + i\sqrt{11};\quad z = 7.$$

107. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + y^2 - x + y + z = -4 \\ x^2 - y^2 - 2y = 1 \\ y - z = 1. \end{cases}$$

R. Din ecuația a doua deducem $x = \pm(y + 1)$ și din a treia $z = y - 1$, pe care le înlocuim în prima ecuație. Obținem soluțiile

$$(1;\ 0;\ -1);\ (2;\ 1;\ 0);\ (-1,\ -2,\ -3);\ (-1,\ 0,\ -1);$$
$$(1,\ -2,\ -3);\quad (2,\ -3,\ -4).$$

108. Să se rezolve inecuația

$$\frac{3x^2 - 2x + 1}{2x + 3} < 0.$$

R. $x < -\frac{3}{2}$.

109. Pentru ce valori ale lui x avem

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} < 0.$$

R. $1 < x < 2$ sau $3 < x < 4$.

110. Să se rezolve inecuația

$$\frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 15x + 54} < 0.$$

R. $3 < x < 6$ sau $7 < x < 9$.

Scanned with OKEN Scanner

111. Să se rezolve inecuaţia

$$1 - \frac{x-5}{x+1} > \frac{x}{x-1}.$$

R. Trecem totul în membrul întîi şi efectuăm reducerile respective, fără a elimina numitorii. Inegalitatea devine

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1} < 0.$$

Soluţiile sînt

$$-1 < x < 1 \text{ sau } 2 < x < 3.$$

112. Să se rezolve inecuaţia

$$x + \frac{4}{x} > \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 1}.$$

R. Inecuaţia devine $\frac{x^2 - 4}{x(x-1)} > 0$. Soluţiile sînt

$$x < -2 \text{ sau } 0 < x < 1 \text{ sau } x > 2.$$

113. Dacă a, b, c, d sînt patru numere în progresie geometrică, să se arate că avem

$$a^2 + d^2 > b^2 + c^2.$$

R. Se calculează

$$E = a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = a^2(1 + q^6 - q^2 - q^4) =$$

$$= a^2[q^2(q^4 - 1) - (q^4 - 1)] = a^2 (q^2 - 1)^2 (q^2 + 1) > 0,$$

unde q este raţia progresiei. Deducem $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$.

114. Se dau două numere pozitive $a < b$ şi se înseamnă

$$A = (a + b) : 2, \; G = \sqrt{ab}, \; H = 2ab : (a + b).$$

Să se stabilească inegalităţile

1) $A > G > H$,
2) $A - G > G - H$,
3) $A - G < (b - a)^2 : 8a$,
4) $A - H < (b - a)^2 : 4a$.

R. 1) Avem

$$A - G = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}; \quad G - H = \frac{\sqrt{ab}\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a + b},$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă

$$A > G > H.$$

2) Calculăm

$$(A - G) - (G - H) = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^4}{2(a+b)};$$

deducem

$$A - G > G - H.$$

3) Avem

$$\frac{(b-a)^2}{8a} - (A - G) = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{8a}(\sqrt{b} - \sqrt{a})(3\sqrt{a} + \sqrt{b});$$

rezultă

$$A - G < \frac{(b-a)^2}{8a}.$$

4) Avem

$$\frac{(b-a)^2}{4a} - (A - H) = \frac{(b-a)^3}{4a(a+b)};$$

rezultă

$$A - H < \frac{(b-a)^2}{4a}.$$

115. Să se rezolve inecuaţia

$$\frac{5x^2 + 3x - 5}{x^2 - 1} > \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 + 1}.$$

R. Inecuaţia devine

$$\frac{2x^2(2x^2 + 3x - 2)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} > 0.$$

Soluţiile sînt

$$x < -2 \text{ sau } -1 < x < \frac{1}{2} \text{ sau } x > 1.$$

116. Să se rezolve inecuaţia

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} > \frac{2x^2 + 3x - 2}{x - 1}.$$

R. După efectuarea reducerilor, fără a elimina numitorii, obţinem

$$\frac{x(x^2 + 9x - 4)}{x^2 - 1} < 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţiile sînt

$$x < \frac{-9-\sqrt{97}}{2} \text{ sau } -1 < x < 0 \text{ sau } \frac{-9+\sqrt{97}}{2} < x < 1.$$

117. Să se rezolve inecuaţia

$$27x + \frac{25}{2x+1} > \frac{72x^2 - 49x - 13}{x^2 - 1}.$$

R. După ce se trece totul în membrul întîi, se fac reducerile şi se descompun în factori numărătorul şi numitorul, inecuaţia devine

$$\frac{3(x-2)(3x+2)(2x-1)(3x-1)}{(2x+1)(x-1)(x+1)} > 0.$$

Soluţiile sînt

$$-1 < x < -\frac{2}{3}, \text{ sau } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$$

sau

$$\frac{1}{2} < x < 1 \text{ sau } x > 2.$$

118. Se dă ecuaţia de gradul al doilea

$$x^2 + 2(3y-2)x + y^2 - 4y + 20 = 0$$

şi se cere

a) dacă x este necunoscută, iar y un parametru, să se discute realitatea rădăcinilor, după valorile parametrului y;

b) dacă y este necunoscută, iar x un parametru, să se discute realitatea rădăcinilor, după valorile parametrului x.

R. a) Discriminantul este

$$\Delta = 8(y+1)(y-2).$$

Dacă $y < -1$ sau $y > 2$, rădăcinile x sînt reale şi diferite, iar pentru $-1 < y < 2$, rădăcinile x sînt imaginare. Pentru $y = -1$ sau $y = 2$ rădăcinile x sînt egale.

b) Discriminantul este

$$\Delta = 8(x-2)(x+1);$$

pentru $x < -1$ sau $x > 2$ rădăcinile y sînt reale şi diferite, iar pentru $-1 < x < 2$, rădăcinile y sînt imaginare.

Cînd $x = -1$ sau $x = 2$, rădăcinile y sînt confundate.

Scanned with OKEN Scanner

119. Se consideră polinoamele

$$y(x) = (x - 2) - \frac{3}{2}$$

și

$$Y(x) = (x - 2)^2 - 3(x - 2) + \frac{3}{2}.$$

a) Să se arate că, dacă x' și x'' sînt rădăcinile ecuației $Y(x)=0$, avem relația

$$y(x') + y(x'') = 0.$$

b) Să se arate că însemnînd cu m un număr oarecare, pozitiv sau negativ, avem relațiile

$$y\left(\frac{7}{2} + m\right) + y\left(\frac{7}{2} - m\right) = 0, \quad Y\left(\frac{7}{2} + m\right) - Y\left(\frac{7}{2} - m\right) = 0.$$

c) Să se reprezinte grafic, în raport cu două axe rectangulare Ox, Oy, funcțiile $y(x)$ și $Y(x)$ de mai sus, cînd x variază între 2 și 5.

d) Să se demonstreze că ecuația

$$(x - 2) - \frac{3}{2} + k\left[(x - 2)^2 - 3(x - 2) + \frac{3}{2}\right] = 0,$$

în care k este un număr oarecare, are rădăcinile reale.

Să se arate că una din aceste rădăcini este cuprinsă între rădăcinile x' și x'' ale ecuației

$$(x - 2)^2 - 3(x - 2) + \frac{3}{2} = 0.$$

R. a) Se observă că $y^2(x) = Y(x) + \frac{3}{4}$, de unde rezultă $y^2(x') = y^2(x'') = \frac{3}{4}$, și pentru că $y(x') \neq y(x'')$ urmează că $y(x') + y(x'') = 0$.

b) Se verifică prin calcul direct.

c) Prima ecuație reprezintă segmentul de dreaptă care unește punctele $A\left(2, -\frac{3}{2}\right)$, $B\left(5, \frac{3}{2}\right)$, iar a doua, arcul de parabolă ce trece prin punctele $A'\left(2, \frac{3}{2}\right)$, $B'\left(5, \frac{3}{2}\right)$ și al cărui vîrf are coordonatele $\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

d) Pentru a demonstra realitatea rădăcinilor, se calculează discriminantul. Dacă notăm cu $f(x)$ membrul întîi al ecuației, găsim

$$f(x')f(x'') = y(x')\,y(x'') = -y^2(x') < 0,$$

de unde rezultă că $f(x) = 0$ are o rădăcină cuprinsă între x' și x''.

120. Se dă ecuația $ax^2 + x + 2 = 0$ cu rădăcinile x' și x''.

a) Se cere să se formeze ecuația de gradul al doilea care are rădăcinile $y' = \frac{1}{x'+1}$ și $y'' = \frac{1}{x''+1}$.

b) Să se determine a astfel ca ecuația de gradul a doilea formată să aibă rădăcinile egale.

R. a) $(a+1)y^2 + (1-2a)y + a = 0$. b) $a = \frac{1}{8}$.

121. Să se rezolve ecuația

$$\frac{x^2 - a^2}{a+1} - \frac{2x-2}{a^2-1} + a = 1,$$

unde a este un număr oarecare. Să se determine apoi a, astfel ca suma pătratelor rădăcinilor acestei ecuații să fie egală cu 5.

R. 1) x_1 și x_2 sînt date de ecuația

$$(a-1)x^2 - 2x + 3 - a = 0.$$

2) $a = -1$ sau $a = \frac{5}{3}$.

122. Să se formeze ecuația de gradul al doilea ale cărei rădăcini x_1 și x_2 satisfac relațiile următoare

$$4x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 4 = 0;\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) = \frac{1}{1+a},$$

a fiind un număr presupus cunoscut.

b) Să se determine a astfel ca suma pătratelor rădăcinilor ecuației formate să fie egală cu 11.

c) Să se verifice, calculînd rădăcinile.

R. a) Din relațiile date se calculează

$$x_1x_2 = \frac{4-a}{a+1} \text{ și } x_1 + x_2 = \frac{4}{a+1}.$$

Ecuația cerută este

$$(a+1)x^2 - 4x + (4-a) = 0.$$

b) $a = -3$ sau $a = -\frac{1}{9}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Se calculează suma pătratelor rădăcinilor ecuațiilor care corespund valorilor $a = -3$ și $a = -\frac{1}{9}$. În ambele cazuri se găsește această sumă egală cu 11.

123. Se dă ecuația

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

cu rădăcinile x_1, x_2 și se cere

a) să se formeze ecuația de gradul al doilea cu rădăcinile

$$y_1 = x_1^2 - \frac{8}{x_1^2},\ y_2 = x_2^2 - \frac{8}{x_2^2}.$$

b) Dîndu-se

$$y_1 = -7,\ y_2 = 2,$$

să se rezolve ecuația (1).

R. a) Se calculează

$$y_1 y_2 = \frac{q^4 - 8p^4 + 32p^2q - 16q^2 + 64}{q^2}$$

și

$$y_1 + y_2 = \frac{(p^2 - 2q)(q^2 - 8)}{q^2}.$$

Ecuația căutată este deci

$$q^2y^2 - (p^2 - 2q)(q^2 - 8)\,y + q^4 - 8p^4 + 32p^2q - 16q^2 + 64 = 0.$$

b) Pentru $y_1 = -7$ avem $x_1^2 - \frac{8}{x_1^2} = -7$ și pentru $y_2 = 2$ avem $x_2^2 - \frac{8}{x_2^2} = 2$, care ne dau rădăcinile ecuației (1). Sînt posibile 16 soluții.

124. Se dă ecuația $x^2 + ax + 2 = 0$ cu rădăcinile x_1 și x_2. Se cere să se formeze ecuația de gradul al doilea cu rădăcinile y_1 și y_2, date de relațiile

$$y_1 = 2 - \frac{1}{x_1^3 - 7} \text{ și } y_2 = 2 - \frac{1}{x_2^3 - 7}.$$

Să se determine a astfel încît ecuația în y să admită rădăcina $y_1 = 1$.

R. a) Se calculează

$$y_1 y_2 = \frac{30a^3 - 180a + 257}{7a^3 - 42a + 57} \text{ și } y_1 + y_2 = \frac{29a^3 - 174a + 242}{7a^3 - 42a + 57}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația căutată este

$$(7a^3 - 42a + 57)y^2 - (29a^3 - 174a + 242)y + \\ + 30a^3 - 180a + 257 = 0.$$

b) Scriem că $y = 1$ verifică ecuația găsită. Obținem

$$a^3 - 6a + 9 = 0,$$

ceea ce dă

$$a_1 = -3 \text{ și } a_{2,3} = \frac{1}{2}(3 \pm i\sqrt{3}).$$

125. Dîndu-se ecuația $x^2 - ax + b = 0$, cu rădăcinile x_1 și x_2 se cere să se formeze o altă ecuație de gradul al doilea cu rădăcinile y_1 și y_2, astfel încît să avem

$$y_1 = 1 + \frac{1}{1 + x_1^2}, \quad y_2 = 1 + \frac{1}{1 + x_2^2}.$$

R. $[(b-1)^2+a^2]y^2+[2(b-1)(2-b)-3a^2]y+[(b-2)^2+2a^2]=0.$

126. Se dă ecuația

$$x^2 - (2m - 1)x + (4m^2 - 10m - 5) = 0.$$

Să se discute cu ajutorul realizantului natura rădăcinilor cînd parametrul m variază de la $-\infty$ la $+\infty$.

R. $m < -\frac{1}{2}$ rădăcini complexe; $m = -\frac{1}{2}$, $x' = x'' = -1$;

$-\frac{1}{2} < m < \frac{5-3\sqrt{5}}{4}$,

$x' < 0$, $x'' < 0$; $m = \frac{5-3\sqrt{5}}{4}$, $x' < 0$, $x'' = 0$; $\frac{5-3\sqrt{5}}{4} < m < \frac{1}{2}$,

$x' < 0$, $x'' > 0$, $|x'| > |x''|$; $m = \frac{1}{2}$, $x' = -x''$; $\frac{1}{2} < m < \frac{5+3\sqrt{5}}{4}$,

$x' < 0$, $x'' > 0$, $|x'| < |x''|$; $m = \frac{5+3\sqrt{5}}{4}$, $x' = 0$, $x'' > 0$;

$\frac{5+3\sqrt{5}}{4} < m < \frac{7}{2}$, $x' > 0$, $x'' > 0$; $m = \frac{7}{2}$, $x' = x'' = 3$; $m > \frac{7}{2}$,

rădăcini complexe

127. O progresie geometrică are 10 termeni, primul fiind 3, iar ultimul 1 536. Se cere rația și suma termenilor ei.

R. $r = 2$; $S = 3\,069$.

Scanned with OKEN Scanner

128. Se dau numerele a și b. Se cere să se determine alte două numere x și y, știind că numerele $-a$, x, y, sînt în progresie aritmetică, iar numerele x, y, b în progresie geometrică.

R. $x = \frac{1}{8}(b - 4a \pm \sqrt{b^2 - 8ab})$, $y = \frac{1}{4}(b \pm \sqrt{b^2 - 8ab})$,

129. Dacă numerele $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ sînt în progresie aritmetică, să se arate că și numerele a^2, b^2, c^2 sînt în progresie aritmetică.

R. Din relația

$$\frac{2}{c+a} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}$$

se deduce

$$2b^2 = a^2 + c^2.$$

130. Dacă numerele $\frac{1}{b-a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b-c}$ sînt în progresie aritmetică, să se arate că numerele a, b, c sînt în progresie geometrică.

R. Din relația

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c}$$

se deduce $b^2 = ac$.

131. Într-o progresie aritmetică, primul termen este a, rația r iar numărul termenilor este $2n$.

Să se calculeze raportul $\frac{A}{B}$, unde A este suma primilor n termeni, iar B suma ultimilor n termeni.

Caz particular: $a = 1$, $r = 2$, $2n = 100$.

R. $\frac{A}{B} = \frac{2a + (n-1)r}{2a + (3n-1)r}$; în cazul particular, $\frac{A}{B} = \frac{1}{3}$.

132. Într-o progresie geometrică, primul termen adunat cu termenul al cincilea ne dau o sumă egală cu 5, iar termenul al treilea este egal cu 2. Să se afle primul termen și rația. Să se scrie apoi primii cinci termeni din progresie.

R. $a_1 = 1$, $q = \pm\sqrt{2}$; primii cinci termeni sînt $1; \pm\sqrt{2}; 2; \pm 2\sqrt{2}; 4$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

GEOMETRIE

A. Exerciții și probleme rezolvate

133. Se dă triunghiul isoscel ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$) și fie $\overline{AH}$ înălțimea din vîrful A, iar P un punct pe baza BC; perpendiculara în P pe bază întîlnește laturile AB și AC (eventual prelungite), respectiv în M și N. Se cere să se arate:

a) că triunghiul AMN este isoscel;

b) $\overline{AH} = \frac{\overline{MP} + \overline{NP}}{2}$; să se deducă de aici că suma $\overline{MP} + \overline{NP}$ este constantă, cînd P se mișcă pe BC;

c) care este locul geometric al mijlocului segmentului $\overline{MN}$.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1951.

R. a) Înălțimea AH (fig. 2) împarte unghiul A în două părți egale. Dreapta PNM este paralelă cu AH, de unde rezultă egalitatea unghiurilor

$$\hat{M}_1 = \hat{A}_3;\ \hat{N}_2 = \hat{A}_4,$$

și pentru că avem $\hat{A}_3 = \hat{A}_4$, deducem că $\hat{M}_1 = \hat{N}_2$. Prin urmare triunghiul MAN este isoscel.

b) Perpendiculara dusă din A pe dreapta MN trece prin mijlocul E al segmentului $\overline{MN}$; de asemenea avem

$$\overline{AH} = \overline{PN} + \overline{NE}$$

și

$$\overline{AH} = \overline{MP} - \overline{ME}.$$

Adunînd, obținem

$$2\overline{AH} = \overline{MP} + \overline{NP}$$

sau

$$\overline{AH} = \frac{\overline{MP} + \overline{NP}}{2}.$$

Suma $\overline{MP} + \overline{NP}$ este constantă, pentru că segmentul $2\overline{AH}$ rămîne constant.

Scanned with OKEN Scanner

c) Din egalitatea $\overline{AH} = \overline{PN} + \overline{NE} = \overline{PE}$ rezultă că punctul E rămîne mereu la aceeași distanță $\overline{AH}$ de baza BC. Locul lui E este deci perpendiculara în A pe dreapta AH.

134. Se consideră două cercuri O_1 și O_2 și coarda comună AB. Notînd cu M și N punctele diametral opuse lui A pe cercul O_1 respectiv pe O_2, să se demonstreze că punctele M, B și N sînt coliniare.

Institutul de construcții, București, 1952.

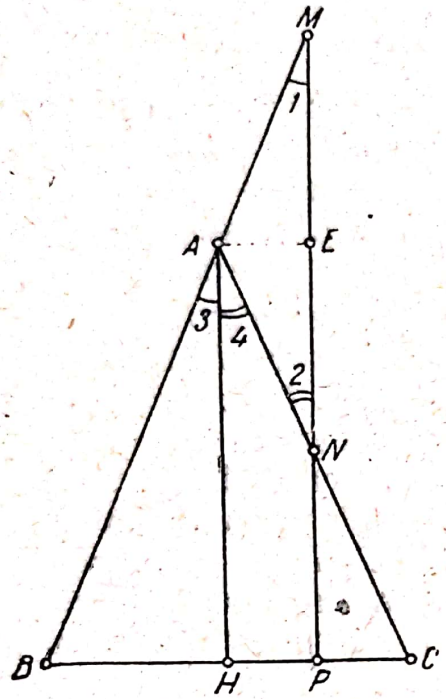


Fig. 2

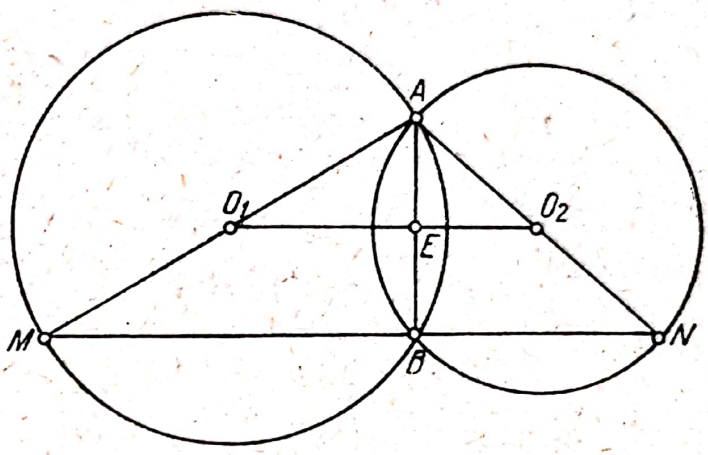


Fig. 3

R. O_1 și O_2 fiind mijloacele lui $\overline{AM}$ și $\overline{AN}$, cele două drepte O_1O_2 și MN sînt paralele (fig. 3).

Deoarece O_1O_2 este perpendiculară pe AB, la fel și MN va fi perpendiculară pe AB.

Rezultă că punctul B — intersecția lui MN cu AB — va fi pe cercul O_1, deoarece din el se vede diametrul AM sub un unghi drept; de asemenea, pentru același motiv el se găsește și pe cercul O_2, deci el se găsește la intersecția celor două cercuri.

Rezultă că punctele M, B și N sînt coliniare.

Altfel, dacă se notează cu B' punctul unde coarda comună AB întîlnește pe MN, vom avea

$$\overline{AE} = \overline{EB'};$$

astfel punctul B' coincide cu B.

135. În triunghiul ABC fie O punctul de întîlnire a mediatoarelor; H ortocentrul; A', B', C' mijloacele laturilor BC, AC, AB; A'', B'', C'' mijloacele segmentelor AH, BH, CH. Să se de-

monstreze că $\overline{A'A''} = \overline{B'B''} = \overline{C'C''}$ și că segmentele $\overline{A'A''}$, $\overline{B'B''}$, $\overline{C'C''}$, $\overline{OH}$ sînt concurente într-un punct care este situat la mijlocul fiecăruia.

Institutul de petrol și gaze, București, 1952.

R. Unim A'' cu C', mijlocul laturii AB, și C' cu A' mijlocul laturii BC (fig. 4).

Triunghiul $A''C'A'$ este dreptunghi pentru că $A''C'$ este paralelă cu BH, iar $A'C'$ este paralelă cu AC.

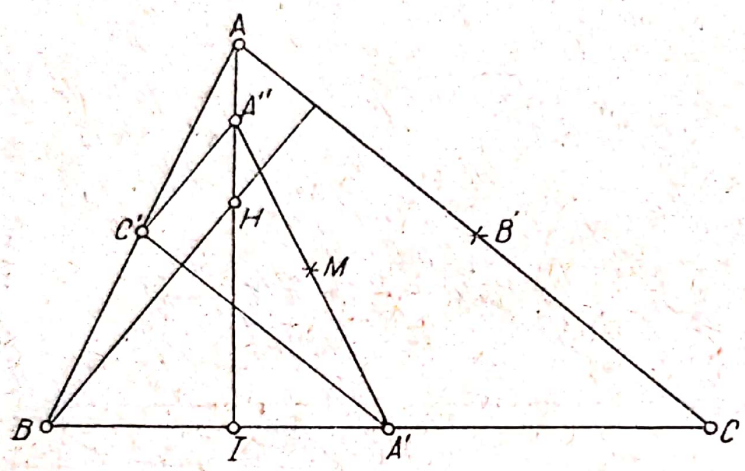


Fig. 4

Vîrfurile triunghiului $A''C'A'$ sînt deci egal depărtate de mijlocul M al segmentului $\overline{A'A''}$. Piciorul I al înălțimii dusă din A are aceeași depărtare de punctul M ca și A', C' și A''. Cele patru puncte A'', C', I, A' sînt pe un același cerc al cărui centru este M și diametru $A'A''$.

Cercul $A''C'IA'$ trece și prin B', pentru că patrulaterul $A'B'C'I$ este un trapez isoscel $\left(C'B'\right.$ este paralelă cu $\overline{IA'}$, $IC' = \frac{\overline{AB}}{2}$ și $\left.\overline{A'B'} = \frac{\overline{AB}}{2}\right)$.

Repetînd raționamentul pentru $\overline{B'B''}$ și $\overline{C'C''}$, vom deduce că mijlocul acestor segmente este centrul cercului $A'B'C'$ și că lungimile segmentelor $\overline{B'B''}$ și $\overline{C'C''}$ sînt diametri ai acestui cerc. Rezultă, deci, că $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ sînt concurente în M și că avem

$$\overline{A'A''} = \overline{B'B''} = \overline{C'C''}.$$

Punctul M este centrul cercului lui Euler, care precum se știe este situat în mijlocul segmentului $\overline{OH}$. De aici rezultă că dreapta OH este concurentă cu dreptele $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$.

136. Pe fiecare latură a unui triunghi se construiește un triunghi echilateral. Se unește al treilea vîrf al fiecăruia din aceste triunghiuri cu vîrful opus al primului triunghi. Să se arate că

Scanned with OKEN Scanner

a) cele trei segmente sînt egale;

b) cele trei segmente se intersectează în același punct.

Institutul de petrol și gaze, București, 1952

R. Construim pe laturile AB, AC, BC triunghiurile echilaterale AFB, AEC și BCD (fig. 5). Ducem CF și BE; triunghiurile formate ABE și ACF sînt egale, deoarece $\widehat{BAE} = \widehat{CAF} = \hat{A} + 60°$, latura AC din triunghiul ACF este egală cu latura AE din triunghiul ABE, iar $\overline{AF} = \overline{AB}$. Rezultă $\overline{BE} = \overline{CF}$. Raționînd în mod analog, obținem $\overline{AD} = \overline{BE}$ și prin urmare

$$\overline{BE} = \overline{CF} = \overline{AD}.$$

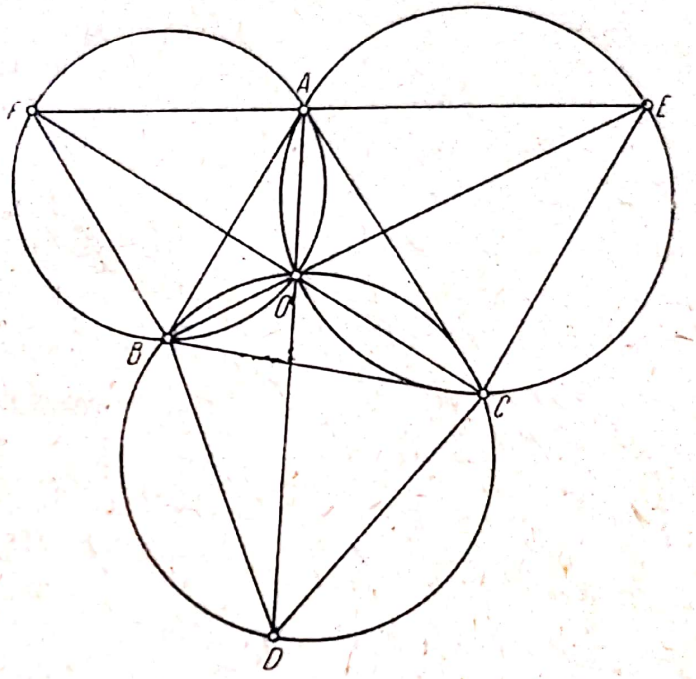


Fig. 5

b) Cercurile circumscrise triunghiurilor echilaterale ABF și ACE se intersectează, în afară de A, în punctul O. Unghiurile AOB și AOC sînt egale fiecare cu 120°, de unde rezultă că și unghiul BOC este egal cu 120°. Cercul circumscris triunghiului BDC trece de asemenea prin punctul O.

Punctele F, O, C sînt coliniare. Într-adevăr, măs $\widehat{AOF}$ = măs $\frac{\widehat{AF}}{2} = 60°$, iar măs $\widehat{AOC}$ = măs $\frac{\widehat{AEC}}{2} = 120°$, de unde rezultă $\widehat{AOF} + \widehat{AOC} = 180°$ și laturile FO, OC sînt în prelungire. La fel se arată că punctele B, O, E și, respectiv, A, O, D sînt coliniare. Din cele spuse pînă aici deducem că dreptele AD, BE, CF sînt concurente în punctul O.

137. Să se construiască un triunghi dreptunghic cînd se cunoaște raza cercului înscris și înălțimea coborîtă din vîrful unghiului drept.

Institutul de petrol și gaze, București, 1952

Scanned with OKEN Scanner

R. Ipotenuza trebuie să fie situată la distanța dată h de vîrful triunghiului și simultan tangentă la cercul înscris. Din această observație deducem construcția (fig. 6). În unghiul drept xAy se construiește un cerc O de rază r și tangent laturilor unghiului. Din A ca centru se descrie un cerc de rază h și deducem tangenta comună cercurilor O și A. Această tangentă taie laturile Ax și Ay în B și C. Triunghiul ABC este cel căutat.

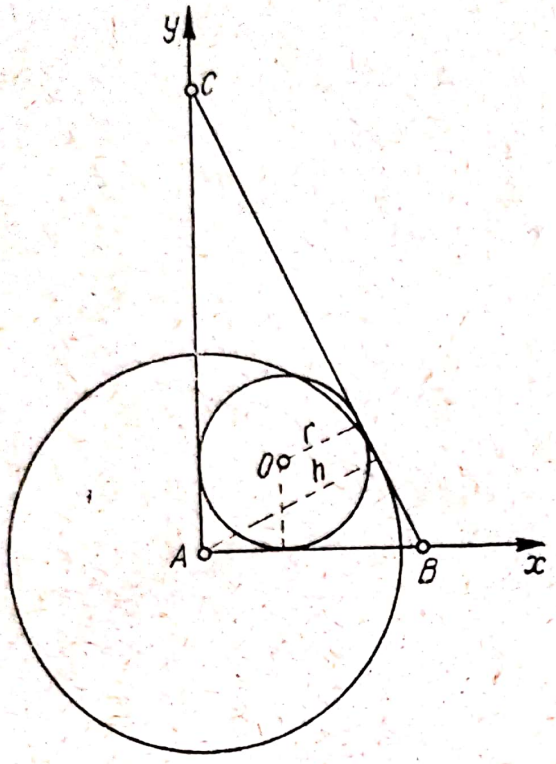


Fig. 6

138. Fiind dat un trapez $ABCD$ de baze AB și CD, fie E și F mijloacele laturilor BC și DA; H intersecția bisectoarelor unghiurilor A și D; K intersecția bisectoarelor unghiurilor B și C.

Să se demonstreze:

a) că HK este paralelă cu bazele;

b) $\overline{FH} = \frac{\overline{AD}}{2}$, $\overline{EK} = \frac{\overline{BC}}{2}$;

c) să se găsească condiția ca cele patru bisectoare să fie concurente.

Institutul de petrol și gaze, București, 1952.

R. a) Punctul H fiind pe bisectoarea unghiului A (fig. 7), avem distanțele $\overline{HM} = \overline{HN}$ și, la fel, rezultă că H este la egală distanță și de laturile unghiului D; $\overline{HM} = \overline{HL}$. Din cele arătate reiese că punctul H este situat la mijlocul distanței dintre baze. Printr-un raționament identic se arată că și K este situat la mijlocul distanței dintre baze, de unde rezultă că HK este paralelă cu bazele.

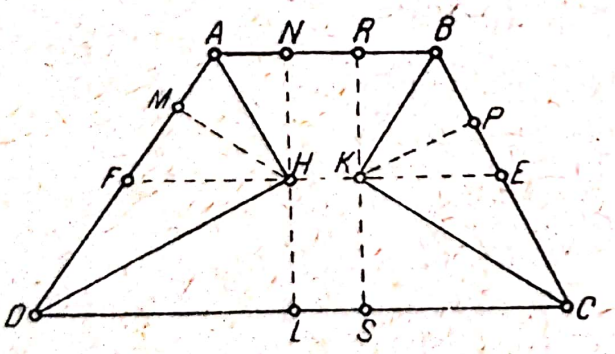


Fig. 7

b) Triunghiurile AHD și BKC fiind dreptunghice, medianele lor $\overline{FH}$ și $\overline{KE}$ sînt respectiv egale cu jumătățile ipotenuzelor

$$\overline{FH} = \frac{\overline{AD}}{2} \text{ și } \overline{KE} = \frac{\overline{BC}}{2}.$$

c) Calculăm lungimea segmentului $\overline{HK}$

$$\overline{HK} = \overline{FE} - (\overline{FH} + \overline{KE}) = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} - \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}.$$

Pentru ca cele patru bisectoare să fie concurente trebuie să avem $\overline{HK} = 0$, ceea ce înseamnă că avem

$$\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{AD} + \overline{BC}.$$

care exprimă condiția cerută.

139. Să se arate că dacă dintr-un punct M situat pe cercul circumscris unui triunghi ABC se coboară perpendiculare pe cele trei laturi, picioarele perpendicularelor sînt coliniare.

Institutul de petrol și gaze, București, 1952.

R. Fie A', B', C' proiecțiile punctului M pe cele trei laturi (fig. 8).

Patrulaterele formate $MB'AC'$ și $MB'A'C$ sînt inscriptibile, de unde rezultă unghiurile egale: $\hat{B}_1' = \hat{M}_3$ și $\hat{B}_2' = \hat{M}_4$. Unghiul $\hat{M}_3$ este egal cu unghiul $\hat{M}_4$, pentru că acestea au, respectiv, drept complemente unghiurile $C'AM$ și MCA', care sînt egale. Rezultă de aici că $\hat{B}_1' = \hat{B}_2'$ și, prin urmare, dreptele $C'B'$ și $B'A'$ sînt în prelungire.

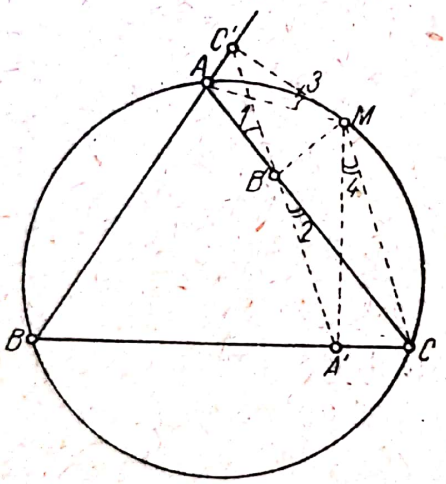


Fig. 8

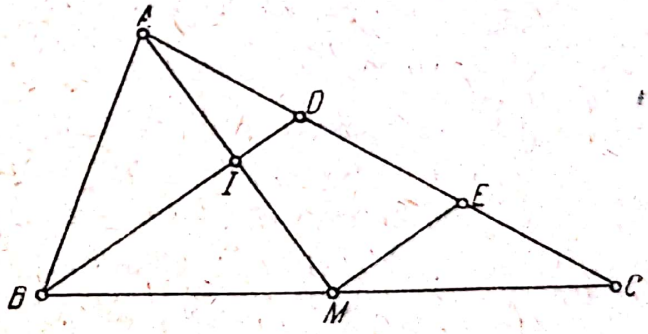


Fig. 9

140. Se consideră un triunghi ABC, în care $\overline{BC} = 2\,\overline{AB}$. Fie M mijlocul lui $\overline{BC}$, iar D și E punctele care împart latura AC în trei părți egale, $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EC}$. Să se arate că triunghiul AME este dreptunghic.

Facultatea de chimie, București, 1953

R. Dreapta ME, care unește mijlocul a două laturi ale triunghiului DCB (fig. 9), este paralelă cu BD, de unde rezultă că

punctul I de intersecţie a dreptei BD cu AM este situat la mijlocul segmentului $\overline{AM}$. Triunghiul ABM este isoscel, pentru că — prin ipoteză — avem $\overline{BC} = 2\overline{AB}$ şi, prin urmare, $\overline{AB} = \overline{BM}$.

Punctul I fiind mijlocul lui AM, rezultă că BI este perpendiculară pe AM.

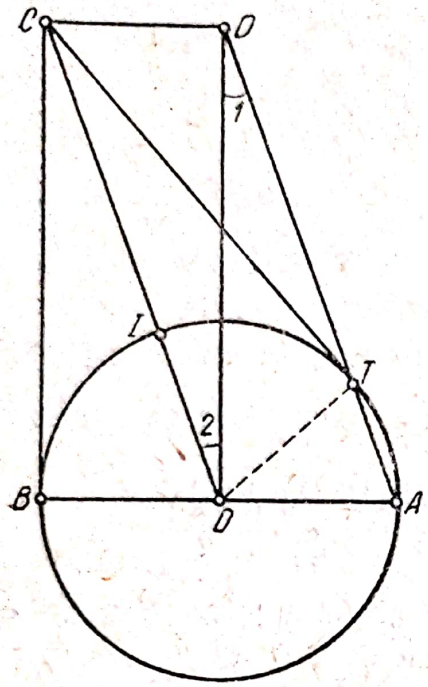


Fig. 10

141. Într-un cerc oarecare avînd centrul în O, se consideră $\overline{AB}$, un diametru al său. Prin B se duce tangenta la cerc, pe care se ia un punct oarecare C. Din C se duce o a doua tangentă $\overline{CT}$, punctul T fiind punctul de contact cu cercul.

Notînd cu D punctul de intersecţie al dreptei TA cu perpendiculara ridicată în O pe diametrul AB, se cere să se arate că figura $OCDT$ este un trapez isoscel.

Facultatea de matematică şi fizică, Cluj, 1953.

R. Tangenta $\overline{CT}$ este egală cu $\overline{CB}$, iar OC fiind bisectoarea unghiului BCT, rezultă că arcele BI şi IT sînt egale (fig. 10).

Unghiurile D_1 şi O_2 sînt egale pentru că complementele lor $\overset{\frown}{TAO}$ şi $\overset{\frown}{BOI}$ care au, respectiv, ca măsură $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BIT}$ şi $\overset{\frown}{BI}$, sînt egale. Deducem deci că dreptele DT şi CO sînt paralele.

Triunghiurile dreptunghice CBO şi DOA au unghiurile COB şi DAO egale, după cum s-a arătat, iar catetele $\overline{BO}$ şi $\overline{OA}$ sînt egale, ca fiind razele aceluiaşi cerc. Din egalitatea catetelor $\overline{CB}$ şi $\overline{DO}$ şi din faptul că ele sînt paralele, deducem $\overline{CD} = \overline{BO}$ şi, prin urmare, $\overline{CD} = \overline{OT}$. Patrulaterul $COTD$, avînd bazele CO şi DT paralele iar laturile $\overline{CD}$ şi $\overline{OT}$ egale, este un trapez isoscel.

142. În triunghiul isoscel ABC $(\overline{AB} = \overline{AC})$, fie D piciorul înălţimii din A pe BC. Să se demonstreze că perpendiculara din D pe latura AC este tangentă în D la cercul ABD.

Institutul de petrol şi gaze, Bucureşti, 1954.

R. Centrul cercului ABD (fig. 11) este mijlocul M al ipotenuzei AB. Dreapta MD, care uneşte mijloacele laturilor AB şi BC, este paralelă cu AC, iar DI este perpendiculară pe aceeaşi dreaptă

AC. Rezultă că DI este perpendiculară pe raza MD la extremitatea ei în D. Dreapta DI este, prin urmare, tangentă la cercul ABD, în punctul D.

143. Fie cercul O și un punct exterior C. Ducem secanta CBA și tangenta CD la cercul O. Cercul circumscris triunghiului CBD intersectează pe AD în E. Să se arate că:

a) segmentele $\overline{CD}$ și $\overline{CE}$ sînt egale:

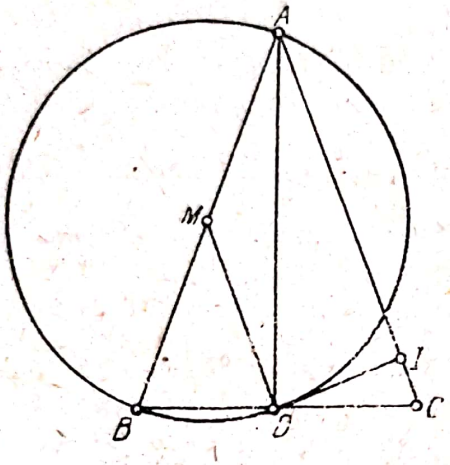


Fig. 11

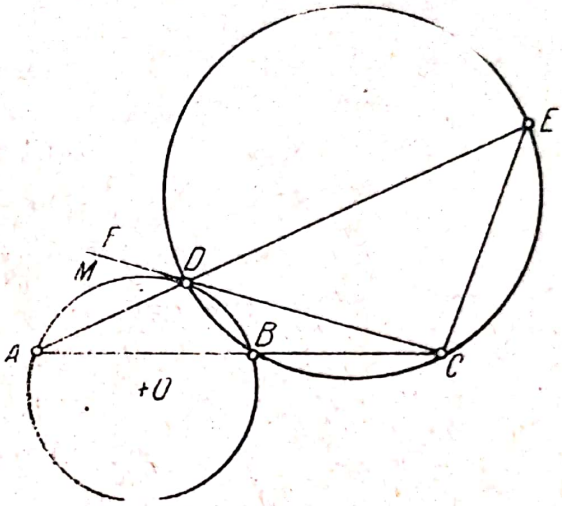


Fig. 12

b) dreapta CE este tangentă cercului circumscris triunghiului ABE.

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

R. a) Egalitatea segmentelor $\overline{CE}$ și $\overline{CD}$ rezultă din faptul că triunghiul DEC are unghiurile DEC și EDC egale (fig. 12). În adevăr avem

$$\text{măs}\,\widehat{DEC} = \text{măs}\,\frac{\widehat{DB} + \widehat{BC}}{2},$$

iar

$$\text{măs}\,\widehat{EDC} = \text{măs}\,\widehat{FDA} = \text{măs}\,\frac{\widehat{AMD}}{2} = \text{măs}\,\widehat{DBA}.$$

Unghiul DBA, considerat cu vîrful pe cercul DCE, are ca măsură semisuma arcelor cuprinse între laturi, adică avem

$$\text{măs}\,\widehat{EDC} = \text{măs}\,\widehat{DBA} = \text{măs}\,\frac{\widehat{DB} + \widehat{BC}}{2},$$

de unde rezultă $\widehat{EDC} = \widehat{DEC}$ și, prin urmare, $\overline{DC} = \overline{CE}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Avînd în vedere că am demonstrat $\overline{DC} = \overline{CE}$ și că există relația

$$\overline{CB} \cdot \overline{CA} = \overline{CD}^2, \text{ rezultă } \overline{CB} \cdot \overline{CA} = \overline{CE}^2,$$

ceea ce înseamnă că dreapta CE este tangentă la cercul circumscris triunghiului ABE.

144. Într-un cerc de rază R se înscrie dreptunghiul $ABCD$ avînd latura AB egală cu latura triunghiului echilateral înscris în cerc.

a) Să se calculeze latura AD a dreptunghiului.

b) Se duc perpendicularele AA' și BB' pe diagonalele BD și AC; să se arate că aceste perpendiculare se taie pe cerc și că $\overline{A'B'} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

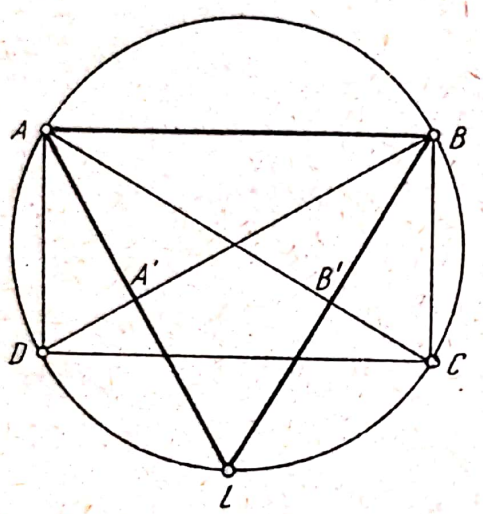


Fig. 13

Facultatea de matematică-mecanică, Cluj, 1962.

R. a) Dacă AB (fig. 13) este latura triunghiului echilateral, arcul AB are 120°, prin urmare, arcul AD are 60°. Rezultă că $\overline{AD}$ este latura exagonului și deci este egală cu R.

b) Unghiul dreptelor AA', BB' este $180° - 2\overset{\frown}{A'AB} = 2\overset{\frown}{ABD} = 60°$ și deci intersecția lor L se află pe cerc, deoarece măsura unghiului ALB este $\frac{1}{2}$ arc AB.

Dreptele BD, AC fiind diametri în cerc și AA', BB' respectiv perpendiculare pe acești diametri, rezultă că A', B' sînt mijloacele segmentelor AL, BL, astfel că $\overline{A'B'} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

145. Se consideră un unghi xOy. Pe bisectoarea interioară se ia un punct M și se descriu două cercuri oarecare în care OM este coardă. Primul cerc intersectează laturile unghiului în B, respectiv C, iar al doilea în B', respectiv în C'. Să se arate că $\overline{BB'} = \overline{CC'}$.

Institutul politehnic, Iași, 1954.

R. Ducem coardele MB, MC, MB', MC' (fig. 14). Triunghiurile formate MBB' și MCC' sînt egale, deoarece au

1) laturile MB și MC egale, fiind coarde din același cerc și se opun unghiurilor înscrise egale $\overset{\frown}{BOM} = \overset{\frown}{MOC}$;

2) $\overline{MB'} = \overline{MC'}$ din aceleași motive; unghiurile $B'BM$ și MCC' sînt egale după cum rezultă din egalitățile

$$\text{măs}\,\widehat{B'BM} = \text{măs}\,\frac{\widehat{MB} + \widehat{BLO}}{2};\quad \text{măs}\,\widehat{MCC'} = \text{măs}\,\frac{\widehat{MB} + \widehat{BLO}}{2}.$$

Din egalitatea triunghiurilor MBB' și MCC' deducem, deci,

$$\overline{BB'} = \overline{CC'}.$$

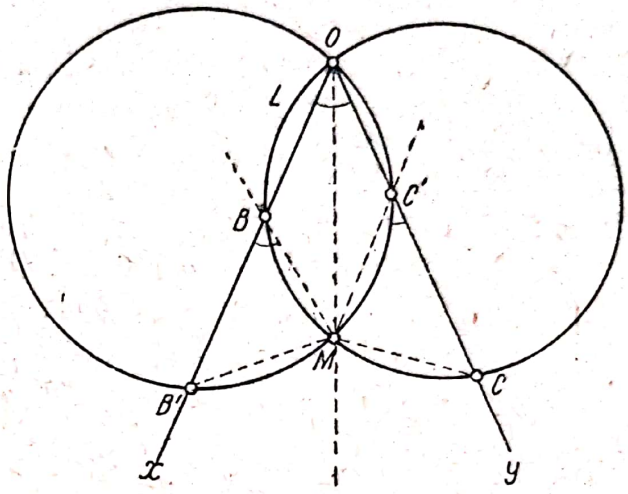


Fig. 14

146. Într-un trapez $ABCD$ înscris într-un cerc de rază R, laturile paralele BC și AD sînt, respectiv, egale cu latura exagonului regulat și cu latura triunghiului echilateral, înscrise în acest cerc. Să se arate că laturile $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ sînt egale cu latura pătratului înscris în cerc, iar diagonalele $\overline{AC}$ și $\overline{BD}$ sînt perpendiculare.

În cazul cînd baza AD rămîne fixă, iar BC variază ca poziție dar păstrează lungimea, figura devine un patrulater oarecare. Se cere locul geometric al intersecției M a laturilor AB și CD.

Institutul politehnic, Timișoara, 1954.

R. Dat fiind că urmează să arătăm că diagonalele sînt perpendiculare, rezultă că laturile AD și BC sînt situate de o parte și de alta a centrului. Din datele problemei reiese că avem $\widehat{BC}=60°$, $\widehat{AD} = 120°$ (fig. 15). Deducem că $2\widehat{AB} = 360° - (120° + 60°) = 180°$ sau $\widehat{AB}=90°$. Așadar, laturile AB și CD sînt egale cu latura pătratului înscris în cerc.

Pentru a demonstra că AC este perpendiculară pe BD, calculăm unghiul CID. Avem $\text{măs}\,\widehat{CID} = \text{măs}\,\frac{\widehat{CD} + \widehat{AB}}{2} = 90°$, deci AC este perpendiculară pe BD.

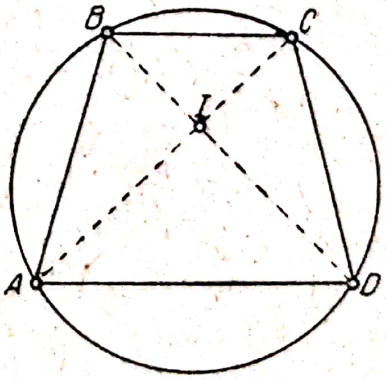


Fig. 15

Presupunem că latura exagonului, BC, este variabilă ca poziție. Pentru a găsi locul punctului de intersecție, M al dreptelor AB și CD, să evaluăm unghiul M (fig. 16).

Avem

$$\text{măs } \widehat{M} = \text{măs } \frac{\overset{\frown}{ALD} - \overset{\frown}{BNC}}{2} = \frac{120° - 60°}{2} = 30°.$$

Locul geometric al lui M este, prin urmare, arcul de cerc capabil de unghiul de 30° descris pe coarda $\overline{AD}$.

147. Se dă un unghi de 60° care se rotește în planul determinat de laturile sale în jurul vîrfului său fix A. Din punctul fix B situat la distanța $2l$ de punctul A se coboară perpendicularele BC și BD pe laturile acestui unghi. Se unește mijlocul O al segmentului AB cu punctele C și D. Se cere:

a) să se arate că unghiurile OCD și ODC sînt de cîte 30°;

b) să se determine locul geometric al punctului de concurență al medianelor triunghiului OCD.

Institutul politehnic, Brașov, 1956.

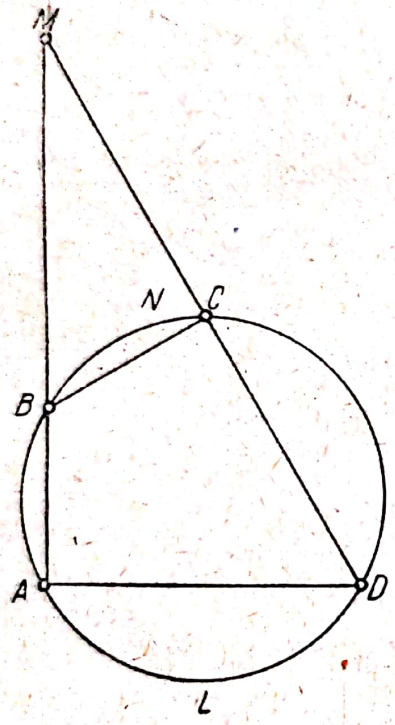


Fig. 16

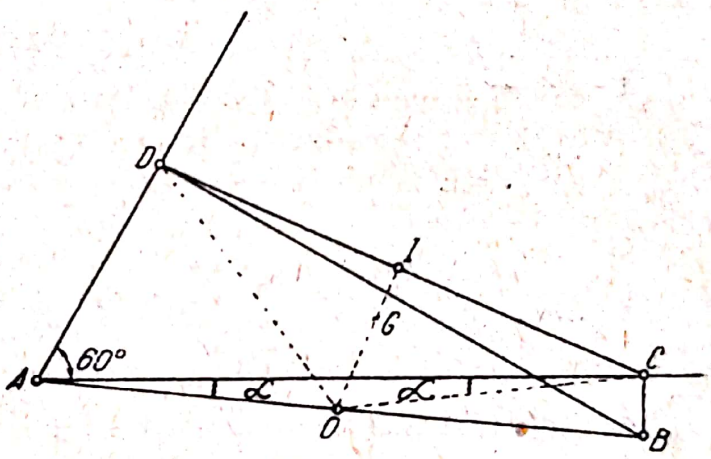


Fig. 17

R. a) Triunghiul COD (fig. 17) este isoscel, pentru că triunghiurile dreptunghice ACB și ADB sînt înscrise în același semicerc cu centrul O și de diametru AB; de unde deducem

$$\overline{OC} = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OD} = l.$$

Dacă notăm $\widehat{OCA} = \widehat{OAC} = \alpha$ și ținem seama că în patrulaterul inscriptibil $ABCD$ avem $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$, rezultă

$$\widehat{OCD} = \widehat{ACD} + \widehat{OCA} = \widehat{ABD} + \alpha = 90° - \widehat{BAD} + \alpha,$$

sau

$$\widehat{OCD} = 90° - (60° + \alpha) + \alpha = 30°.$$

Triunghiul COD fiind isoscel, avem deci

$$\widehat{OCD} = \widehat{ODC} = 30°.$$

b) Centrul de greutate G al triunghiului OCD se află pe perpendiculara $\overline{OI}$ dusă pe latura $\overline{CD}$ la 2/3 din această distanță de punctul O. Din cele constatate la punctul a) triunghiul DOC își păstrează laturile $\overline{OC}$ și $\overline{OD}$ cu lungimea constantă l și unghiurile OCD, ODC de cîte 30°; urmează deci că și $\overline{OI}$ rămîne cu lungimea constantă. Rezultă deci că punctul G descrie un cerc cu centrul în O și cu raza $\frac{2}{3}\,\overline{OI}$.

148. Să se construiască un triunghi ABC cînd se dă piciorul înălțimii din A, piciorul medianei din A și piciorul medianei din B. Să se justifice construcția.

Facultatea de chimie, București, 1956.

R. Presupunem problema rezolvată. Fie ABC triunghiul căutat (fig. 18). D piciorul înălțimii din A, iar A', B' picioarele medianelor din A, respectiv B. Fie C' mijlocul laturii AB. Se știe că $B'C'$ este paralelă cu BC, iar din faptul că $\overline{DC'}$ este mediana triunghiului dreptunghi ABD, rezultă că $\overline{DC'}$ este $\frac{1}{2}\,\overline{AB}$. De asemenea avem $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ și $\overline{A'B'} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}$. Din aceste constatări rezultă că $DA'B'C'$ este un trapez isoscel și prin urmare reiese construcția pe care trebuie s-o facem pentru a obține triunghiul ABC, atunci cînd sînt date D, A', B'.

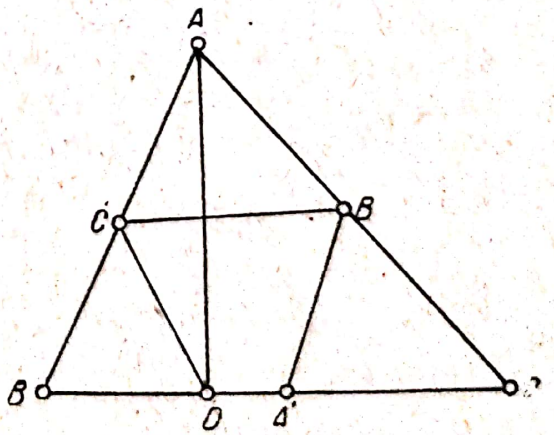


Fig. 18

Construcția. Din B' se duce o paralelă la $A'D$, iar din D ca centru, cu o rază $\overline{DC'} = \overline{A'B'}$ descriem un cerc care taie paralela din B' în punctul C', al patrulea vîrf al trapezului isoscel $DA'B'C'$. Din C' se duce o paralelă la dreapta $A'B'$ care taie

prelungirea dreptei $A'D$ în punctul B, iar perpendiculara din D pe $A'D$ în punctul A. Dreapta care unește A cu B' taie prelungirea dreptei DA' în al treilea vîrf C al triunghiului căutat. Problema admite o singură soluție.

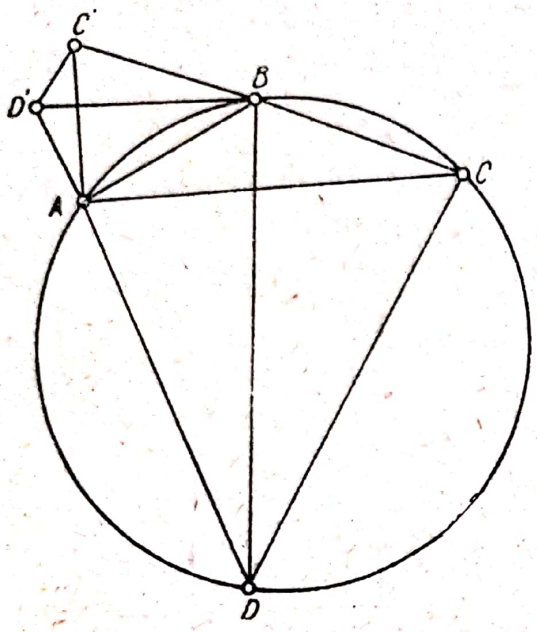


Fig. 19

149. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Din vîrful A se duce o perpendiculară pe diagonala AC, care taie latura BC în punctul C', iar în B se duce o perpendiculară pe diagonala BD care taie latura AD în punctul D'. Să se arate că patrulaterul $ABC'D'$ este inscriptibil și că $C'D'$ este paralelă cu CD.

Facultatea de chimie, Cluj, 1957.

R. Triunghiurile $C'AC$ și $D'BD$ fiind dreptunghice (fig. 19), urmează că unghiurile $AC'B$ și $BD'A$ au, respectiv, drept complemente unghiurile BCA și BDA. Acestea din urmă fiind egale, rezultă că și unghiurile $AC'B$ și $BD'A$ sînt de asemenea egale. Deducem prin urmare că patrulaterul $ABC'D'$ este inscriptibil.

Patrulaterul $ABCD$ fiind dat inscriptibil, avem $\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{BAD} = 180°$; pe de altă parte, s-a demonstrat că și $ABC'D'$ este inscriptibil, astfel că avem $\overset{\frown}{D'C'B} = \overset{\frown}{BAD}$ și prin urmare $\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{D'C'B} = 180°$, deci $D'C' \parallel DC$.

150. Într-un cerc cu centrul O se consideră doi diametri perpendiculari $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$. Fie P un punct oarecare situat pe $\overline{AB}$. Se duce dreapta CP care intersectează cercul într-un punct S. Se consideră tangenta la cerc în punctul S care taie dreapta AB în punctul R. Să se arate că triunghiul SPR este isoscel și să se determine poziția punctului S astfel, încît triunghiul de mai sus să fie echilateral.

Institutul politehnic, Iași, 1957.

R. Dacă notăm $\overset{\frown}{OCP} = \alpha$ (fig. 20), atunci $\overset{\frown}{CSO} = \alpha$. Dreapta SR fiind tangentă la cerc este perpendiculară pe OS și prin urmare avem $\overset{\frown}{PSR} = 90° - \alpha$. Pe de altă parte, din triunghiul drept

unghic COP avem $\widehat{CPO} = 90° - \alpha$ și deci unghiul opus la vîrf al acestuia, adică $\widehat{SPR}$, este de asemenea egal cu $90° - \alpha$. Deducem prin urmare că $\widehat{PSR} = \widehat{SPR}$, astfel că triunghiul PSR este isoscel cu laturile egale PR și SR.

Pentru ca acest triunghi să fie echilateral, este suficient să punem condiția ca

$$\widehat{SPR} = 90° - \alpha = 60°,$$

rezultă deci că α trebuie să fie de 30° și prin urmare arcul DS trebuie să aibă 60°. Rezultă că latura $\overline{DS}$ este latura exagonului înscris în cerc. Pentru a construi deci pe S astfel ca PRS să fie echilateral, vom lua cu compasul distanța DS egală cu raza cercului.

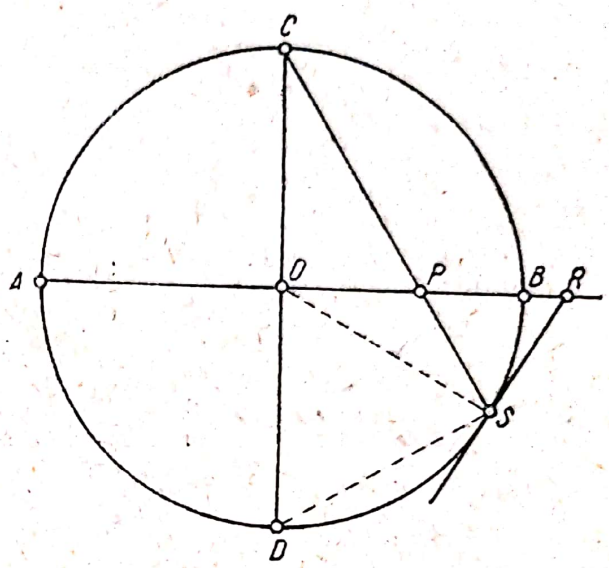


Fig. 20

151. Prin centrul O_1 al unui cerc de rază R_1 trece alt cerc cu centrul O_2 și rază R_2; $(R_1 < R_2)$. Se cere:

a) să se arate că tangentele la cercul O_1 în punctele de intersecție E și F ale celor două cercuri se taie pe cercul O_2;

b) ducînd tangentele comune la cele două cercuri, AB și CD, să se arate că dreapta BD este tangentă la cercul O_1.

Institutul politehnic, Cluj, 1958.

R. a) Tangenta ME la cercul O_1 este perpendiculară pe $\overline{O_1E}$ (fig. 21), la fel și tangenta $\overline{MF}$, la același cerc O_1, este perpendiculară pe $\overline{O_1F}$.

Rezultă că patrulaterul FO_1EM este inscriptibil în cercul care trece prin O_1, E și F. Prin urmare, punctul M de intersecție a celor două tangente se află pe cercul O_2.

b) Ducem din O_1 o paralelă $\overline{O_1H}$ la tangenta comună $\overline{AB}$. Aceasta taie raza dusă la punctul de contact B, în punctul H.

Notînd cu L punctul unde O_1O_2 taie dreapta BD, observăm că se formează două triunghiuri dreptunghice O_1O_2H și BLO_2 care au $\overline{O_1O_2} = \overline{BO_2} = R_2$ și $\widehat{HO_1O_2} = \widehat{LBO_2}$ ca avînd laturi perpendiculare; rezultă egalitatea celor două triunghiuri.

Prin urmare $\overline{LO_2} = \overline{O_2H} = R_2 - R_1$, iar $\overline{O_1L} = \overline{O_1O_2} - \overline{LO_2} = R_2 - (R_2 - R_1) = R_1$. Acest din urmă rezultat dovedește că BD este tangentă la cercul O_1.

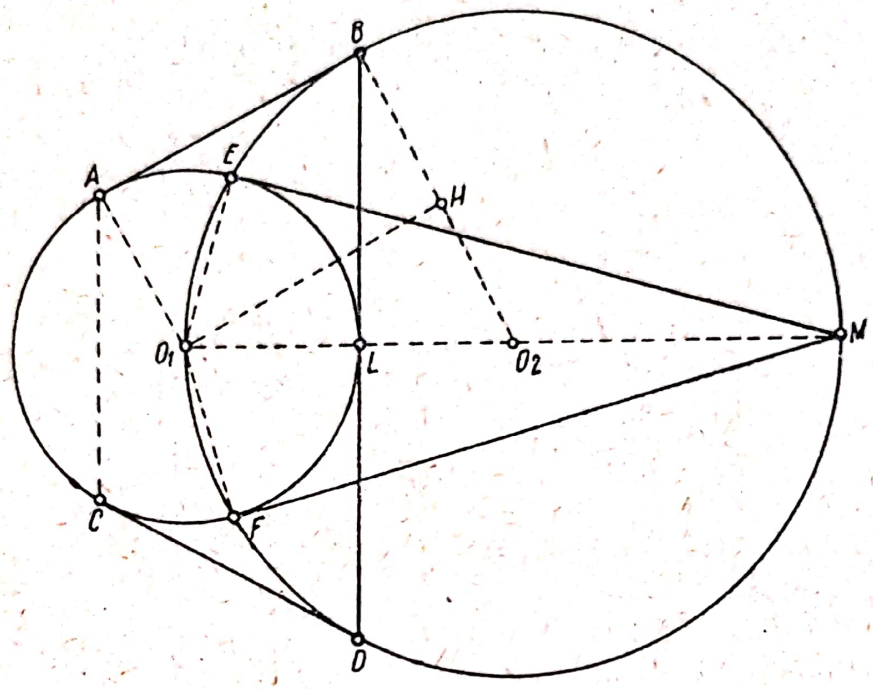


Fig. 21

152. Se consideră un patrulater inscriptibil $ABCD$. Laturile $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ se taie în punctul E, iar laturile $\overline{AD}$ și $\overline{BC}$ în punctul F. Bisectoarea unghiului AED taie laturile $\overline{BC}$ și $\overline{AD}$ respectiv în H și G, iar bisectoarea unghiului AFB taie laturile $\overline{CD}$ și $\overline{AB}$ în I și J. Să se arate că patrulaterul $IGJH$ este un romb.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1959

R. Urmărim să demonstrăm că GFH (fig. 22) este un triunghi isoscel, pentru că astfel va rezulta că bisectoarea unghiului AFB va fi perpendiculară pe segmentul GH, în mijlocul său.

Dacă notăm cu M, N, P, Q punctele unde bisectoarele din E și F taie cercul circumscris patrulaterului $ABCD$, avem

$$\text{măs}\,\widehat{NHB} = \text{măs}\,\frac{\widehat{NA} + \widehat{AQB} + \widehat{CM}}{2}$$

și

$$\text{măs}\,\widehat{MGA} = \text{măs}\,\frac{\widehat{AQB} + \widehat{BM} + \widehat{ND}}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte

$\widehat{CM} - \widehat{DN} = \widehat{MB} - \widehat{NA}$, pentru că ENM este bisectoarea unghiului din E. Rezultă deci că avem

$$\widehat{CM} + \widehat{NA} = \widehat{DN} + \widehat{MB}$$

și apoi

$$\widehat{CM} + \widehat{NA} + \widehat{AQB} = \widehat{DN} + \widehat{MB} + \widehat{AQB}.$$

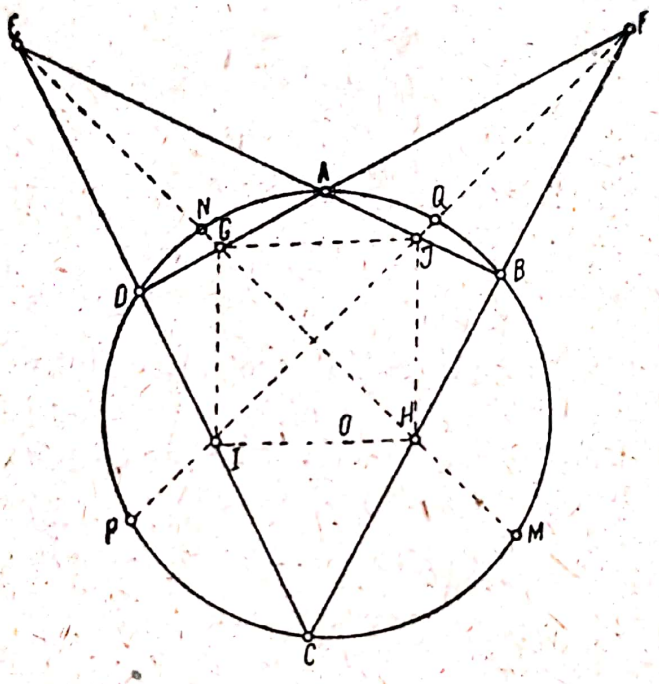


Fig. 22

Prin urmare, triunghiul FGH este isoscel. Într-un mod cu totul identic se demonstrează că IEJ este de asemenea isoscel. Astfel, rezultă că GH și IJ sînt perpendiculare între ele și se taie în mijlocul lor și prin urmare patrulaterul $GIHJ$ este un romb.

153. Se dau două cercuri de raze R și r tangente exterioare în punctul H. Se consideră tangenta comună exterioară AB (unde A și B sînt puncte de contact diferite ale tangentei). Se cere să se demonstreze că cercul de diametru AB este tangent la dreapta determinată de centrele celor două cercuri.

Institutul forestier, Brașov, 1954.

Scanned with OKEN Scanner

R. Ducem în H tangenta comună care intersectează tangenta AB în punctul M (fig. 23). Dreapta HM este perpendiculară pe linia centrelor, iar punctul M este egal depărtat de A, H, B. Cercul cu centrul în M de diametru AB trece prin H, iar OI este perpendiculară pe raza HM, de unde rezultă că cercul AHB este tangent dreptei OI în punctul H.

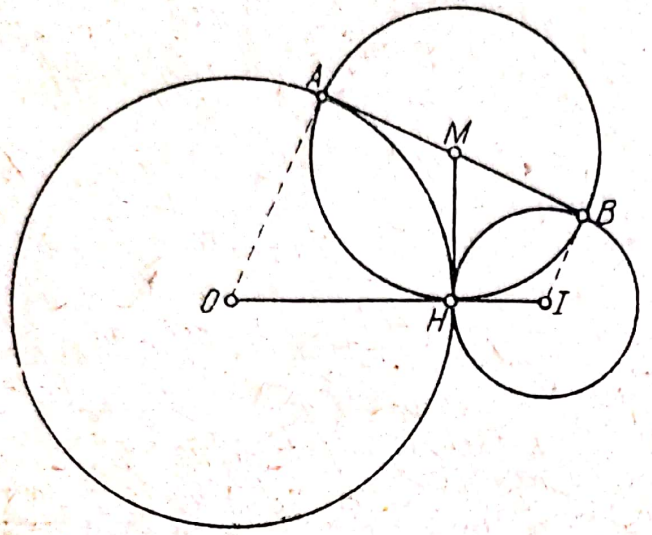


Fig. 23

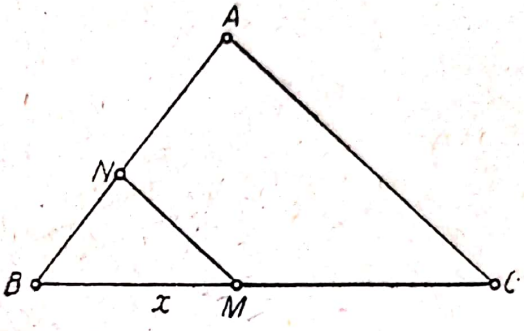


Fig. 24

154. Într-un triunghi ABC, ale cărui laturi au lungimile $\overline{AB} = c$; $\overline{BC} = a$; $\overline{CA} = b$, se duce o paralelă la latura AC, astfel încît trapezul format $ACMN$ să aibă perimetrul egal cu $2p$. Se cere să se găsească lungimea $BM = x$ (fig. 24).

Facultatea de matematică și fizică, București, 1951.

R. Trebuie să avem

$$\overline{AN} + \overline{MN} + \overline{MC} + \overline{AC} = 2p.$$

Adăugînd în ambii membri suma $\overline{BN} + \overline{BM}$, relația dată devine

$$a + b + c + \overline{MN} = 2p + \overline{BN} + \overline{BM}. \qquad (1)$$

Din asemănarea triunghiurilor BMN și BCA (fig. 24) rezultă

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BM} + \overline{BN} - \overline{MN}}{\overline{BC} + \overline{BA} - \overline{AC}}. \qquad (2)$$

Înlocuind în relația (2)

$$\overline{BM} + \overline{BN} - \overline{MN} = a + b + c - 2p,$$

dedusă din relația (1), obținem

$$\frac{x}{a} = \frac{a+b+c-2p}{a+c-b}, \text{ de unde rezultă } x = \frac{a(a+b+c-2p)}{a+c-b}.$$

155. Se dă un cerc de rază R (cunoscută) tangent la două semidrepte perpendiculare Ix și Iy. Să se afle razele a două cercuri tangente fiecare la semidreptele date și la cercul dat.

Institutul politehnic, București, 1951.

R. Fie I punctul de intersecție a celor două drepte, O centrul cercului dat (fig. 25) și A, B centrele celor două cercuri ale căror raze R_a, R_b trebuie aflate.

Punctele A, B sînt situate pe dreapta IO, bisectoarea interioară a unghiului dreptelor Ix, Iy. Observînd că triunghiurile formate de această bisectoare și de razele perpendiculare pe Iy și de semidreapta Iy sînt isoscele dreptunghice, avem

$$\overline{IA} = R_a\sqrt{2};\ \overline{IO} = R\sqrt{2};\ \overline{IB} = R_b/\sqrt{2}.$$

Deoarece

$$\overline{IO} = \overline{IA} + R_a + R,$$

rezultă

$$R\sqrt{2} = R_a\sqrt{2} + R_a + R;$$

deci

$$R_a = \frac{R(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1}.$$

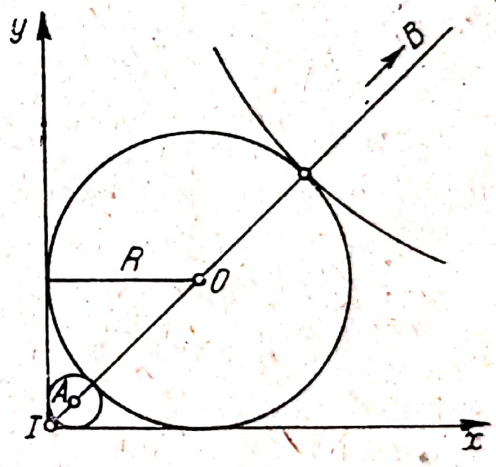


Fig. 25

În mod analog, avem

$$\overline{IB} = \overline{IO} + R + R_b,$$

$$R_b\sqrt{2} = R\sqrt{2} + R + R_b,$$

$$R_b = \frac{R(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}-1}.$$

Se observă că cele trei raze verifică relația

$$R_aR_b = R^2.$$

156. Se dau două cercuri cu centrele în O și O' și care se întîlnesc în două puncte A și B. Se duce diametrul MON paralel

cu $O'A$ și diametrul $M'O'N'$ paralel cu OA, punctele M, M', A fiind de aceeași parte a dreptei OO'. Se cere:

a) să se arate că triunghiurile MOA și $M'O'A$ sînt asemenea, la fel triunghiurile NOA și $N'O'A$;

b) să se deducă că dreptele AM și AM' sînt în prelungire și că dreptele AN și AN' sînt confundate;

c) dreptele ANN' și MAM' sînt bisectoarele (interioară și exterioară) unghiului OAO'.

Institutul politehnic, Brașov, 1961.

R. a) Triunghiurile MOA, $M'O'A$ (fig. 26) ca și NOA, $N'O'A$ fiind isoscele ($\overline{OM} = \overline{OA} = \overline{ON}$, $\overline{O'M'} = \overline{O'A} = \overline{O'N'}$) și avînd unghiurile din O, O' egale din cauza că s-a dat $MON \parallel AO'$ și $M'O'N' \parallel AO$, rezultă că avem

$$\Delta\, MOA \sim \Delta\, M'O'A \quad \text{și} \quad \Delta\, NOA \sim \Delta\, N'O'A.$$

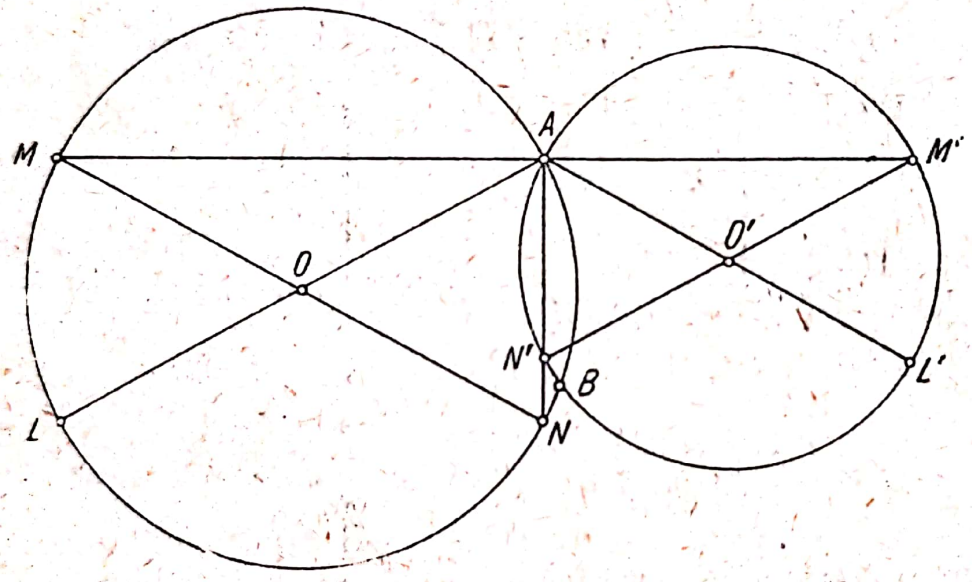


Fig. 26

b) Avînd $\widehat{O'AO} + \widehat{AON} = 180°$, $\widehat{AON} = \widehat{OAM} + \widehat{OMA}$ și $\widehat{OMA} = \widehat{O'AM'}$, rezultă

$$\widehat{MAO} + \widehat{OAO'} + \widehat{O'AM'} = 180°,$$

astfel că M, A, M' sînt coliniare.

Din asemănarea triunghiurilor AON și $AO'N'$ deducem $\widehat{OAN} = \widehat{AN'O'} = \widehat{OAN'}$ deci AN, AN' sînt confundate.

c) Întrucît $\widehat{OAN} = \widehat{O'AN}$, rezultă că ANN' este bisectoarea interioară a $\widehat{OAO'}$. Cum $\widehat{MAN} = 90°$, urmează că MAM' este bisectoarea exterioară.

157. Într-un triunghi oarecare ABC se coboară din vîrful A înălțimea AH și mediana AM (fig. 27). Să se stabilească relația

$$\overline{BC} \cdot \overline{MH} = \frac{1}{2}(\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2).$$

Institutul politehnic, București, 1951.

R. Ținînd seama că

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2;$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2,$$

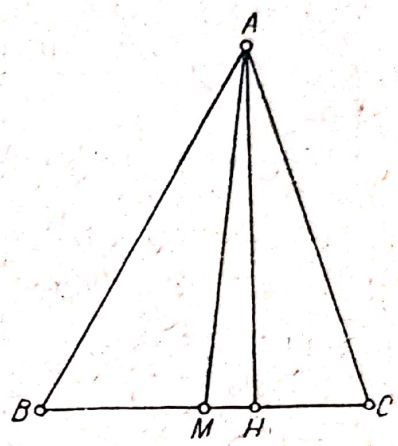


Fig. 27

rezultă

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BH}^2 - \overline{HC}^2 =$$
$$= (\overline{BH} + \overline{HC})\ (\overline{BH} - \overline{HC}),$$

ceea ce se mai poate scrie

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BC}\left[\left(\frac{\overline{BC}}{2} + \overline{MH}\right) - \left(\frac{\overline{BC}}{2} - \overline{MH}\right)\right] = 2\,\overline{BC} \cdot \overline{MH},$$

de unde

$$\overline{BC} \cdot \overline{MH} = \frac{1}{2}(\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2).$$

158. În triunghiul ABC se cunosc laturile $\overline{AB} = 5$ m; $\overline{BC} = 6$ m; $\overline{CA} = 7$ m. Se duce dreapta DE paralelă cu BC (fig. 28) astfel ca triunghiul ADE și trapezul $BDEC$ să aibă același perimetru. Să se afle lungimea segmentului $\overline{DE}$ și aria trapezului $BDEC$.

Facultatea de chimie, București, 1953.

R. Trebuie să avem

$$\overline{AD} + \overline{AE} + \overline{DE} = \overline{BD} + \overline{DE} +$$
$$+ \overline{EC} + \overline{BC}.$$

Adunînd la ambii membri suma

$$\overline{AD} + \overline{AE},$$

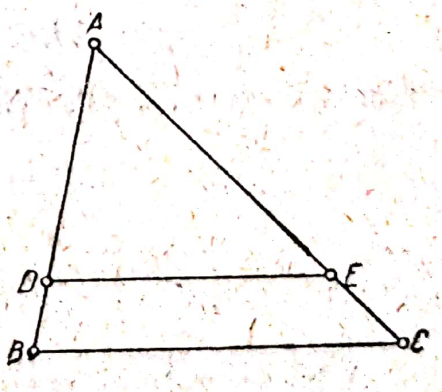


Fig. 28

Scanned with OKEN Scanner

condiția devine

$$2(\overline{AD} + \overline{AE}) = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$$

sau

$$\overline{AD} + \overline{AE} = p,$$

unde p este semiperimetrul triunghiului. În exemplul nostru avem

$$p = \frac{5+6+7}{2} = 9, \quad \text{deci} \quad \overline{AD} + \overline{AE} = 9.$$

Din asemănarea triunghiurilor ADE și ABC, avem

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD} + \overline{AE}}{\overline{AB} + \overline{BC}} \text{ sau } \frac{\overline{DE}}{6} = \frac{9}{12},$$

de unde rezultă

$$\overline{DE} = \frac{9 \cdot 6}{12} = 4{,}5.$$

Pentru a calcula aria S a trapezului $BDEC$, scriem proporția

$$\frac{\text{aria } ADE}{\text{aria } ABC} = \left(\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}\right)^2 = \left(\frac{4{,}5}{6}\right)^2 = \frac{9}{16},$$

de unde rezultă

$$\frac{\text{aria } ABC - \text{aria } ADE}{\text{aria } ABC} = \frac{16-9}{16} = \frac{7}{16};$$

deci

$$\frac{S}{\text{aria } ABC} = \frac{7}{16}.$$

Avem

$$\text{aria } ABC = \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2} = 6\sqrt{6},$$

iar aria trapezului $BDEC$ este

$$S = \frac{7}{16} \cdot 6\sqrt{6} = \frac{21}{8}\sqrt{6}.$$

159. Fie $A'B'C'D'$ unul din paralelogramele înscrise în dreptunghiul $ABCD$ și având laturile paralele cu diagonalele dreptunghiului.

a) Să se arate că perimetrul acestor paralelograme este același și anume, egal cu dublul diagonalei dreptunghiului.

b) Să se arate că dacă $ABCD$ este un paralelogram oarecare cu lungimile diagonalelor d_1, d_2, atunci are loc relaţia

$$\frac{l_1}{d_1} + \frac{l_2}{d_2} = 1,$$

l_1, l_2 fiind lungimile laturilor paralelogramului înscris.

Institutul politehnic, Iaşi, 1953.

R. *a*) Din paralelismul laturilor $A'D'$ şi $A'B'$ cu diagonalele dreptunghiului (fig. 29), rezultă

$$\frac{\overline{A'D'}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{AB}} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}}.$$

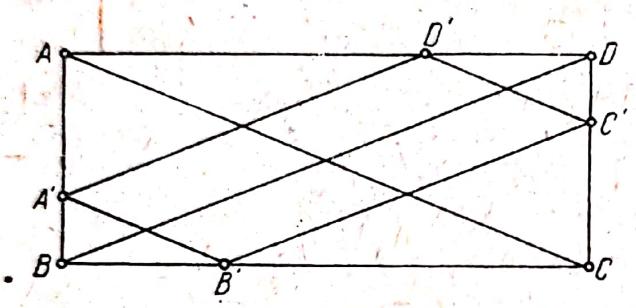


Fig. 29

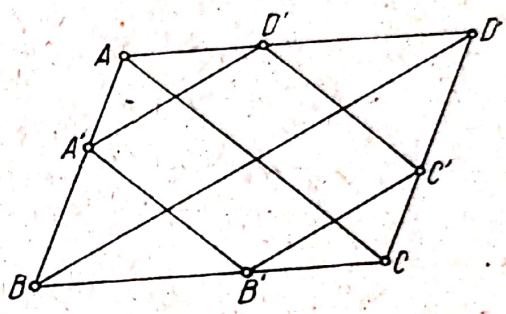


Fig. 30

Adunînd membru cu membru aceste rapoarte şi ţinînd seama că $\overline{AC} = \overline{BD}$, avem

$$\frac{\overline{A'D'} + \overline{A'B'}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AA'} + \overline{A'B}}{\overline{AB}} = 1,$$

adică

$$\overline{A'D'} + \overline{A'B'} = \overline{BD}.$$

De aici rezultă că perimetrul paralelogramului $A'B'C'D'$ este egal cu $2 \cdot \overline{BD}$.

b) Ducînd $A'D'$ paralelă cu BD, $A'B'$ paralelă cu AC şi $D'C'$ paralelă cu AC, vom avea şi $B'C'$ paralelă cu BD (fig. 30). Într-adevăr, din şirul de rapoarte egale

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{CD}}, \quad \text{rezultă} \quad \frac{\overline{CB'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{CD}},$$

ceea ce înseamnă că $B'C'$ este paralelă cu BD.

Dacă notăm $\overline{AC} = d_1$; $\overline{BD} = d_2$; $\overline{A'B'} = l_1$ și $\overline{A'D'} = l_2$, avem

$$\frac{l_2}{d_2} = \frac{\overline{AD'}}{\overline{AD}} \text{ și } \frac{l_1}{d_1} = \frac{\overline{D'D}}{\overline{AD}}.$$

Adunînd membru cu membru aceste egalități, obținem

$$\frac{l_1}{d_1} + \frac{l_2}{d_2} = \frac{\overline{D'D} + \overline{AD'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AD}} = 1.$$

160. Pe segmentul de dreaptă $\overline{AB} = 4a$ se iau segmentele $\overline{AO_1} = \overline{O_1C} = \overline{CO_2} = \overline{O_2B} = a$. Se duc cercurile cu centrele în O_1 și O_2 de rază a și cercul cu centrul în C de rază $2a$. Din A se duce o tangentă la cercul cu centrul O_2, notîndu-se cu T punctul de tangență și cu R și S punctele în care tangenta taie a doua oară cercurile cu centrele în O_1 și respectiv C. Se cere:

a) să se demonstreze că $\overline{RT} = \overline{TS} = \frac{1}{2}\overline{AR}$;

b) se duc perpendicularele în B și C pe AB; ele taie dreapta AT respectiv în P și Q. Să se arate că $\overline{PT} = 2\overline{QT}$;

c) să se calculeze lungimile segmentelor $\overline{SB}$ și $\overline{QC}$.

Institutul politehnic, București, 1960.

R. a) Segmentele $\overline{CR}$, $\overline{O_2T}$ și $\overline{BS}$ fiind perpendiculare pe $ARTS$ (fig. 31) sînt și paralele între ele, de unde rezultă că AR, RT și ST sînt respectiv proporționale cu

$$\overline{AC} = 2a, \ \overline{CO_2} = a \text{ și } \overline{O_2B} = a,$$

deci

$$\overline{RT} = \overline{TS} = \frac{1}{2}\overline{AR}.$$

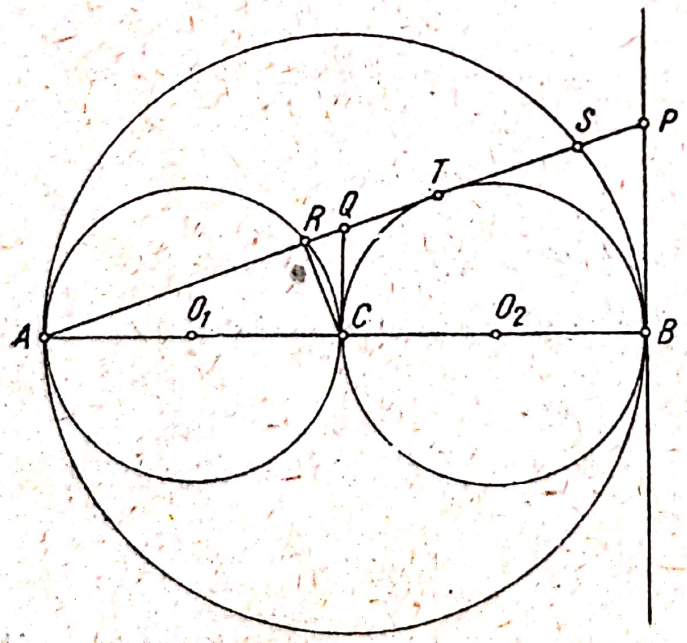


Fig. 31

b) Cunoscînd că $\overline{PT} = \overline{PB}$, $\overline{QT} = \overline{QC}$ și $\frac{\overline{PB}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{4a}{2a} = 2$, rezultă $\frac{\overline{PB}}{\overline{QC}} = 2$ și prin urmare $\overline{PT} = 2\overline{QT}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Din relația $\overline{AT}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AB} = 2a \cdot 4a = 8a^2$, deducem $\overline{AT} = 2a\sqrt{2}$, iar din asemănarea triunghiurilor SBA, TO_2A ($SB \parallel O_2T$), obținem $\frac{\overline{SB}}{\overline{O_2T}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AO_2}} = \frac{4a}{3a} = \frac{4}{3}$, de unde avem $\overline{SB} = \frac{4}{3}a$.

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice QCA, O_2TA (ambele au un același unghi ascuțit în A), avem

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{O_2T}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AT}} = \frac{2a}{2a\sqrt{2}}; \text{ prin urmare, } \overline{QC} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

161. Să se demonstreze că pătratul construit pe tangenta comună cercurilor descrise pe catetele unui triunghi dreptunghic, ca diametri, este echivalent cu triunghiul dat.

Facultatea de matematică și fizică, Cluj, 1953.

R. Să calculăm lungimea tangentei comune $\overline{MN}$ a cercurilor descrise pe catetele $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ luate ca diametri (fig. 32).

Ducem DE dreapta care unește mijloacele catetelor și DF paralela la NM. Avem $\overline{NM} = \overline{DF} = \sqrt{\overline{DE}^2 - \overline{FE}^2}$.

Dacă în triunghiul ABC notăm ipotenuza cu a și catetele $\overline{AC} = b$ și $\overline{AB} = c$, atunci rezultă

$$\overline{DE} = \frac{a}{2} \text{ și } \overline{FE} = \overline{ME} - \overline{ND} = \frac{c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{c-b}{2}.$$

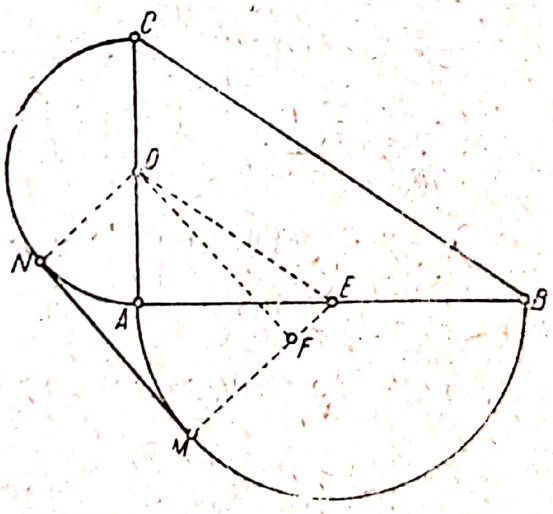


Fig. 32

Lungimea tangentei $\overline{NM}$ este în acest caz egală cu

$$\overline{DF} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{(c-b)^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2 - b^2 + 2bc}}{2} = \frac{\sqrt{2bc}}{2}$$

și, prin urmare,

$$\overline{NM}^2 = \overline{DF}^2 = \frac{bc}{2} = \text{aria } \Delta ABC.$$

162. În triunghiul ABC se duce MP paralelă cu AC. Din punctul M situat pe AB se duce o paralelă la BC, care întîlnește

pe AC în N, iar din punctul P situat pe BC se duce o paralelă la AB, care întîlnește pe AC în Q (fig. 33). Să se arate că:

a) punctele N și Q sînt, respectiv, egal depărtate de punctele A și C;

b) dacă $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$, să se calculeze segmentul $\overline{NQ}$ cu ajutorul laturii $\overline{AC}$ și al raportului k;

c) în ce caz punctele N și Q se confundă.

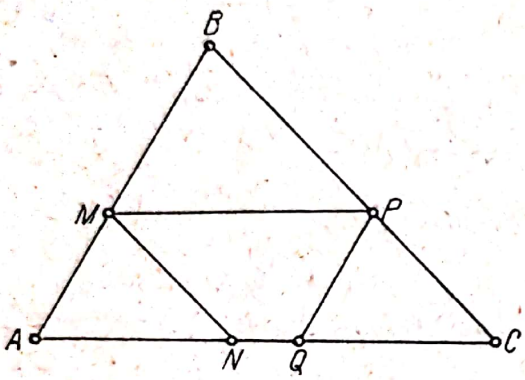


Fig. 33

Institutul de transport și căi ferate, București, 1954.

R. a) Avem șirul de rapoarte egale:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CA}}.$$

Din compararea primului și ultimului raport rezultă

$$\overline{AN} = \overline{QC}.$$

b) Segmentul $\overline{NQ}$ se exprimă pe baza rezultatului precedent, prin relația

$$\overline{NQ} = \overline{AC} - 2\,\overline{AN} = b - 2 \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}\, b,$$

unde am notat $\overline{AC} = b$.

Dat fiind că avem MN paralelă cu BC, rezultă

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AM} + \overline{MB}} = \frac{\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}}{\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} + 1} = \frac{k}{1+k},$$

deci

$$\overline{NQ} = b - \frac{2bk}{1+k} = \frac{b(1-k)}{1+k}.$$

c) Pentru ca N și Q să se confunde, trebuie să avem $\overline{NQ} = 0$, ceea ce implică

$$1 - k = 0 \text{ sau } k = 1,$$

prin urmare, punctul M trebuie să fie situat la mijlocul distanței $\overline{AB}$.

Scanned with OKEN Scanner

163. Fie $ABCD$ un trapez avînd baza mică $\overline{AB} = a$ și baza mare $\overline{DC} = b$. Pe latura AD se ia un punct M, astfel ca $\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}}$ să fie egal cu $\frac{p}{q}$. Prin M se duce paralela MN la cele două baze. Să se calculeze $\overline{MN}$ în funcție de a, b, p, q.

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

R. Ducem diagonala $\overline{AC}$, care intersectează în I paralela MN la baze (fig. 34). Din triunghiurile asemenea formate, rezultă

$$\frac{\overline{MI}}{b} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{\overline{AM}}{\overline{MD}}}{\frac{\overline{AM}}{\overline{MD}} + 1} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{p}{q} + 1} = \frac{p}{p+q}$$

și, prin urmare, avem

$$\overline{MI} = \frac{bp}{p+q}.$$

În mod analog, se obține

$$\overline{IN} = \frac{aq}{q+p}.$$

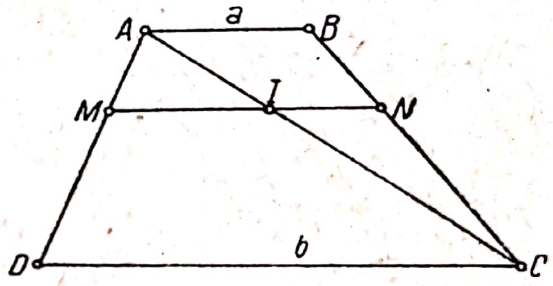


Fig. 34

Din egalitatea $\overline{MN} = \overline{MI} + \overline{IN}$ deducem

$$\overline{MN} = \frac{aq + bp}{q + p},$$

formulă valabilă pentru cazul cînd M se află între A și D. Dacă punctul M se află în exterior, pe una din prelungirile segmentului $\overline{AD}$. atunci lungimea segmentului $\overline{MN}$, limitat de către $\overline{AD}$ și $\overline{BC}$, este dată de expresia

$$\overline{MN} = \frac{aq - bp}{q - p},$$

după cum ușor se poate verifica.

164. Într-un cerc dat se consideră diametrul AB. Se duc coardele AC și BD, care se intersectează în interiorul cercului în punctul P. Să se arate că

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AP} + \overline{BD} \cdot \overline{BP}.$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

Scanned with OKEN Scanner

R. Ducem perpendiculara PN pe diametrul AB. Patrulaterele $NPCB$ și $NPDA$ sînt inscriptibile, avînd cîte două unghiuri opuse drepte. Avem, deci, relațiile

$$\overline{AB} \cdot \overline{AN} = \overline{AC} \cdot \overline{AP}, \qquad \overline{BA} \cdot \overline{BN} = \overline{BP} \cdot \overline{BD}.$$

Adunînd aceste egalități membru cu membru, obținem

$$\overline{AB}\,(\overline{AN} + \overline{BN}) = \overline{AC} \cdot \overline{AP} + \overline{BP} \cdot \overline{BD},$$

dar $\overline{AN} + \overline{BN} = \overline{AB}$, deci

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AP} + \overline{BP} \cdot \overline{BD}.$$

165. Se dă un cerc cu diametrul AB. În A se duce tangenta la cerc și pe ea se iau două puncte oarecare M și N, de o parte și de alta a lui A. Se duce dreapta BM care taie cercul în P și dreapta BN care taie cercul în Q.

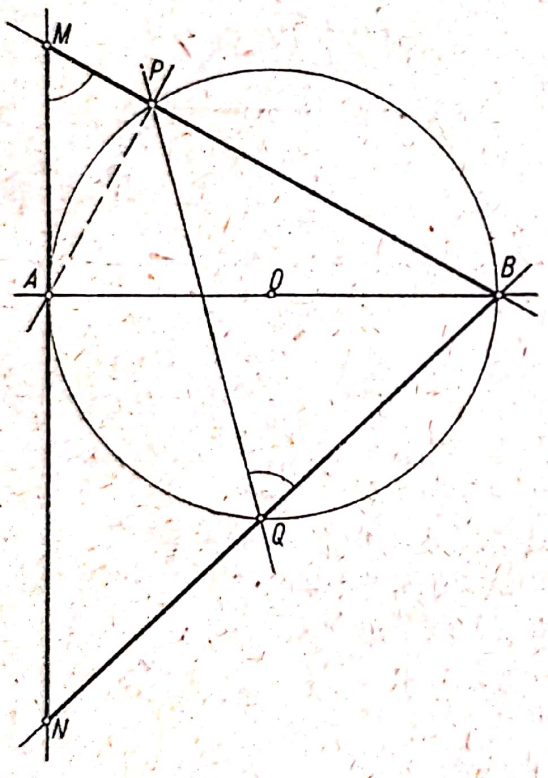


Fig. 35

a) Să se arate că unghiurile BMA și PQB sînt egale.

b) Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

c) Să se arate că $\overline{MP} \cdot \overline{MB} - \overline{NQ} \cdot \overline{NB} = \overline{MB}^2 - \overline{NB}^2$.

Institutul politehnic, București, 1962.

R. a) Deoarece (AP) este perpendiculară pe (PB), rezultă că avem (fig. 35)

$$\overset{\frown}{BMA} = \overset{\frown}{PAB} = \overset{\frown}{PQB},$$

pentru că $\overset{\frown}{PAB}$ și $\overset{\frown}{PQB}$ au aceeași măsură, arcul PB.

b) Aceasta rezultă din ceea ce s-a demonstrat la punctul 1°. Deoarece $\overset{\frown}{PQB} = \overset{\frown}{BMA}$ și din faptul că $\overset{\frown}{PQB} + \overset{\frown}{PQN} = 180°$, deducem $\overset{\frown}{PMN} + \overset{\frown}{PQN} = 180°$. Aceasta ne arată că patrulaterul $MPQN$ este inscriptibil.

Scanned with OKEN Scanner

c) Aplicînd punctelor M, N proprietatea puterii, obținem:

$$\overline{MP}\cdot\overline{MB} = \overline{MA}^2 \quad \text{și} \quad \overline{NQ}\cdot\overline{NB} = \overline{NA}^2.$$

Scăzînd cele două relații obținute, găsim

$$\overline{MP}\cdot\overline{MB} - \overline{NQ}\cdot\overline{NB} = \overline{MA}^2 - \overline{NA}^2 = \overline{MB}^2 - \overline{NB}^2.$$

166. Se dă un cerc de rază R și o tangentă fixă în punctul A de pe cerc.

Să se arate că două tangente paralele determină pe tangenta fixă două segmente $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, al căror produs este egal cu R^2.

Facultatea de geologie-geografie, București, 1954.

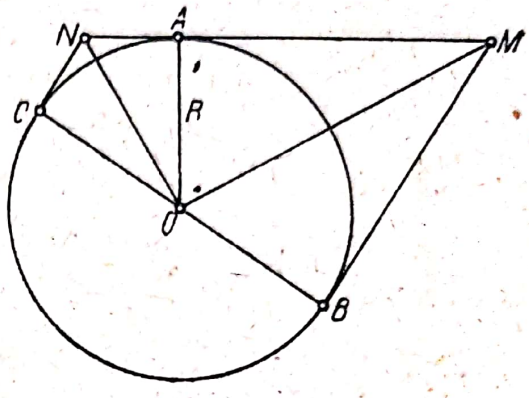


Fig. 36

R. Dreapta care unește punctele de contact B și C, ale celor două tangente paralele, este un diametru și este perpendicular pe direcția tangentelor. Dreptele care unesc punctele M, N cu O, centrul cercului, sînt bisectoare ale unghiurilor interne M și N, formate de paralelele BM și CN cu secanta MN (fig. 36). Rezultă de aici că triunghiul MON este dreptunghic în O, iar raza OA, dusă la punctul de contact al tangentei MN, este perpendiculară pe MN. Aplicînd relația dintre înălțimea unui triunghi dreptunghic și segmentele pe care ea le determină pe ipotenuză, deducem:

$$\overline{AM}\cdot\overline{AN} = \overline{OA}^2 = R^2.$$

167. Pe laturile unui triunghi dreptunghic ABC se construiesc triunghiuri asemenea între ele. Să se arate că aria triunghiului construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor triunghiurilor construite pe catete.

Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1954.

R. Notăm ariile triunghiurilor asemenea construite pe laturile a, b, c ale triunghiului dreptunghic ABC (fig. 37), respectiv, cu T_a, T_b, T_c.

Avînd în vedere că ariile figurilor asemenea sînt proporționale cu pătratele laturilor omoloage, avem

$$\frac{T_a}{a^2} = \frac{T_b}{b^2} = \frac{T_c}{c^2} = \frac{T_b + T_c}{b^2 + c^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din egalitatea primului raport cu ultimul raport și din faptul că $a^2 = b^2 + c^2$, rezultă

$$T_a = T_b + T_c.$$

Observație. Din raționamentul folosit în demonstrație se vede că în locul triunghiurilor asemenea construite pe $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ pot fi luate poligoane asemenea și teorema rămîne valabilă.

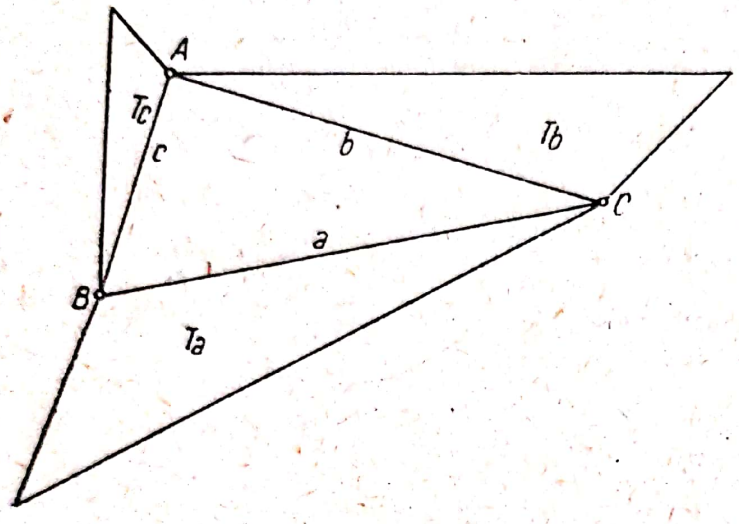


Fig. 37

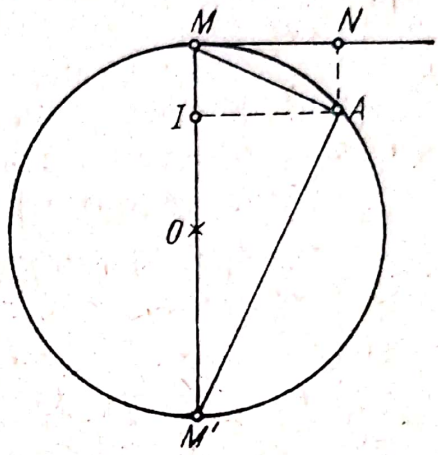


Fig. 38

168. Se dă un cerc de rază R și fie A și M două puncte de pe el. Considerăm punctul N proiecția lui A pe tangenta în M la cerc. Să se arate că

$$\overline{AM}^2 = 2R \cdot \overline{AN}.$$

Institutul forestier, Brașov, 1954.

R. Ducem diametrul MM' și proiecția I a punctului A pe acest diametru (fig. 38). În triunghiul dreptunghic format, avem

$$\overline{AM}^2 = \overline{MM'} \cdot \overline{MI}. \qquad (1)$$

Înlocuim $\overline{MM'} = 2R$ și $\overline{IM} = \overline{AN}$, după care relația (1) devine

$$\overline{AM}^2 = 2R \cdot \overline{AN}.$$

169. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul dreptunghic ABC, care are ipotenuza a și bisectoarele interioare $\overline{BB'}$ și $\overline{CC'}$.

a) Să se stabilească relația $\overline{IB} \cdot \overline{IC} = \dfrac{\overline{BB'} \cdot \overline{CC'}}{2}$.

b) Reciproc, să se arate că dacă într-un triunghi există relația precedentă, triunghiul este dreptunghic.

c) In cazul triunghiului dreptunghic să se determine unghiurile B și C, dacă

$$\overline{BB'} \cdot \overline{CC'} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1).$$

Facultatea de matematică și fizică, București, 1960.

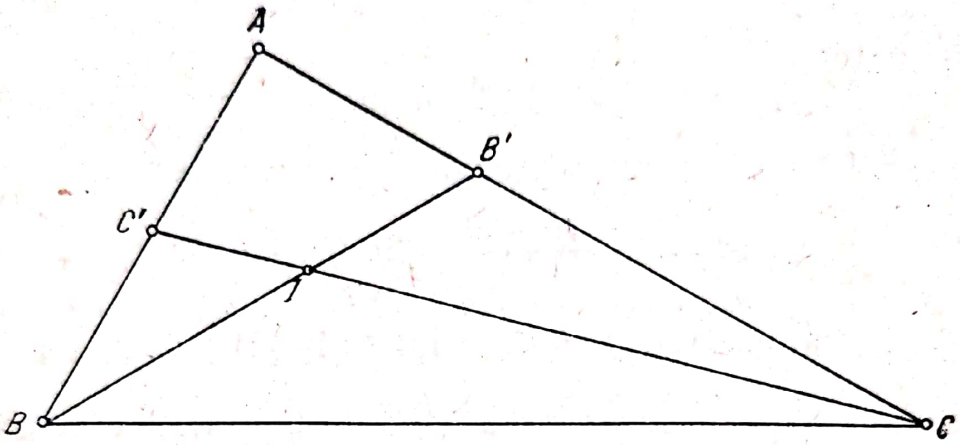


Fig. 39

R. a) Vom calcula raportul

$$u = \frac{\overline{IB} \cdot \overline{IC}}{\overline{BB'} \cdot \overline{CC'}}$$

în cazul unui triunghi oarecare și vom demonstra că în cazul triunghiului dreptunghic acest raport este egal cu $\frac{1}{2}$.

Dacă I este punctul de întîlnire a bisectoarelor triunghiului ABC cu laturile $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ și $\overline{AB} = c$ (fig. 39), atunci AI fiind bisectoare în triunghiurile ABB', ACC', avem

$$\frac{\overline{BI}}{c} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{BI} + \overline{IB'}}{c + \overline{AB'}} = \frac{\overline{BB'}}{c + \overline{AB'}}$$

și

$$\frac{\overline{CI}}{b} = \frac{\overline{IC'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{CI} + \overline{IC'}}{b + \overline{AC'}} = \frac{\overline{CC'}}{b + \overline{AC'}}.$$

Rezultă:

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{BB'}} \cdot \frac{\overline{CI}}{\overline{CC'}} = \frac{bc}{(b + AC')(c + \overline{AB'})}.$$

Ţinînd seama că $\overline{AC'} = \frac{bc}{a+b}$ şi $\overline{AB'} = \frac{bc}{a+c}$, deducem

$$u = \frac{\overline{BI} \cdot \overline{CI}}{\overline{BB'} \cdot \overline{CC'}} = \frac{(a+c)(a+b)}{4p^2} = \\ = \frac{(2p-b)(2p-c)}{4p^2} = \frac{2ap+bc}{4p^2}, \tag{1}$$

unde s-a notat

$$2p = a + b + c.$$

În cazul triunghiului dreptunghic, putem scrie

$$bc = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2} = 2p(p-a).$$

Substituind această expresie a lui bc în (1), obţinem $u = \frac{1}{2}$.

b) Dacă $\frac{2ap+bc}{4p^2} = \frac{1}{2}$, rezultă $\frac{bc}{2} = p(p-a)$. Această ultimă relaţie se mai poate scrie

$$\frac{(b+c)^2 - (b^2+c^2)}{4} = \frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}$$

sau

$$\frac{(b+c)^2 - (b^2+c^2)}{4} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4}.$$

Deducem $b^2 + c^2 = a^2$, ceea ce demonstrează că ABC este triunghi dreptunghic.

c) În cazul triunghiului dreptunghic, avem $c = \overline{BB'} \cos\frac{B}{2}$; $b = \overline{CC'} \cos\frac{C}{2}$, iar relaţia dată devine

$$\overline{BB'} \cdot \overline{CC'} = \frac{bc}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1).$$

Ţinînd seama că $c = a\sin C = 2a\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$ şi $b = a\sin B = 2a\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$, obţinem

$$4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$$

sau

$$\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Rezultă sistemul

$$\begin{cases} B+C=90^\circ \\ \cos\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Deoarece unghiurile B, C sînt ascuţite, fiind unghiurile unui triunghi dreptunghic, avem

$$B+C=90^\circ \quad \text{şi} \quad B-C=15^\circ;$$

prin urmare, $B=52^\circ30'$ şi $C=37^\circ30'$.

170. Se dă dreptunghiul $ABCD$. Perpendiculara din A pe diagonala BD intersectează latura BC în F. Să se demonstreze că

$$\overline{AB}^2=\overline{BF}\cdot\overline{BC}.$$

Institutul forestier, Braşov, 1954.

R. Paralela din F la latura CD intersectează prelungirea laturii AD în E (fig. 40). Triunghiurile dreptunghice AEF şi BCD sînt asemenea, de unde rezultă

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{DC}}. \qquad (1)$$

Înlocuind $\overline{EF}=\overline{AB}$; $\overline{AE}=\overline{BF}$ şi $\overline{DC}=\overline{AB}$, relaţia (1) devine

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{AB}},$$

de unde

$$\overline{AB}^2=\overline{BF}\cdot\overline{BC}.$$

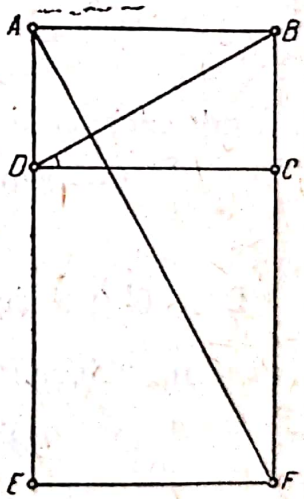


Fig. 40

171. Se dă triunghiul ABC şi se notează cu O centrul cercului circumscris. Se duce diametrul AD şi perpendiculara din B pe acest diametru, care intersectează pe AC în punctul E.

a) Să se arate că $\overline{AB}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AE}$.

b) Să se calculeze segmentul $\overline{DE}$, cunoscînd laturile $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$ şi raza R a cercului circumscris. Caz particular: $R=a$.

Institutul tehnic, Galaţi, 1954.

R. a) Dreapta BE fiind perpendiculară pe AD (fig. 41), rezultă că unghiul EBA are drept complement unghiul A_1; de asemenea, unghiul ACB are drept complement pe C_2, pentru că AD este un diametru. Unghiurile A_1 și C_2 sînt egale ca avînd aceleași măsuri — jumătatea arcului BD — și prin urmare, $\overset{\frown}{EBA} = \overset{\frown}{ACB}$. Triunghiurile ABE și ABC, avînd cîte două unghiuri respectiv egale, sînt asemenea; rezultă deci proporționalitatea laturilor

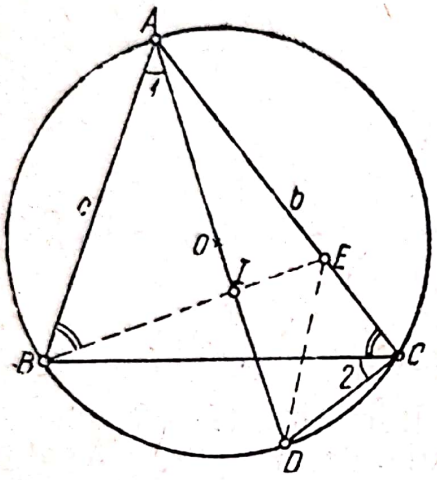


Fig. 41

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \text{ și deci } \overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AE}.$$

b) În triunghiul dreptunghi ECD, avem

$$\overline{ED}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{CD}^2,$$

însă

$$\overline{EC}^2 = (\overline{AC} - \overline{AE})^2 = \overline{AC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{AE}^2,$$

iar

$$\overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AC}^2,$$

de unde deducem

$$\overline{ED}^2 = \overline{AC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{AC}^2 = -2\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2.$$

Din relația demonstrată la pct. a) deducem $\overline{AE} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}}$, pe care o introducem în expresia de mai sus și obținem

$$\overline{ED}^2 = -2\overline{AB}^2 + \frac{\overline{AB}^4}{\overline{AC}^2} + \overline{AD}^2.$$

Înlocuim $\overline{AB} = c$; $\overline{AC} = b$ și $\overline{AD} = 2R$; obținem

$$\overline{DE}^2 = \frac{c^4 - 2b^2c^2 + 4b^2R^2}{b^2} = \frac{c^4}{b^2} + 2(2R^2 - c^2).$$

172. Într-un triunghi ABC oarecare se duce din A înălțimea AD, iar din D se duce perpendiculara DE pe AB. Să se calculeze ariile triunghiurilor AED și BED în funcție de segmentele date AB și AD. În ce caz aceste arii sînt egale?

Institutul de construcții, București, 1955.

Scanned with OKEN Scanner

R. Notînd $\overline{AB} = c$ și $\overline{AD} = h$, avem

$$\overline{BD} = \sqrt{c^2 - h^2} \text{ și aria } \Delta ABD = \frac{h\sqrt{c^2-h^2}}{2}.$$

Din asemănarea triunghiurilor AED și ABD (fig. 42), rezultă

$$\frac{\text{aria } AED}{\text{aria } ABD} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{h^2}{c^2}$$

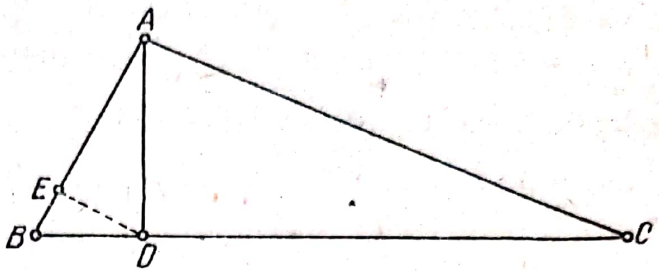


Fig. 42

și apoi

$$\text{aria } AED = \frac{h^2}{c^2} \cdot \text{aria } ABD = \frac{h^2}{c^2} \cdot \frac{h\sqrt{c^2-h^2}}{2} = \frac{h^3\sqrt{c^2-h^2}}{2c^2}.$$

La fel, avem

$$\frac{\text{aria } BED}{\text{aria } ABD} = \frac{\overline{BD}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{c^2-h^2}{c^2},$$

de unde rezultă

$$\text{aria } BED = \frac{c^2-h^2}{c^2} \cdot \text{aria } ABD = \frac{c^2-h^2}{c^2} \cdot \frac{h\sqrt{c^2-h^2}}{2} = \frac{h(c^2-h^2)^{\frac{3}{2}}}{2c^2}.$$

Pentru ca să avem

$$\text{aria } AED = \text{aria } BED, \text{ trebuie } \frac{h(c^2-h^2)^{\frac{3}{2}}}{2c^2} = \frac{h^3(c^2-h^2)^{\frac{1}{2}}}{2c^2}.$$

Relația este verificată pentru $h = c$ (caz banal, latura $\overline{AB}$ coincide cu $\overline{AD}$), sau pentru $c = h\sqrt{2}$, cînd triunghiul dreptunghic ABD este isoscel.

173. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC. Pe cateta $\overline{AB}$ se ia un punct M astfel ca $\overline{AC}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AB}$ și se notează cu P proiecția punctului M pe ipotenuza BC. Se cere:

a) să se găsească locul geometric al punctului P, cînd vîrful B al unghiului se mișcă pe dreapta AB;

b) să se arate că dreapta MP trece printr-un punct fix.

Institutul de transporturi și căi ferate, București, 1955.

R. a) Relația dată se mai poate scrie sub forma

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},$$

ceea ce demonstrează că triunghiurile dreptunghice CAM și BAC sînt asemenea. Rezultă că unghiurile AMC și ACB sînt egale. În patrulaterul inscriptibil $AMPC$, avem $\widehat{M_1} = \widehat{P_2}$ (fig. 43), de unde deducem că $\widehat{P_2} = \widehat{ACB}$. Triunghiul PAC, avînd două unghiuri egale, este isoscel, deci $\overline{PA} = \overline{CA} = \text{const}$, deci locul punctului P este un cerc cu centrul în A și raza $\overline{PA}$ egală cu lungimea catetei $\overline{AC}$.

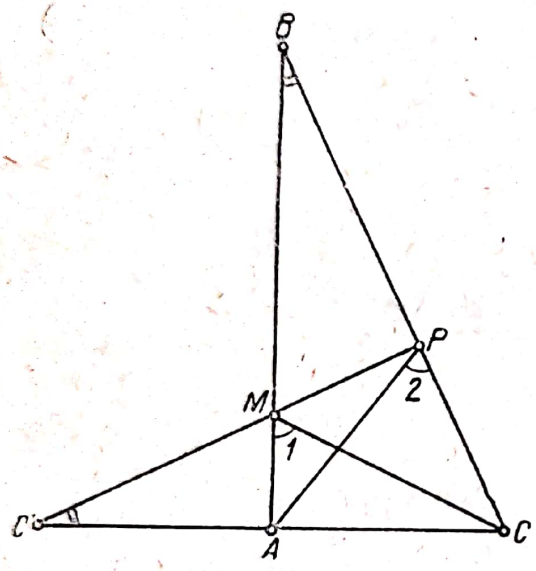


Fig. 43

b) Prelungim MP pînă la întretăierea ei cu AC în punctul C'. Unghiurile ABC și $PC'C$ sînt egale ca avînd laturi perpendiculare, iar $\widehat{ABC} = \widehat{MCA}$, triunghiurile ABC și ACM fiind asemenea. Rezultă că triunghiul $C'MC$ este isoscel și, prin urmare, $\overline{AC'} = \overline{AC}$. Dreapta MP variabilă trece prin punctul fix C' simetricul lui C față de A.

174. Se dă un unghi drept xOy și un triunghi isoscel variabil MON ($\overline{MO} = \overline{MN}$) situat în acest unghi cu vîrful O fix și baza ON dirijată după Ox. În plus, raza cercului înscris în triunghi are o valoare constantă r. Să se demonstreze că bisectoarea unghiului ONM trece printr-un punct fix situat pe Oy și că dreapta MN rămîne tangentă unui cerc fix.

Institutul de petrol și gaze, București, 1955.

R. Bisectoarea vîrfului N taie Oy în L (fig. 44), iar aceea a vîrfului M trece prin P mijlocul bazei și este perpendiculară pe bază. De aici rezultă că $\overline{OL} = 2\overline{PI} = 2r$, deci L este un punct fix pe Oy.

Punctul L fiind situat pe bisectoarea unghiului N, este egal depărtat de laturile unghiului. Rezultă deci că dreapta MN rămîne

Scanned with OKEN Scanner

la distanța $2r$ de punctul fix L. Dreapta MN este deci tangentă la cercul cu centrul în L și cu raza egală cu $2r$.

175. Se consideră un cerc de rază R și un triunghi isoscel circumscris acestui cerc, avînd unghiul $\hat{A} = 120°$ ($\overline{AB} = \overline{AC}$).

Să se calculeze laturile triunghiului ABC.

Institutul de petrol și gaze, București, 1955.

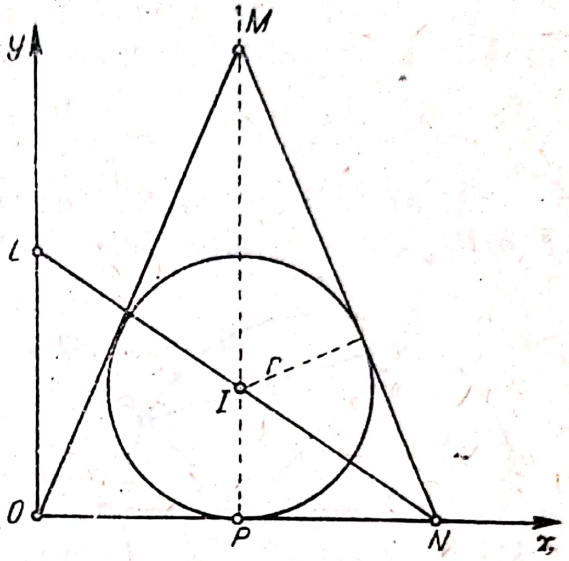


Fig. 44

R. Unghiul A fiind de 120°, rezultă $\hat{B} = \hat{C} = 30°$ și, prin urmare, $\overline{AB} = 2\overline{AI}$ (fig. 45). Notăm $\overline{AI} = x$; atunci

$$\overline{AB} = 2x \text{ și } \overline{BC} = 2x\sqrt{3}.$$

Din asemănarea triunghiurilor AOM și AIC (O centrul cercului înscris și M punctul de tangență al laturii AC), deducem

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}}, \text{ sau } \frac{R}{x\sqrt{3}} = \frac{x - R}{2x},$$

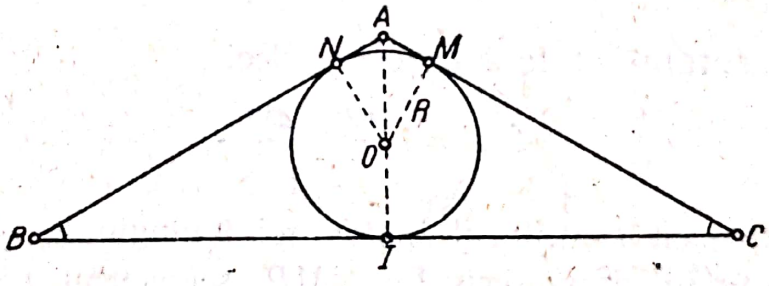


Fig. 45

de unde

$$x = \frac{R(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}}.$$

Laturile triunghiului sînt, deci,

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \frac{2R(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{2R}{3}(3 + 2\sqrt{3})$$

și

$$\overline{BC} = 2R(2 + \sqrt{3}).$$

Scanned with OKEN Scanner

176. Se dă un cerc cu centrul în O și cu raza R și un punct M pe diametrul AB, la distanța d de centrul cercului. Se rotesc în jurul punctului M cele două laturi perpendiculare $P'MP$ și $T'MT$. Notăm cu S aria triunghiului PMT și cu S' aria triunghiului $P'MT'$.

a) Să se calculeze produsul SS' în funcție de R și d.

b) Cercul circumscris triunghiului PMT poate fi tangent la AB? În caz afirmativ, să se arate că $T'P'$ este paralelă cu AB.

Institutul de petrol și gaze, București, 1955.

R. a) Ariile S și S' ale triunghiurilor dreptunghice TMP și $T'MP'$ (fig. 46) sînt date de formulele

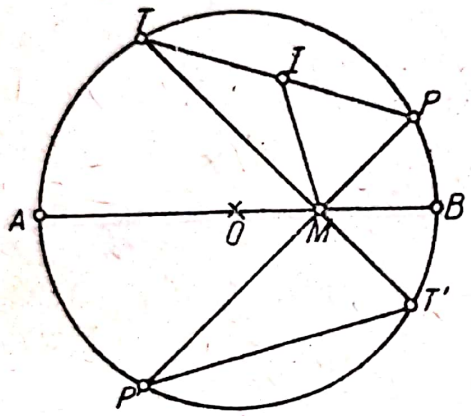


Fig. 46

$$S = \frac{\overline{MT}\cdot\overline{MP}}{2}, \quad S' = \frac{\overline{MT'}\cdot\overline{MP'}}{2}.$$

Produsul lor este deci

$$SS' = \frac{(\overline{MT}\cdot\overline{MT'})\,(\overline{MP}\cdot\overline{MP'})}{4}.$$

Dar avem

$$\overline{MT}\cdot\overline{MT'} = \overline{MP}\cdot\overline{MP'} = \overline{MA}\cdot\overline{MB} = d^2 - R^2$$

(puterea punctului M față de cerc), deci

$$SS' = \frac{(R^2 - d^2)^2}{4}.$$

b) Notăm cu I mijlocul ipotenuzei triunghiului dreptunghic TMP. În cercul circumscris lui TMP, segmentul $\overline{IM}$ este raza ce trece prin M. Pentru ca acest cerc să fie tangent la AB, este necesar ca IM să fie perpendiculară pe AB sau unghiurile PTM și PMB să fie egale.

Din această egalitate și din relațiile

$$\widehat{PTM} = \text{măs}\,\frac{\widehat{PB} + \widehat{BT'}}{2} \quad \text{și} \quad \widehat{PMB} = \text{măs}\,\frac{\widehat{PB} + \widehat{AP'}}{2}$$

rezultă $\widehat{BT'} = \widehat{AP'}$, ceea ce implică să avem $P'T'$ paralelă cu diametrul AB.

Scanned with OKEN Scanner

177. Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N pe latura BC, astfel ca

$$\widehat{BAM} = \widehat{MAN} = \widehat{NAC}.$$

a) Să se demonstreze relația

$$\overline{AB} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{NC} = \overline{AC} \cdot \overline{AN} \cdot \overline{BM}.$$

b) Fie R intersecția perpendicularei în M pe dreapta AM cu AC și S intersecția perpendicularei în N pe AN cu AB. Să se arate că triunghiurile ASM și ANR sînt echivalente.

Institutul de mine, București, 1955.

R. a) Relația de demonstrat este valabilă pentru cazul mai general cînd avem numai

$$\widehat{BAM} = \widehat{NAC}.$$

Ducem din M și N perpendicularele MI și NK pe laturile AB și AC (fig. 47). Triunghiurile dreptunghice AIM și AKN sînt asemenea, avînd unghiurile IAM și NAK egale prin ipoteză.

Rezultă deci

$$\frac{\overline{IM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{NK}}{\overline{AN}}.$$

Înmulțind termenii primului raport cu $\overline{AB}$ și pe ai celui de-al doilea cu $\overline{AC}$, avem

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{IM}}{\overline{AB} \cdot \overline{AM}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{NK}}{\overline{AC} \cdot \overline{AN}}.$$

Dacă notăm cu h perpendiculara dusă din A pe BC, putem scrie

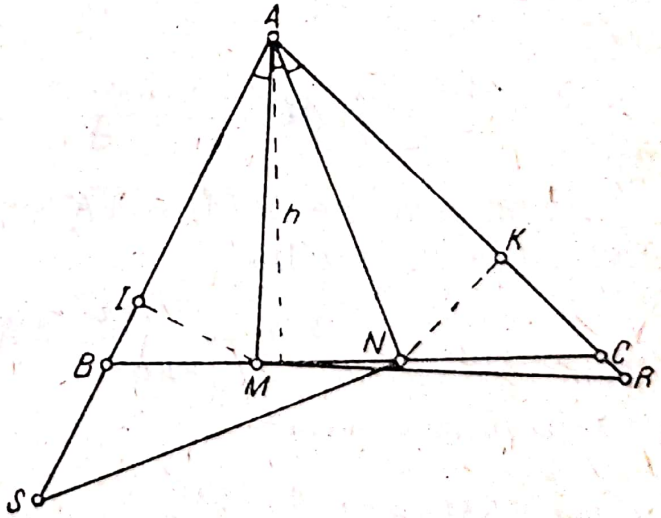


Fig. 47

$$\overline{AB} \cdot \overline{IM} = \overline{BM} \cdot h \quad \text{și} \quad \overline{AC} \cdot \overline{NK} = \overline{NC} \cdot h.$$

În acest caz, ultima proporție devine

$$\frac{\overline{BM} \cdot h}{\overline{AB} \cdot \overline{AM}} = \frac{\overline{NC} \cdot h}{\overline{AC} \cdot \overline{AN}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scriind că produsul extremilor este egal cu acel al mezilor și simplificînd cu h, obținem relația ce trebuie demonstrată

$$\overline{AB} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{NC} = \overline{AC} \cdot \overline{AN} \cdot \overline{BM}.$$

b) Triunghiurile dreptunghice ASN și AMR sînt asemenea pentru că au

$$\widehat{SAN} = \widehat{RAM},$$

unghiurile fiind compuse din unghiurile egale prin ipoteză ($\widehat{BAM} = \widehat{NAC}$) și unghiul comun $\widehat{MAN}$.

Deducem, deci,

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{AM}}.$$

Notînd valoarea comună a rapoartelor cu k, avem

$$\overline{AS} = k\overline{AN} \quad \text{și} \quad \overline{AR} = k\overline{AM}.$$

Să evaluăm ariile ASM și ARN

$$\text{aria } ASM = \frac{\overline{AS} \cdot \overline{MI}}{2} = \frac{k \cdot \overline{AN} \cdot \overline{MI}}{2}$$

și

$$\text{aria } ARN = \frac{\overline{AR} \cdot \overline{NK}}{2} = \frac{k \cdot \overline{AM} \cdot \overline{NK}}{2}.$$

Avînd în vedere că $\overline{IM}$ și $\overline{NK}$ sînt înălțimi și în triunghiurile ABM și ANC, rezultă

$$\overline{IM} = \frac{\overline{BM} \cdot h}{\overline{AB}}, \quad \overline{NK} = \frac{\overline{NC} \cdot h}{\overline{AC}}$$

și, prin urmare, avem

$$\text{aria } ASM = \frac{kh}{2} \frac{\overline{AN} \cdot \overline{BM}}{\overline{AB}}, \quad \text{iar} \quad \text{aria } ARN = \frac{kh}{2} \frac{\overline{AM} \cdot \overline{NC}}{\overline{AC}}.$$

Aceste arii sînt egale pentru că avem

$$\frac{\overline{AN} \cdot \overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{NC}}{\overline{AC}},$$

după cum reiese din relația demonstrată la punctul a).

Scanned with OKEN Scanner

178. Se consideră două puncte fixe A și B și un punct fix P situat pe prelungirea segmentului $\overline{AB}$. Fie PT tangenta dusă din P la un cerc oarecare ce trece prin A și B. Care este locul geometric al punctului T?

Academia tehnică militară, 1955.

R. Din relația cunoscută $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ (fig. 48) rezultă că lungimea $\overline{TP}$ este constantă. Locul lui T este deci un cerc cu centrul în P și cu raza egală cu $\sqrt{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}$.

179. Pe bisectoarea unui unghi drept xOy se ia un punct fix A. O dreaptă oarecare ce trece prin A intersectează laturile Ox și Oy, respectiv în M și N. Să se demonstreze că avem

$$\frac{1}{\overline{OM}} + \frac{1}{\overline{ON}} = \frac{1}{k}.$$

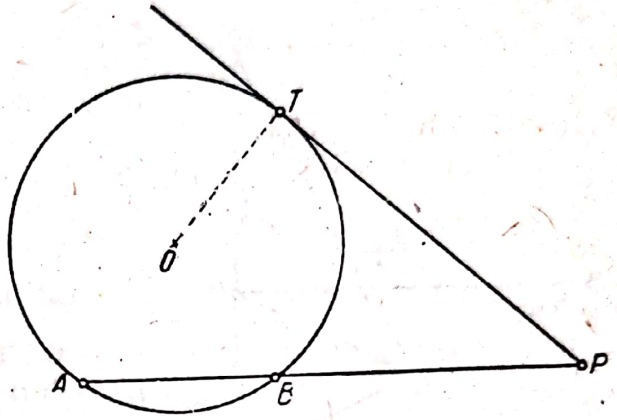


Fig. 48

Care este interpretarea geometrică a constantei k?

Academia tehnică militară, 1955.

R. Proiectăm punctul fix A (fig. 49), de pe bisectoarea unghiului drept xOy, pe Ox și Oy în B și C. Figura $OBAC$ este un pătrat a cărui latură s-o notăm cu l. Din asemănarea triunghiurilor OMN și CAN rezultă

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{CN}}$$

sau

$$\frac{\overline{OM}}{l} = \frac{\overline{ON}}{\overline{ON} - l}.$$

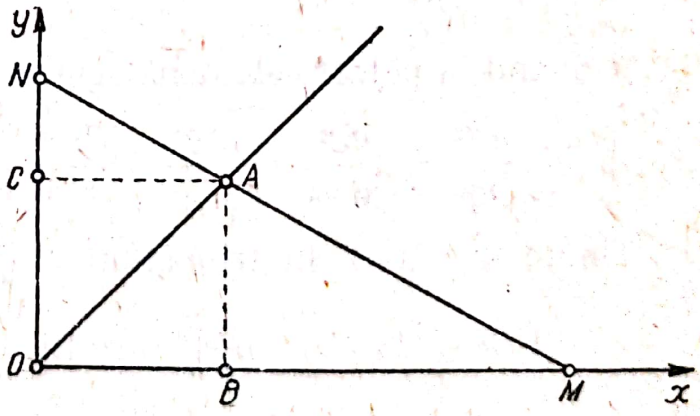


Fig. 49

Scriind că produsul mezilor este egal cu al extremilor obținem

$$l \cdot \overline{ON} = \overline{OM} \cdot \overline{ON} - l \cdot \overline{OM}.$$

Trecînd pe $l \cdot \overline{OM}$ în membrul întîi și împărțind peste tot cu produsul $l \cdot \overline{OM} \cdot \overline{ON}$, deducem relația cerută

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \frac{1}{l} = \frac{1}{k},$$

de unde se vede și semnificația constantei k. Ea este tocmai latura pătratului $OBAC$.

180. O dreaptă oarecare, dusă prin punctul de intersecție a diagonalelor unui dreptunghi $ABCD$ intersectează laturile opuse AB și CD în M, respectiv N, iar prelungirile laturilor opuse BC și AD în P, respectiv Q. Să se arate că avem

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{PQ}^2} + \frac{\overline{BC}^2}{\overline{MN}^2} = 1.$$

Institutul de industrie ușoară. Iași, 1955.

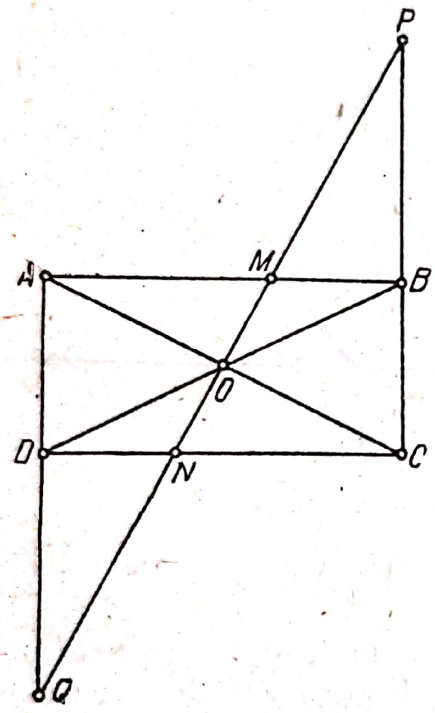


Fig. 50

R. Din asemănarea triunghiurilor MBP și AMQ (fig. 50) rezultă

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MP}},$$

iar din triunghiurile asemenea MBP și NCP avem

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{MP}}.$$

Ridicînd la pătrat cele două egalități și adunîndu-le, obținem

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{PQ}^2} + \frac{\overline{BC}^2}{\overline{MN}^2} = \frac{\overline{MB}^2}{\overline{MP}^2} + \frac{\overline{BP}^2}{\overline{MP}^2} = \frac{\overline{MB}^2 + \overline{BP}^2}{\overline{MP}^2}.$$

Ținînd seamă că în triunghiul dreptunghic MBP avem

$$\overline{MB}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{MP}^2, \quad \text{rezultă} \quad \frac{\overline{AB}^2}{\overline{PQ}^2} + \frac{\overline{BC}^2}{\overline{MN}^2} = 1.$$

181. Fie AB un diametru fix al unui cerc dat și M un punct variabil pe acest cerc. Tangenta dusă în punctul M intersectează tangentele duse în A și B, în punctele P și Q. Să se arate că produsul $\overline{AP} \cdot \overline{BQ}$ este constant (nu depinde de poziția punctului M).

Facultatea de matematică și fizică, Cluj, 1955.

Scanned with OKEN Scanner

R. Ducem raza punctului M (fig. 51) (ea este perpendiculară pe tangenta în M). Triunghiul POQ este dreptunghic pentru că OP și OQ sînt bisectoarele unghiurilor interioare P și Q, formate de paralelele AP și BQ tăiate de secanta PQ. De asemenea, avem $\overline{MP} = \overline{PA}$ și $\overline{QM} = \overline{QB}$, ca fiind tangente exterioare duse din cîte un același punct la cerc. Aplicînd teorema înălțimii în triunghiul dreptunghic QOP, avem relația

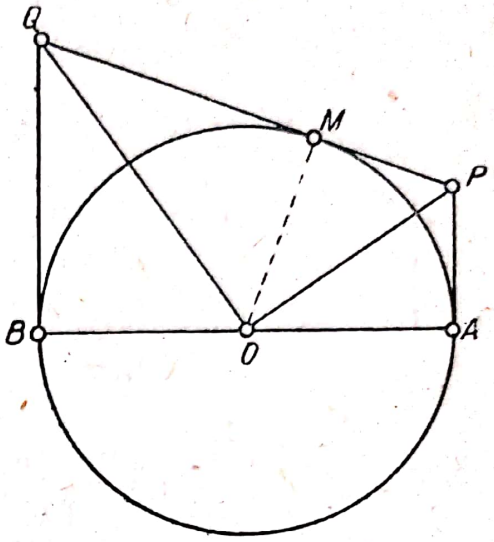


Fig. 51

$$\overline{OM}^2 = \overline{MP} \cdot \overline{MQ},$$

sau

$$R^2 = AP \cdot BQ,$$

ceea ce ne dovedește justețea afirmației.

182. Se dau două cercuri tangente exterior cu razele r și R și o tangentă comună exterioară a lor. Să se calculeze razele celor două cercuri tangente cercurilor date și tangentei comune dată.

Facultatea de matematică și fizică, Cluj, 1955.

R. Să notăm cu A' și B' punctele de tangență cu dreapta dată (fig. 52) a cercurilor A și B de rază R și r, iar cu C' și D' punctele de tangență la aceeași dreaptă, a cercurilor C și D, ale căror raze α și β le căutăm. Lungimea tangentei comune $A'B'$ a cercurilor de raze R și r este dată de formula

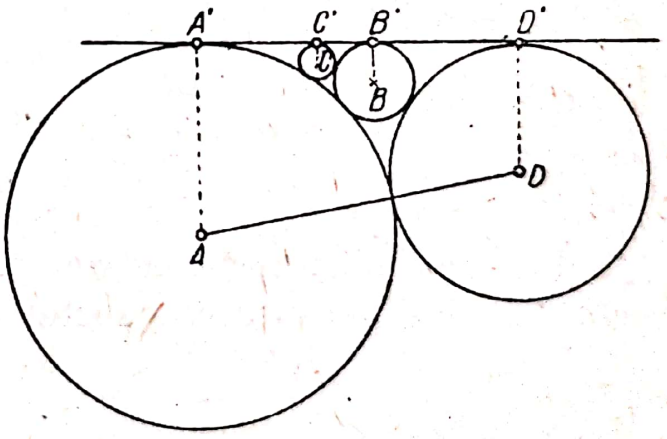


Fig. 52

$$\overline{A'B'} = 2\sqrt{Rr}\ *.$$

*Ea se obține observînd că această tangentă comună este o catetă a triunghiului dreptunghic în care ipotenuza și cealaltă catetă sînt $R + r$ și $R - r$. Se aplică apoi teorema lui *Pitagora* în acest triunghi dreptunghic.

În mod analog avem

$$\overline{A'C'} = 2\sqrt{R\alpha};\ \overline{C'B'} = 2\sqrt{r\alpha};\ \overline{A'D'} = 2\sqrt{R\beta} \text{ și } \overline{B'D'} = 2\sqrt{r\beta}.$$

Înlocuind expresiile date în egalităţile evidente

$$\overline{A'C'} + \overline{C'B'} = \overline{A'B'};\ \overline{A'D'} - \overline{B'D'} = \overline{A'B'},$$

obţinem

$$2\sqrt{R\alpha} + 2\sqrt{r\alpha} = 2\sqrt{Rr},$$

şi

$$2\sqrt{R\beta} - 2\sqrt{r\beta} = 2\sqrt{Rr}.$$

de unde deducem formulele

$$\sqrt{\alpha} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}} \text{ şi } \sqrt{\beta} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} - \sqrt{r}},$$

care ne dau razele α şi β ale cercurilor C şi D.

183. Din mijlocul D al catetei $\overline{AB}$ a triunghiului ABC se coboară perpendiculara $\overline{DE}$ pe ipotenuza $\overline{BC}$. Să se arate că avem relaţiile

$$\overline{EC}^2 - \overline{EB}^2 = \overline{AC}^2, \tag{1}$$

$$\overline{EC}^2 + \overline{EB}^2 = \frac{\overline{BC}^4 + \overline{AC}^4}{2\,\overline{BC}^2}. \tag{2}$$

Institutul pedagogic, Timişoara, 1956.

R. 1) Ducînd perpendiculara AA' pe ipotenuză (fig. 53), avem $\overline{EA'} = \overline{BE}$ pentru că punctul D este mijlocul segmentului $\overline{AB}$. Rezultă că lungimea segmentului $\overline{EC}$ este dată de

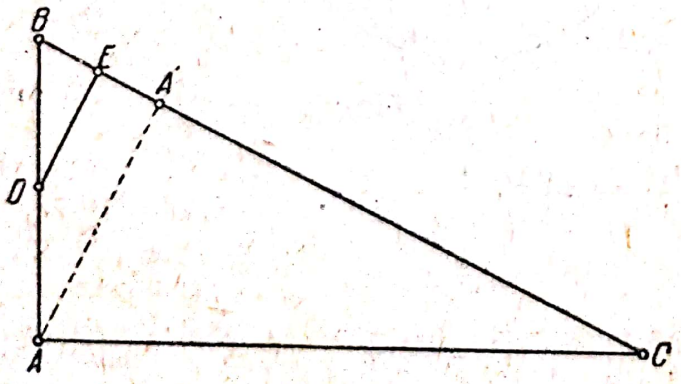


Fig. 53

$$\overline{EC} = \overline{EA'} + \overline{A'C} = \overline{B} + \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}},$$

de unde avem

$$\overline{EC} - \overline{EB} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}}.$$

Înmulțind ambii membrii ai ultimei egalități cu $\overline{EC} + \overline{EB} = \overline{BC}$, obținem

$$(\overline{EC} - \overline{EB})(\overline{EC} + \overline{EB}) = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}} \cdot \overline{BC} \text{ sau } \overline{EC}^2 - \overline{EB}^2 = \overline{AC}^2.$$

2) Deoarece $\overline{EB} = \frac{\overline{A'B}}{2}$, rezultă $\overline{EB} = \frac{\overline{AB}^2}{2\,\overline{BC}}$ și din relația precedentă avem $\overline{EC}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{AC}^2$, astfel că $\overline{EC}^2 + \overline{EB}^2 = (\overline{EB}^2 + \overline{AC}^2) + \overline{EB}^2 = 2 \cdot \overline{EB}^2 + \overline{AC}^2 = 2 \cdot \frac{\overline{AB}^4}{4\overline{BC}^2} + \overline{AC}^2$,

sau

$$\overline{EC}^2 + \overline{EB}^2 = \frac{\overline{AB}^4}{2\overline{BC}^2} + \overline{AC}^2 = \frac{(\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2)^2 + 2\,\overline{BC}^2 \cdot \overline{AC}^2}{2\,\overline{BC}^2} =$$

$$= \frac{\overline{BC}^4 + \overline{AC}^4}{2\,\overline{BC}^2},$$ ceea ce trebuia dovedit.

184. În triunghiul dreptunghic ABC ($C = 90°$) se ia punctul O astfel, încît triunghiurile OAB, OBC și OCA să aibă arii egale. Să se arate că $\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 5\overline{OC}^2$.

Facultatea de matematică și fizică, Cluj, 1956.

R. Din cauză că cele trei arii OAB, OBC, OCA (fig. 54) sînt echivalente, rezultă că punctul O este centrul de greutate al triunghiului. Pentru a dovedi aceasta să arătăm că O se găsește pe fiecare dintre medianele duse din A, B, C. Într-adevăr, din cauză că triunghiurile OAB și OAC sînt echivalente și au baza comună $\overline{OA}$, rezultă că distanțele $\overline{BI}$ și $\overline{CL}$ pînă la baza $\overline{OA}$ sînt egale și prin urmare $\overline{IL}$ taie pe $\overline{BC}$ în mijlocul M al laturii $\overline{BC}$. Se constată astfel că $\overline{OA}$ este mediana din A. La fel se arată că $\overline{BO}$ și $\overline{CO}$ sînt respectiv medianele din B și C. Prelungind deci latura $\overline{CO}$, aceasta taie pe $\overline{AB}$ în punctul N, mijlocul laturii $\overline{AB}$.

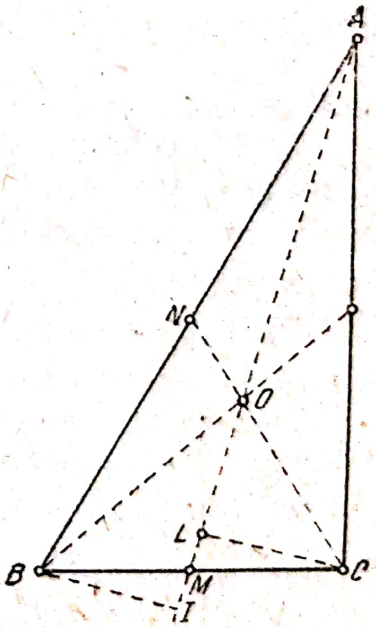


Fig 54.

Aplicînd teorema medianei în triunghiul AOB, avem

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2\overline{ON}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{2}.$$

Dar $\overline{ON} = \frac{\overline{OC}}{2}$ și $\overline{AB} = 2\overline{NC} = 3\overline{OC}$ (pentru că triunghiul ABC este dreptunghic). Rezultă deci

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2\frac{\overline{OC}^2}{4} + \frac{9\overline{OC}^2}{2} = \frac{10\overline{OC}^2}{2} = 5\overline{OC}^2,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

185. În dreptunghiul $ABCD$, $\overline{AB} = 2\overline{AD}$. Pe latura DC se ia punctul M și pe latura AD punctul N, astfel încît $\overline{AN} = 2\overline{DM}$. Se cere:

a) să se arate că $\overline{AM}$ și $\overline{BN}$ sînt perpendiculare între ele;

b) să se găsească locul geometric al punctului de intersecție dintre dreptele AM și BN, cînd M descrie latura DC.

Institutul tehnic, Craiova, 1957.

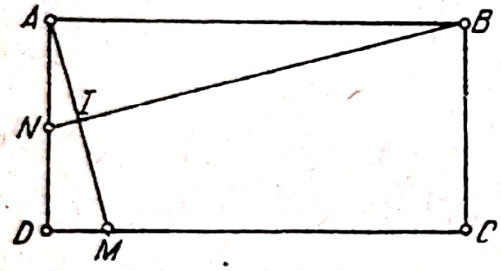


Fig. 55

R. a) Deoarece s-au dat $\overline{AB} = 2\overline{AD}$ și $\overline{AN} = 2\overline{DM}$ (fig. 55) rezultă

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DM}}$$

și prin urmare cele două triunghiuri dreptunghice ABN și ADM sînt asemenea. Urmează de aici că unghiurile DAM, ABN sînt egale și cum știm că unghiurile DAM și MAB sînt complementare rezultă

$$\widehat{MAB} + \widehat{ABN} = 90°,$$

ceea ce dovedește că $AM \perp BN$.

b) Din cele demonstrate mai sus reiese că din punctul I (intersecția dreptelor AM și BN) se vede segmentul fix $\overline{AB}$ sub un unghi drept; urmează deci că locul lui I este un cerc care are ca diametru latura $\overline{AB}$.

Dacă M se mișcă numai în interiorul laturii $\overline{DC}$, locul se reduce la un arc din cercul de diametru $\overline{AB}$.

Observare. Problema se poate generaliza dîndu-se $AB = m \cdot \overline{AD}$ și $\overline{AN} = m \cdot \overline{DM}$. Concluziile sînt aceleași ca mai sus.

186. Într-un trapez $ABCD$ (fig. 56) se dau baza mică $\overline{BC} = 6$ cm, baza mare $\overline{AD} = 10$ cm; înălțimea trapezului $\overline{BK} = 4$ cm și proiecția laturii neparalele $\overline{AB}$ pe baza mare, adică $\overline{AK} = 1$ cm.

Fie E un punct pe prelungirea segmentului $\overline{AB}$ (în ordinea A, B, E), astfel ca să avem $\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{8}{3}$. Paralela prin E la bazele trapezului taie latura DC în F, diagonala DB în H și diagonala AC în G. Se cere

a) lungimea segmentului $\overline{GH}$;

b) aria poligonului $GCDABH$;

c) aria corpului obținut prin rotirea poligonului $GCBH$, în jurul lui GH.

Facultatea de electronică, Timișoara, 1957.

R. a) Din șirul de rapoarte egale

$$\frac{\overline{HF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{HD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{8}{5} \text{ și } \frac{\overline{FG}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5},$$

rezultă

$$\overline{HF} = \frac{8}{5} \cdot \overline{BC} = \frac{8}{5} \cdot 6 = \frac{48}{5} \text{ și } \overline{FG} = \frac{3}{5} \cdot \overline{AD} = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6.$$

Avem deci

$$\overline{HG} = \overline{HF} + \overline{FG} = \frac{48}{5} + 6 = 15{,}6 \text{ cm}.$$

b) Pentru a calcula aria poligonului avem nevoie de înălțimile trapezelor $ABCD$ și $BCGH$. Prelungim înălțimea BK (fig. 56) cu segmentul BK'. Avem

$$\frac{\overline{BK'}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BA}} = \frac{3}{5},$$

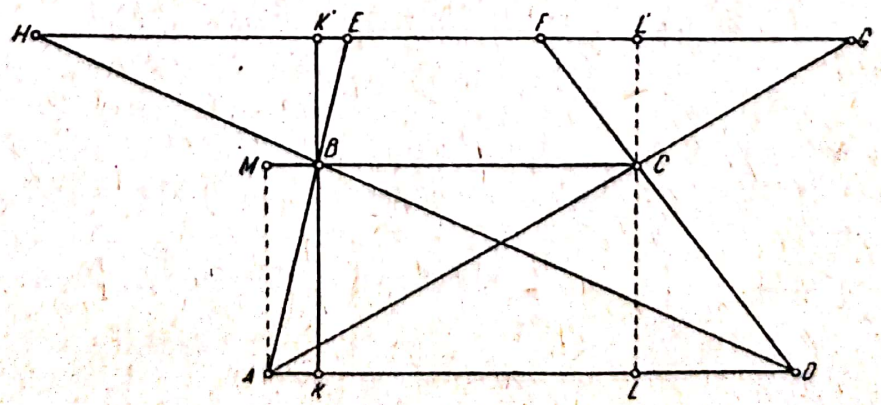


Fig. 56

de unde rezultă

$$\overline{BK'} = \frac{3}{5} \cdot \overline{BK} = \frac{3}{5} \cdot 4 = 2{,}4 \text{ cm}.$$

Aria poligonului $GCDABH$ este deci egală cu

$$\frac{(\overline{AD} + \overline{BC}) \cdot \overline{BK}}{2} + \frac{(\overline{BC} + \overline{HG}) \cdot \overline{BK'}}{2} = 57{,}92 \text{ cm}^2.$$

c) Aria corpului generat de $GCBH$ este egală cu

$$A = \pi \cdot \overline{HB} \cdot \overline{BK'} + \pi \cdot \overline{CG} \cdot \overline{CL'} + 2\pi \cdot \overline{BK'} \cdot \overline{BC} =$$

$$= \pi \cdot \overline{BK'}(\overline{HB} + \overline{CG} + 2\overline{BC}).$$

Ne trebuie deci lungimea segmentelor HB și CG. Avem

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{KB}^2 + \overline{KD}^2} = \sqrt{97} \text{ și } \overline{AC} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2} = \sqrt{65}.$$

Din șirurile de rapoarte

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5} \text{ și } \frac{\overline{CG}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BA}} = \frac{3}{5}$$

aflăm

$$\overline{HB} = \frac{3}{5}\sqrt{97} \text{ și } \overline{CG} = \frac{3}{5}\sqrt{65}.$$

Aria corpului este deci egală cu

$$\pi \cdot 2{,}4 \left(\frac{3\sqrt{97}}{5} + \frac{3\sqrt{65}}{5} + 12 \right) = \frac{36\pi}{25} (\sqrt{97} + \sqrt{65} + 20) \text{ cm}^3.$$

187. Se dă triunghiul ABC. Perpendicularele duse în B, C pe laturile AB, AC intersectează laturile AC, AB în D, E. Se cere:

a) să se arate că triunghiurile ABC, ADE sînt asemenea;

b) fie M mijlocul lui DE. Să se arate că dreptele MB, MC sînt tangente la cercul circumscris triunghiului ABC;

c) ce condiție trebuie să îndeplinească triunghiul ABC pentru ca $\overline{DE} = 2\overline{BC}$.

Institutul de construcții, București, 1957.

R. a) Patrulaterul $BCDE$ (fig. 57) este inscriptibil, pentru că unghiurile EBD și ECD sînt drepte. Rezultă că $\overset{\frown}{CDE} = \overset{\frown}{ABC}$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

și $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$; astfel triunghiurile ABC și ADE sînt asemenea, avînd unghiurile respectiv egale.

b) BM și CM fiind mediane în triunghiurile dreptunghice EBD și ECD, avem $\overline{BM} = \overline{EM} = \overline{MD}$ și $\overline{CM} = \overline{EM} = \overline{MD}$. Triunghiurile BME și CMD sînt deci isoscele și prin urmare $\widehat{MBE} = \widehat{BEM} = \widehat{C}$, iar $\widehat{MCD} = \widehat{CDM} = \widehat{B}$; urmează de aici că $\widehat{CBM} = \widehat{BCM} = \widehat{A}$, ceea ce demonstrează că dreptele BM și CM sînt tangente la cercul circumscris triunghiului ABC în punctele B, respectiv C.

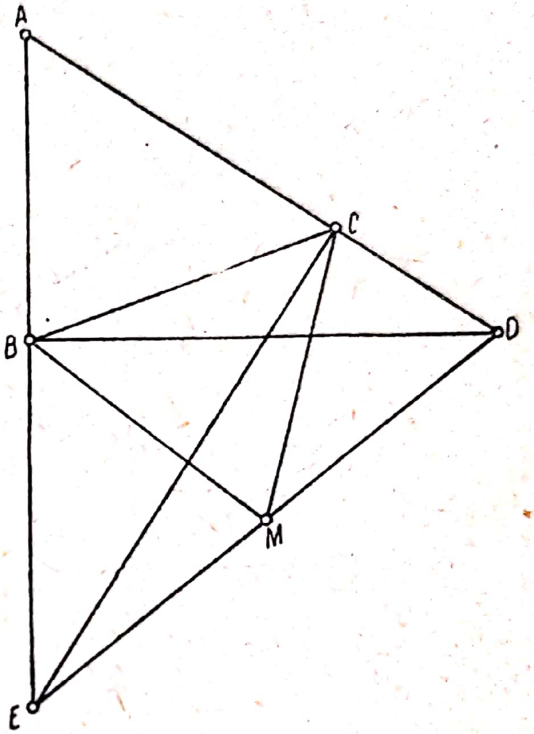


Fig. 57

c) Condiția $\overline{DE} = 2\overline{BC}$ implică $\overline{BC} = \overline{EM} = \overline{MD} = \overline{BM} = \overline{MC}$, adică triunghiul BMC trebuie să fie echilateral. S-a demonstrat însă că $\widehat{BCM} = \widehat{CBM} = \widehat{A}$, de unde rezultă că pentru a avea $\overline{DE} = 2\overline{BC}$, unghiul A trebuie să fie de 60°.

188. În triunghiul dreptunghic ABC se duce înălțimea $\overline{AD}$ pe ipotenuză și se proiectează punctul D în E și F, pe catetele $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$. Apoi se proiectează punctele E și F pe ipotenuză în E' și F'. Se cere:

a) să se demonstreze că triunghiul $AE'F'$ este isoscel;

b) să se demonstreze relația $\overline{DE} \cdot \overline{DF} \cdot \overline{BC} = \overline{AD}^3$;

c) ce condiție trebuie să îndeplinească triunghiul dreptunghic ABC, pentru ca $\overline{E'F'} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$.

Institutul de construcții, București, 1957.

R. a) Pentru a demonstra că $AE'F'$ (fig. 58) este isoscel, este suficient să arătăm că

$$\overline{E'D} = \overline{DF'}.$$

Avem $E'D = \frac{\overline{ED}^2}{\overline{BD}} = \frac{\left(\frac{\overline{BD}\cdot\overline{AD}}{\overline{AB}}\right)^2}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}\cdot\overline{DC}}{\overline{BC}}$

și $\overline{DF'} = \frac{\overline{DF}^2}{\overline{DC}} = \frac{\left(\frac{\overline{DC}\cdot\overline{AD}}{\overline{AC}}\right)^2}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BD}\cdot\overline{DC}}{\overline{BC}}$,

de unde se constată $\overline{E'D} = \overline{DF'}$ și că triunghiul $AE'F'$ este isoscel.

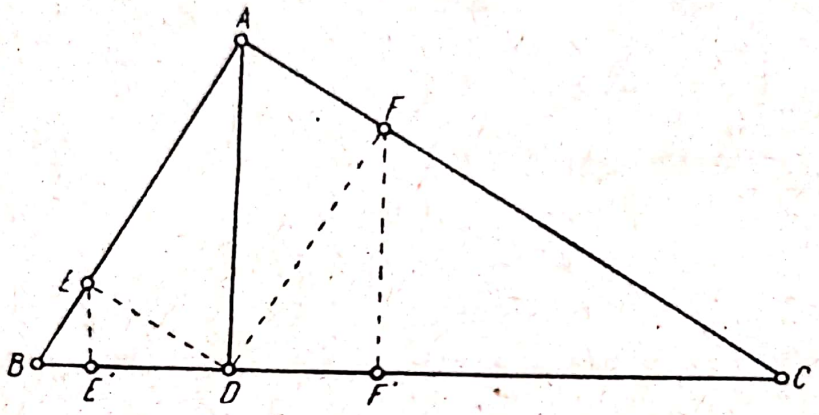


Fig. 58

b) Avem $\overline{DE} = \overline{AF} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AC}}$ și $\overline{DF} = \overline{AE} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}}$,

prin urmare $\overline{DE}\cdot\overline{DF}\cdot\overline{BC} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}}\cdot\overline{BC} = \frac{\overline{AD}^4\cdot\overline{BC}}{\overline{AD}\cdot\overline{BC}} = \overline{AD}^3$.

c) Din cele demonstrate la pct. a) rezultă $E'F' = 2E'D$, astfel că egalitatea dată devine

$$2\frac{\overline{BD}\cdot\overline{DC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{2} \text{ sau } 2\frac{\overline{AD}^2}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{2}.$$

Din ultima egalitate deducem că avem $\overline{E'F'} = \frac{\overline{BC}}{2}$, dacă $\overline{AD} = \frac{\overline{BC}}{2}$, adică înălțimea din A trebuie să fie egală cu mediana ipotenuzei. De aici deducem că triunghiul dreptunghic trebuie să fie isoscel.

189. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, catetele fiind $\overline{AC} = b$ și $\overline{AB} = c$. Se duce înălțimea $\overline{AA'}$, apoi se proiec-

tează punctul A' în F și E respectiv pe AB și AC. Perpendicularele în B și C, pe ipotenuză, intersectează pe $A'F$ și $A'E$ respectiv în P și Q. Se cere:

a) să se demonstreze că punctele P, A și Q sînt în linie dreaptă;

b) să se evalueze în funcție de b și c raportul r dintre aria trapezului $BCQP$ și aria triunghiului ABC.

Institutul de construcții, București, 1960.

R. a) Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice ECQ, ECA', $AA'E$, ABC (fig. 59), rezultă $\frac{EQ}{AC-AE}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}$ sau

$$c\cdot\frac{EQ}{AE}=\frac{b^2}{AE}-b. \qquad (1)$$

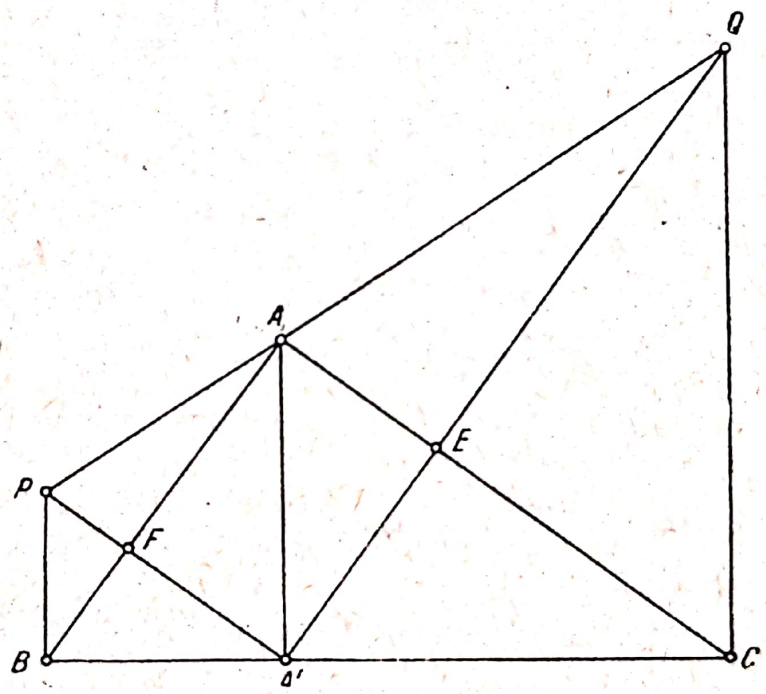


Fig. 59

Din $AE=\frac{AA'^2}{AC}$, deducem $AE=\frac{bc^2}{b^2+c^2}$ care, substituită în (1), ne dă $\frac{EQ}{AE}=\frac{b^3}{c^3}$; la fel obținem $\frac{PF}{AF}=\frac{c^3}{b^3}$, astfel că avem

$$\frac{AF}{PF}=\frac{EQ}{AE}.$$

Triunghiurile AEQ și PFA fiind asemenea, rezultă $\widehat{PAF}=\widehat{AQE}$ și prin urmare P, A, Q sînt coliniare.

b) Avem $r = \frac{\text{aria } BCQP}{\text{aria } ABC} = \frac{(\overline{BP} + \overline{CQ}) \cdot \overline{BC}}{\overline{AA'} \cdot \overline{BC}} = \frac{\overline{BP} + \overline{CQ}}{\overline{AA'}}$

sau

$$r = \frac{\overline{BP}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{CQ}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FA}} + \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BA'}^2}{\overline{AA'}^2} + \frac{\overline{CA'}^2}{\overline{AA'}^2}.$$

Efectuînd calculele, găsim

$$r = \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2}.$$

190. În trapezul $ABCD$ avem unghiurile din A și B de $90°$, baza mică $\overline{AD} = a$, baza mare $\overline{BC} = b$ și latura oblică $\overline{DC} = a + b$. Fie E mijlocul laturii AB și F piciorul perpendicularei din E pe DC. Se cere:

a) să se calculeze aria trapezului $ABCD$:
b) să se arate că triunghiul DEC este dreptunghic;
c) să se arate că triunghiul AFB este dreptunghic.

Institutul politehnic, București, 1960.

R. a) Înălțimea I a trapezului este egală cu

$$I = \sqrt{\overline{DC}^2 - (\overline{BC} - \overline{AD})^2} = \sqrt{(a + b)^2 - (b - a)^2} = 2\sqrt{ab},$$

de unde rezultă că aria A este

$$A = \frac{1}{2}(b + a) \cdot 2\sqrt{ab} = (a + b)\sqrt{ab}.$$

b) Demonstrăm că $\overline{DE}^2 + \overline{EC}^2 = \overline{DC}^2$. În acest scop calculăm

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 = a^2 + ab \text{ și } \overline{EC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BE}^2 = b^2 + ab.$$

Avem deci,

$$\overline{DE}^2 + \overline{EC}^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = \overline{DC}^2.$$

c) Patrulaterul $AEFD$ fiind inscriptibil, rezultă $\hat{1} = \hat{1}'$ (fig. 60). La fel deducem $\hat{2} = \hat{2}'$. Dar $\hat{2}' + \hat{1}' = (90° - \beta) +$

$+ (90° - \alpha) = 180° - (\alpha + \beta)$. Deoarece triunghiul DEC este dreptunghic, așa cum s-a arătat, rezultă $\alpha + \beta = 90°$ și prin urmare

$$\hat{1} + \hat{2} = \hat{1}' + \hat{2}' = 90°$$

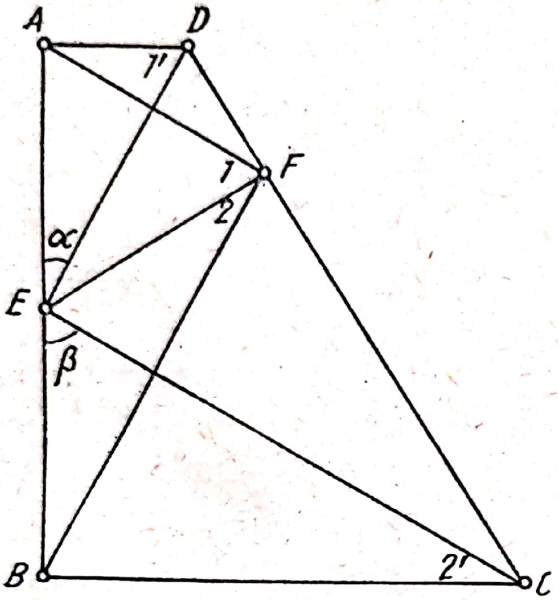


Fig. 60

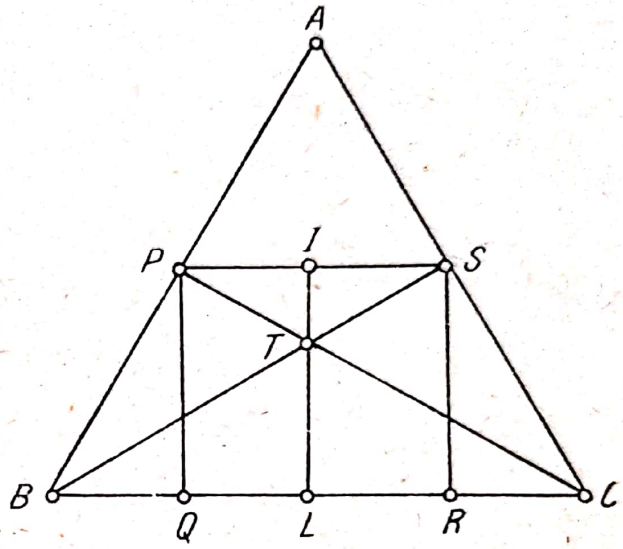


Fig. 61

191. Se dă triunghiul echilateral ABC cu latura a. Fie $PQRS$ pătratul înscris în acest triunghi. Se cere să se calculeze:

a) latura pătratului $PQRS$ în funcție de a;

b) aria triunghiului BTC, punctul T fiind la intersecția lui SB cu PC (fig. 61).

Institutul de Construcții, București, 1960.

R. a) $a(2\sqrt{3} - 3)$

b) Ducînd din T o perpendiculară pe BC care întîlnește PS, respectiv BC, în I și L avem

$$\frac{\overline{TL}}{a} = \frac{\overline{TI}}{a(2\sqrt{3} - 3)} = \frac{\overline{TL} + \overline{TI}}{a + a(2\sqrt{3} - 3)} = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}.$$

Rezultă $\overline{TL} = \frac{a(3 - \sqrt{3})}{4}$ și, prin urmare, aria $(BTC) = \frac{a \cdot \overline{TL}}{2} = \frac{a^2(3 - \sqrt{3})}{8}$.

192. În cercul de rază R se duc coardele $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ (fig. 62) egale respectiv cu latura triunghiului echilateral înscris și cu latura pătratului înscris în același cerc. Tangentele la cerc în

punctele A, B, C, formează triunghiul $A'B'C'$, iar înălțimile $\overline{AD}$ și $\overline{BE}$ ale triunghiului ABC mai taie cercul în punctele D' și E'. Se cere:

a) să se arate că triunghiul $A'B'C'$ este dreptunghic;

b) triunghiul BCE' este isoscel;

c) să se calculeze lungimile segmentelor $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ și $\overline{AD'}$ în funcție de R.

Institutul de construcții, București. 1957,

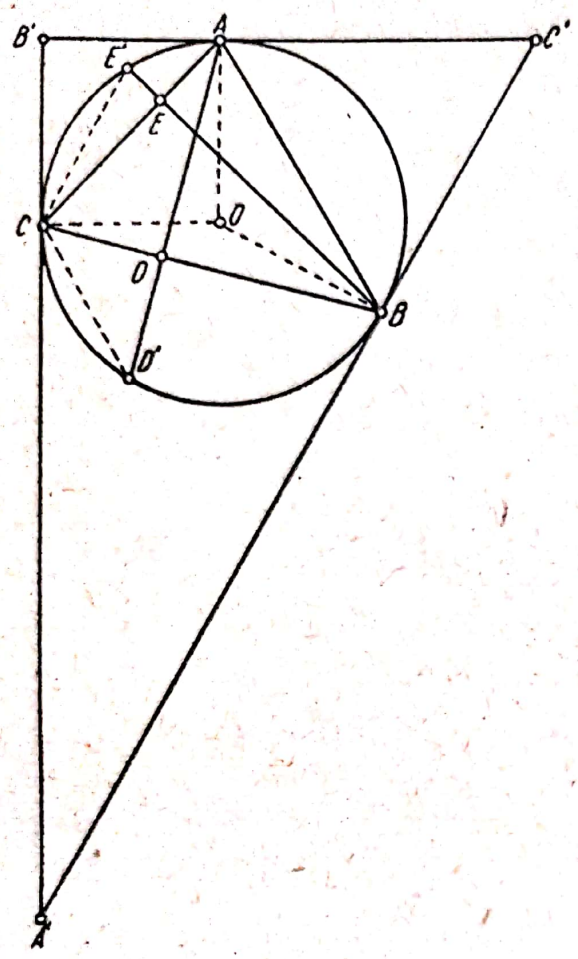


Fig. 62

R. a) Segmentul $\overline{AC}$ fiind latura pătratului, unghiul B' are ca măsură $\frac{1}{2}$ (arc 270° — — arc 90°) = 90°, ceea ce arată că triunghiul $A'B'C'$ este dreptunghic.

b) Deoarece $A = 75°$, unghiul ABE' este egal cu $90° - 75° = 15°$ și prin urmare arc $E'AB = 2 \cdot 15° + 120° =$ $= 150°$; deducem $\widehat{E'CB} = \frac{150°}{2} = 75°$.

Deoarece $\widehat{CE'B} = \widehat{CAB} = 75°$, ca unghiuri cu aceeași măsură, rezultă că triunghiul CBE' este isoscel.

c) Pentru a calcula $\overline{BC}$, aplicăm teorema pătratului unei laturi

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{CE},$$

unde înlocuim $AB = R\sqrt{3}$, $AC = R\sqrt{2}$, iar $CE = \frac{BC}{2}$ pentru că $\widehat{CBE} = 30°$. Avem astfel relația

$$3R^2 = 2R^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BC} \cdot R\sqrt{2}$$

sau

$$\overline{BC}^2 - \overline{BC} \cdot R\sqrt{2} - R^2 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd ecuația cu necunoscuta $\overline{BC}$, aflăm

$$\overline{BC} = \frac{R(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}.$$

Pentru a afla $\overline{AD}$, folosim relația cunoscută $2R \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{AB}$ valabilă pentru orice triunghi.

Găsim

$$\overline{AD} = \frac{R\sqrt{2} \cdot R\sqrt{3}}{2R} = \frac{R\sqrt{6}}{2}.$$

În ce privește $\overline{AD'}$, se observă că arcul ACD' corespunzător acestei coarde are 150° ca și arcul $CD'B$ care corespunde coardei $\overline{CB}$, de unde rezultă

$$\overline{AD'} = \overline{BC} = \frac{R(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}.$$

193. Se dă un triunghi oarecare ABC, căruia i se prelungește latura $\overline{BC}$ în ambele sensuri cu segmentele $\overline{BM} = \overline{AB}$ și $\overline{CN} = \overline{AC}$ Notînd laturile $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$ să se demonstreze că:

a) $b \cdot \overline{AM}^2 + c \cdot \overline{AN}^2 = 4pbc$, știind că $a + b + c = 2p$;

b) $\overline{AM}^2 = 4\frac{c}{a}p(p-b)$; $\overline{AN}^2 = 4\frac{b}{a}p(p-c)$;

c) perpendicularele din B și C respectiv pe AM și AN se întîlnesc în E. Să se calculeze segmentul $\overline{AE}$ și să se arate că are ca valoare

$$\overline{AE} = \sqrt{\frac{pbc}{p-a}}.$$

Institutul politehnic București, 1957

R. a) Considerăm A' proiecția lui A pe latura BC (în fig. 63 A' cade între B și C) și aplicăm teorema pătratului unei laturi în triunghiurile ABM și ACN.

Avem $\overline{AM}^2 = c^2 + c^2 + 2c \cdot \overline{BA'}$ și $\overline{AN}^2 = b^2 + b^2 + 2b \cdot \overline{A'C}$ de unde rezultă

$$b \cdot \overline{AM}^2 + c\overline{AN}^2 = b(2c^2 + 2c \cdot \overline{BA'}) + c(2b^2 + 2b \cdot \overline{A'C})$$

sau

$$b \cdot \overline{AM}^2 + c \cdot \overline{AN}^2 = 2bc(c+b) + 2bc(\overline{BA'} + \overline{A'C}).$$

Deducem prin urmare

$$b \cdot \overline{AM}^2 + c \cdot \overline{AN}^2 = 2bc\,(c + b + a) = 4\,pbc.$$

b) Calculăm $\overline{BA'}$ în funcţie de laturi şi-l introducem în expresia lui $\overline{AM}^2$ de mai sus. Avem $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot \overline{BA'}$, de unde avem

$$\overline{BA'} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

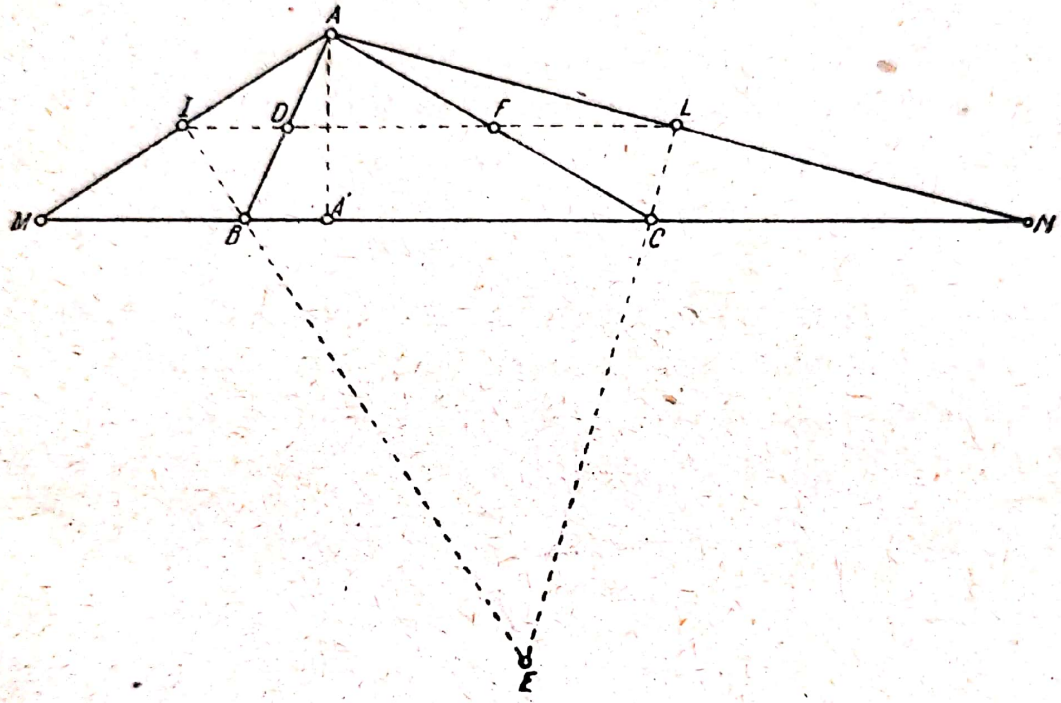


Fig 63

şi

$$\overline{AM}^2 = 2c^2 + 2c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = 2c \cdot \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a} =$$

$$= \frac{c}{a}\left[(a + c)^2 - b^2\right]$$

sau

$$\overline{AM}^2 = \frac{c}{a}(a + c + b)(a + c - b) = 4 \cdot \frac{c}{a}\,p\,(p - b).$$

Într-un mod cu totul identic se demonstrează şi $\overline{AN}^2 = 4 \cdot \frac{b}{a}\,p\,(p - c)$.

c) Perpendicularele din B și C respectiv pe $\overline{AM}$ și $\overline{AN}$ le taie pe acestea în I și L mijloacele laturilor AM și AN, astfel că avem

$$\overline{AI} = \frac{1}{2}\overline{AM};\ \overline{AL} = \frac{1}{2}\overline{AN} \text{ și } \overline{IL} = \frac{1}{2}\overline{MN} = p.$$

Din cauză că triunghiurile AIE și ALE sînt dreptunghice, segmentul AE este diametrul cercului circumscris patrulaterului $AIEL$ și prin urmare și triunghiului AIL. Rezultă prin urmare dintr-o formulă cunoscută

$$\overline{AE} = \frac{\overline{AI} \cdot \overline{IL} \cdot \overline{AL}}{2\ (\text{aria triunghiului } AIL)}.$$

Dacă notăm cu S aria triunghiului ABC, avem

$$\text{aria } AIL = \frac{\overline{IL} \cdot \frac{\overline{AA'}}{2}}{2} = \frac{p \cdot \overline{AA'}}{4} = \frac{p \cdot \frac{2S}{a}}{4} = \frac{Sp}{2a},$$

de unde rezultă

$$\overline{AE} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot p \cdot \frac{1}{2}\overline{AN}}{2 \cdot \frac{pS}{2a}} = \sqrt{\frac{bcp}{p-a}}.$$

Observație. Dacă triunghiul ABC din figură nu ar fi ascuțit-unghi, formulele demonstrate s-ar obține într-un mod cu totul analog ca mai sus.

194. Se consideră un triunghi ABC; pe latura BC se ia un punct D și se notează cu O și O', respectiv, centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD și ACD.

a) Să se arate că raportul razelor cercurilor O și O' este constant cînd triunghiul ABC rămîne același, iar D variază pe BC.

b) Se cere poziția punctului D astfel încît razele cercurilor corespunzătoare O și O' să fie minime.

c) Să se demonstreze că triunghiurile AOO' și ABC sînt asemenea.

Facultatea de fizică, București, 1962

R. a) Notînd laturile triunghiului cu a, b, c, pe AD cu x și înălțimea dusă din A cu h_a (fig. 64), avem

$$R = \frac{cx \cdot \overline{BD}}{2h_a \cdot \overline{BD}} = \frac{cx}{2h_a} \text{ și } R' = \frac{bx \cdot \overline{DC}}{2h_a \cdot \overline{DC}} = \frac{bx}{2h_a}.$$

De unde rezultă $\frac{R}{R'} = \frac{c}{b}$ (constant).

b) Avînd

$$R = \frac{c}{2h_a}\,x \text{ și } R' = \frac{b}{2h_a}\,x,$$

rezultă că R, R' sînt minime, atunci cînd $x = \overline{AD}$ este minim, adică în cazul cînd AD este perpendiculara dusă din A pe BC. Așadar R, R' sînt minime pentru $x = h_a$.

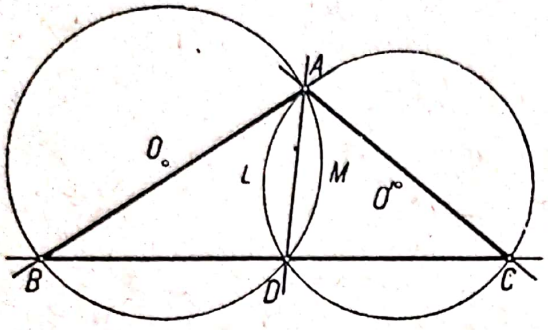


Fig. 64

c) Avem

$$\widehat{OAO'} = \widehat{OAD} + \widehat{O'AD},$$

$$\widehat{OAD} = \text{măs}\,\frac{180^\circ - \widehat{AMD}}{2} = \frac{180^\circ - 2B}{2} = 90^\circ - B,$$

$$\widehat{O'AD} = \text{măs}\,\frac{180^\circ - \widehat{ALD}}{2} = \frac{180^\circ - 2C}{2} = 90^\circ - C.$$

Prin urmare, $\widehat{OAO'} = (90^\circ - B) + (90^\circ - C) = A$. Deoarece avem simultan

$$\frac{R}{c} = \frac{R'}{b},$$

rezultă că triunghiurile AOO' și ABC au cîte un unghi egal cuprins între laturi respectiv proporționale, ceea ce demonstrează justețea afirmației din enunț.

195. Se consideră cercul C de rază a și cercurile egale A_1, A_2, A_3, A_4 tangente interior cercului C și tangente exterior două cîte două și se cere:

a) să se afle raza cercurilor $A_1,\ldots,A_4$;

b) să se afle aria cuprinsă între aceste patru cercuri;

c) fie M_1, M_2, M_3, M_4 punctele de contact între cercurile A_i și cercul C. Să se afle aria porțiunilor din cercurile A_i, exterioare pătratului $M_1M_2M_3M_4$ și aria interioară cercului C și exterioară aceluiași pătrat și cercurilor A_i;

d) să se construiască geometric cu rigla și compasul, raza cercurilor A_i cunoscînd raza cercului C.

Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1957.

R. a) Centrele A_1, A_2, A_3, A_4 (fig. 65) ale cercurilor egale sînt vîrfurile unui pătrat cu centrul în centrul cercului de rază cunoscută a.

Dacă notăm cu r raza unui cerc A_i, atunci raza pătratului $A_1A_2A_3A_4$ este $a - r$, iar latura pătratului este $2r$.

Din relaţia $2r = (a - r)\sqrt{2}$ rezultă $r = a(\sqrt{2} - 1)$.

b) Aria cuprinsă între cele patru cercuri egale se obţine scăzînd din aria pătratului $A_1A_2A_3A_4$ cele patru sectoare de cîte 90° care formează aria unui cerc A_i.

Aria căutată este deci egală cu

$$(2r)^2 - \pi r^2 = (4 - \pi)\, r^2 =$$

$$= (4 - \pi)(3 - 2\sqrt{2})\, a^2.$$

c) Calculăm distanţa între două laturi paralele ale pătratelor $A_1A_2A_3A_4$ şi $M_1M_2M_3M_4$. Această distanţă este egală cu diferenţa apotemelor celor două pătrate

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} - r =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{r}{\sqrt{2} - 1} - r = \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

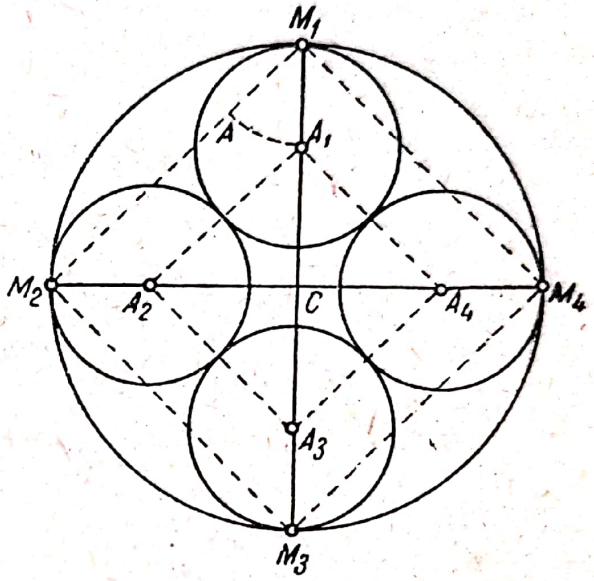


Fig. 65

Rezultatul obţinut ne arată că o latură din pătratul $M_1M_2M_3M_4$ determină în cercurile A_i coarde care sînt laturi ale pătratelor înscrise în aceste cercuri. De aceea, aria porţiunilor din cercurile A_i exterioare pătratului $M_1M_2M_3M_4$ este egală cu

$$8 \cdot \frac{\pi r^2 - 2r^2}{4} = 2(\pi - 2)\, r^2 = 2(\pi - 2)(3 - 2\sqrt{2})\, a^2.$$

Aria interioară cercului C şi exterioară aceluiaşi pătrat $M_1M_2M_3M_4$ şi cercurilor A_i este egală cu

$$4\left(\frac{\pi a^2 - 2a^2}{4} - 2 \cdot \frac{\pi r^2 - 2r^2}{4}\right) = (\pi - 2)(4\sqrt{2} - 5)\, a^2.$$

Raza cercului A_i fiind egală cu $r = a(\sqrt{2} - 1) = a\sqrt{2} - a$, rezultă următoarea construcţie: pe latura M_1M_2 a pătratului înscris în cercul C se poartă segmentul M_2A egal cu raza a a cercului C. Segmentul M_1A este egal cu raza unuia din cercurile A_i.

Scanned with OKEN Scanner

196. Pe semicercul de diametrul $\overline{AB} = 10a$, se consideră punctele C, D la distanța $4a$ de $\overline{AB}$ (punctul D spre A și C spre B). Se cere:

a) să se calculeze perimetrul trapezului convex $ABCD$;

b) tangenta la semicerc în D intersectează dreapta AB în E. Să se calculeze segmentul $\overline{ED}$;

c) dacă T este punctul de intersecție al tangentelor duse în C și D la semicerc, să se calculeze segmentul $\overline{DT}$ și distanța punctului T la centrul O al semicercului.

Institutul politehnic, București, 1958.

R. a) Fie I și L proiecțiile punctelor D și C (fig. 66) pe $\overline{AB}$. Avem

$$\overline{OI} = \overline{OL} = \sqrt{25a^2 - 16a^2} = 3a,$$

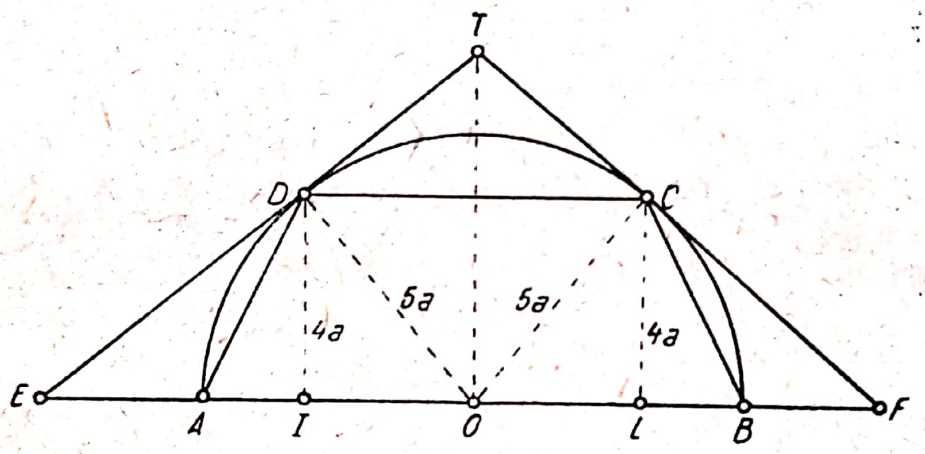


Fig. 66

rezultă

$$\overline{DC} = IL = 6a;\ \overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{AI \cdot AB} = \sqrt{2a \cdot 10a} = 2a\sqrt{5}.$$

Perimetrul trapezului este deci

$$6a + 10a + 2 \cdot 2a\sqrt{5} = 4a(4 + \sqrt{5}).$$

b) Din triunghiul dreptunghic EDO avem

$$\overline{OD}^2 = \overline{OE} \cdot \overline{OI},\ \text{sau}\ \overline{OE} = \frac{25a^2}{3a} = \frac{25}{3}a;$$

rezultă

$$\overline{ED} = \sqrt{\overline{EO}^2 - \overline{OD}^2} = \frac{20}{3}a.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Din triunghiul dreptunghic EOT aflăm

$$\overline{OD}^2 = \overline{ED} \cdot \overline{DT}, \text{ sau } \overline{DT} = \frac{\overline{OD}^2}{\overline{ED}} = \frac{15}{4}a$$

şi prin urmare

$$\overline{OT}^2 = \overline{DT} \cdot \overline{ET} = \frac{15}{4}a\left(\frac{15}{4}a + \frac{20}{3}a\right), \text{ sau } \overline{OT} = \frac{25}{4}a.$$

197. Se dă triunghiul ABC de laturi a, b, c. Fie A', B', C' punctele de contact ale cercului înscris cu laturile triunghiului. Se notează $\overline{AB'} = l$, $\overline{BC'} = m$, $\overline{CA'} = n$. Se cere:

a) să se exprime l, m, n în funcţie de laturile triunghiului;

b) să se exprime aria triunghiului în funcţie de l, m, n;

c) să se arate că dacă $l^2 + l(m + n) - mn = 0$, atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

Institutul de petrol şi gaze, Bucureşti, 1958.

R. a) Din cauză că tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sînt egale, avem $\overline{AB'} = \overline{AC'} = l$; $\overline{BC'} = \overline{BA'} = m$ şi $CA' = CB' = n$ (fig. 67). Rezultă $l + m + n = \frac{a+b+c}{2} = p$.

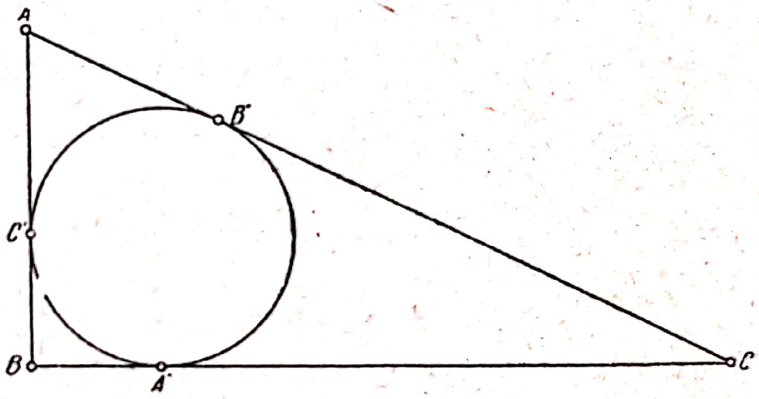


Fig. 67

Prin urmare $l = p - a$; $m = p - b$ şi $n = p - c$.

b) Aria triunghiului în funcţie de laturi este dată de formula cunoscută

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

unde înlocuim p, $p - a$, $p - b$, $p - c$ în funcţie de l, m şi n; obţinem

$$S = \sqrt{lmn(l + m + n)}.$$

c) Relaţia dată o exprimăm cu ajutorul laturilor a, b, c. Se obţine condiţia

$$(p-a)^2 + a(p-a) - (p-b)(p-c) = 0.$$

După reduceri găsim

$$b^2 + c^2 = a^2,$$

care exprimă că triunghiul este dreptunghic cu unghiul drept în A.

Scanned with OKEN Scanner

198. Fie două cercuri O și O' de raze R și r, tangente interior în punctul T, cercul O' fiind cel mic. Fie A punctul unde dreapta OO' taie cercul O a doua oară, B punctul unde tangenta din A dusă la cercul O' taie cercul O a doua oară și P piciorul perpendicularei din A pe prelungirea razei $\overline{OB}$. Se cere:

a) să se calculeze lungimea coardei $\overline{AB}$;

b) să se calculeze segmentul $\overline{AP}$;

c) să se calculeze aria triunghiului BTP.

Aplicație. La fiecare punct în parte să se calculeze pentru cazul $R = 3r$.

Institutul politehnic, București, 1958.

R. a) Calculăm mărimea tangentei $\overline{AM}$ la cercul mic

$$\overline{AM} = \sqrt{(2R-r)^2 - r^2} = 2\sqrt{R(R-r)}.$$

Prelungim dreapta AB (fig. 68) pînă la intersecția ei în B' cu tangente în T la cercul O.

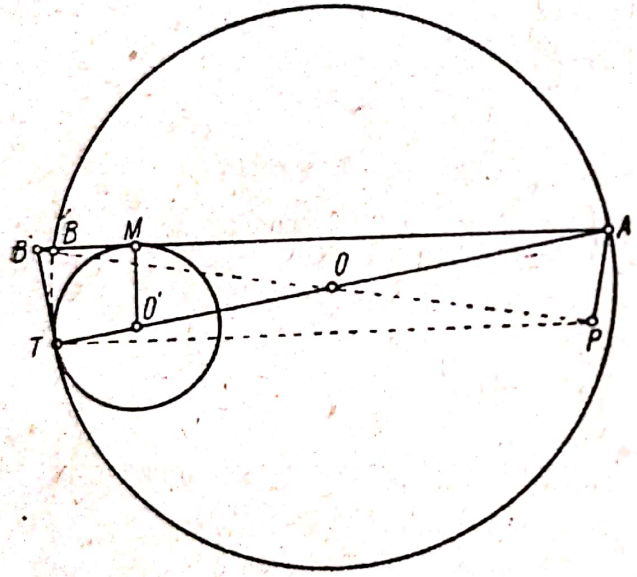


Fig. 68

Din relația $\overline{AM} \cdot \overline{AB'} = \overline{AO'} \cdot \overline{AT}$ deducem

$$\overline{AB'} = \frac{\overline{AO'} \cdot \overline{AT}}{\overline{AM}} = \frac{R(2R-r)}{\sqrt{R(R-r)}} = (2R-r)\sqrt{\frac{R}{R-r}}.$$

Și acum rezultă $\overline{AB}$ din triunghiul dreptunghic ABT,

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AT}^2}{\overline{AB'}} = \frac{4R\sqrt{R(R-r)}}{2R-r}.$$

b) Deoarece $\overline{BO}$ este rază, triunghiul BOA este isoscel, astfel încît triunghiurile dreptunghice ABP și $TB'A$ au cîte un unghi ascuțit de aceeași mărime și prin urmare sînt asemenea. Rezultă

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{TB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}, \quad \overline{AP} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{TB'}}{\overline{AB'}}.$$

Înlocuind $\overline{AB}$ și $\overline{AB'}$ aflați mai sus și pe $\overline{TB'}$ din formula

$$\overline{TB'} = \sqrt{\overline{AB'}^2 - \overline{AT}^2} = \frac{Rr}{\sqrt{R(R-r)}}$$

obținem

$$\overline{AP} = \frac{4Rr\sqrt{R(R-r)}}{(2R-r)^2}.$$

c) Triunghiurile TBP și BAP avînd unghiurile din B și A egale, avem raportul

$$\frac{\text{aria } TBP}{\text{aria } BAP} = \frac{\overline{TB}\cdot\overline{BP}}{\overline{AP}\cdot\overline{AB}} = \frac{\overline{TB}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{TB'}}{\overline{TA}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{AP}}$$

și cum avem aria $BAP = \frac{1}{2}\cdot\overline{BP}\cdot\overline{AP}$, rezultă aria $TBP = \frac{\overline{TB'}}{\overline{TA}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{AP}}\cdot\frac{1}{2}\overline{BP}\cdot\overline{AP}$ sau aria $TBP = \frac{\overline{TB'}}{\overline{TA}}\cdot\frac{\overline{BP^2}}{2}$.

Înlocuind $\overline{TB'}$ și $\overline{TA}$ cu expresiile cunoscute, iar

$$\overline{BP^2} = \overline{AB^2} - \overline{AP^2} = \frac{64R^4(R-r)^2}{(2R-r)^4}$$

se obține

$$\text{aria } TBP = \frac{Rr}{\sqrt{R(R-r)}}\cdot\frac{1}{2R}\cdot\frac{64R^4(R-r)^2}{2(2R-r)^4} = \frac{16R^{\frac{7}{2}}(R-r)^{\frac{3}{2}}r}{(2R-r)^4}.$$

Aplicație. Pentru $R = 3r$, avem

$$\overline{AB} = \frac{12\sqrt{6}}{5}r; \qquad \overline{AP} = \frac{12\sqrt{6}}{25}r;$$

$$\text{aria } TBP = \frac{864\sqrt{6}}{625}r^2.$$

199. Se dă patrulaterul $ABCD$ (fig. 69) astfel încît laturile opuse $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ se intersectează în P sub un unghi drept.

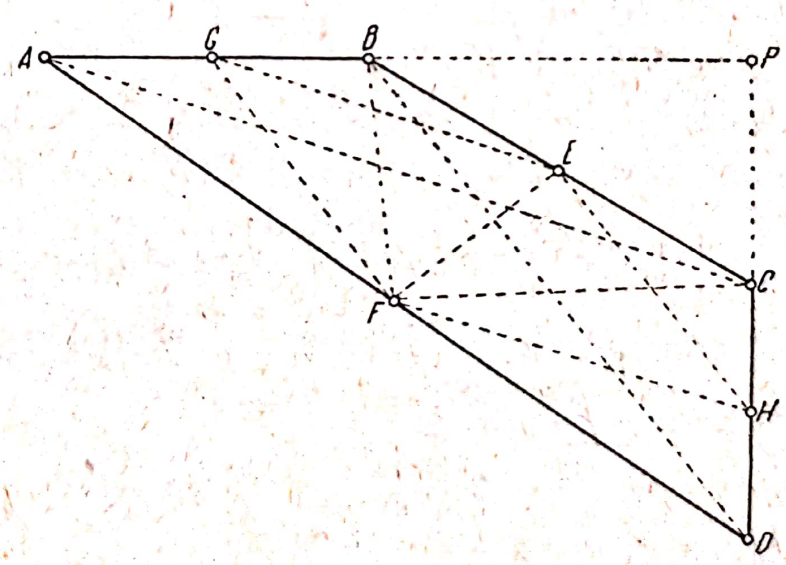


Fig. 69

Să se arate că:

a) $\overline{BC^2} + \overline{AD^2} = \overline{AC^2} + \overline{BD^2}$,

b) $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4\overline{EF}^2$,

unde E și F sînt mijloacele laturilor $\overline{BC}$ și $\overline{AD}$.

c) G și H fiind mijloacele laturilor $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ avem

$$2(\overline{GH}^2 + \overline{EF}^2) = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2.$$

Institutul politehnic, București, 1958.

R. a) Avem $\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 = (\overline{DP}^2 + \overline{BP}^2) - (\overline{CP}^2 + \overline{BP}^2) =$

$$= \overline{DP}^2 - \overline{CP}^2$$

și

$$\overline{AD}^2 - \overline{AC}^2 = (\overline{DP}^2 + \overline{AP}^2) - (\overline{CP}^2 + \overline{AP}^2) =$$

$$= \overline{DP}^2 - \overline{CP}^2,$$

de unde rezultă

$$\overline{AD}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BC}^2$$

sau

$$\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2,$$

ceea ce trebuia dovedit.

b) Aplicăm teorema medianei în triunghiul BFC și avem

$$4\overline{EF}^2 = 2(\overline{BF}^2 + \overline{CF}^2) - \overline{BC}^2.$$

Din aplicarea aceleiași teoreme triunghiurilor BFA și CFD avem

$$\overline{BF}^2 = 2\overline{GF}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{2} - \overline{AF}^2 \qquad (1)$$

și

$$\overline{CF}^2 = 2\overline{FH}^2 + \frac{\overline{CD}^2}{2} - \overline{DF}^2.$$

Ținînd seamă că $\overline{GF} = \frac{1}{2}\overline{BD}$; $\overline{FH} = \frac{1}{2}\overline{AC}$; $\overline{AF} = \overline{FD} =$

$= \frac{1}{2}\overline{AD}$ și adunînd, membru cu membru, relațiile (1), obținem după eliminarea numitorului 2,

$$2(\overline{BF}^2 + \overline{CF}^2) = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{AD}^2.$$

Rezultă

$$4\overline{EF}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2,$$

sau după reduceri, pentru că $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2$,

$$4\overline{EF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Patrulaterul $EHFG$ care are vîrfurile sale în mijloacele laturilor patrulaterului este un paralelogram. Aplicîndu-i o teoremă cunoscută care dă o relaţie între lungimile laturilor şi cele ale diagonalelor, avem

$$\overline{EF}^2 + \overline{GH}^2 = \overline{GE}^2 + \overline{EH}^2 + \overline{HF}^2 + \overline{FG}^2,$$

sau

$$\overline{EF}^2 + \overline{GH}^2 = \frac{\overline{AC}^2}{4} + \frac{\overline{BD}^2}{4} + \frac{\overline{AC}^2}{4} + \frac{\overline{BD}^2}{4}.$$

După reduceri şi eliminarea numitorilor obţinem

$$2\,(\overline{EF}^2 + \overline{GH}^2) = \overline{CA}^2 + \overline{BD}^2.$$

200. Fie $ABCD$ vîrfurile unui patrulater ale cărui diagonale $\overline{AC}$ şi $\overline{BD}$ sînt perpendiculare. Se ştie că $\overline{AB} = 5$ m, $\overline{BC} = 4\sqrt{5}$ m, $\overline{CD} = 10$ m, $\overline{AC} = 11$ m. Se cere:

a) să se calculeze lungimea laturii $\overline{AD}$ şi a diagonalei $\overline{BD}$.

Însemnînd cu M punctul de întîlnire a diagonalelor, să se calculeze lungimile segmentelor $\overline{AM}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$, $\overline{DM}$ şi să se deducă apoi că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil;

b) notăm cu O centrul şi cu R raza cercului care trece prin punctele A, B, C, D. Să se arate că

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4R^2.$$

Să se deducă din această relaţie valoarea lui R;

c) să se arate că $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 8R^2 - 4\overline{MO}^2$ şi să se calculeze din această relaţie valoarea lui $\overline{MO}$;

d) să se arate că perpendiculara coborîtă din punctul M pe o latură a patrulaterului împarte latura opusă în părţi egale;

e) fie P, Q, R, S proiecţiile punctului M pe laturile patrulaterului $ABCD$. Să se arate că patrulaterul $PQRS$ este înscris într-un cerc care trece şi prin mijloacele laturilor patrulaterului $ABCD$.

Să se arate că există şi un cerc înscris în patrulaterul $PQRS$.

Facultatea de matematică şi fizică, Bucureşti 1958.

R. a) Din faptul că diagonalele sînt perpendiculare avem $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2$ (fig. 70, *a*), de unde rezultă $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 = 25 + 100 - 80 = 45$, sau $\overline{AD} = 3\sqrt{5}$.

Aplicînd formula $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AM}$

obținem $\overline{AM} = \dfrac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2 \cdot AC} = \dfrac{25 + 121 - 80}{2 \cdot 11} = 3$

și prin urmare $\overline{MC} = \overline{AC} - \overline{AM} = 11 - 3 = 8$.

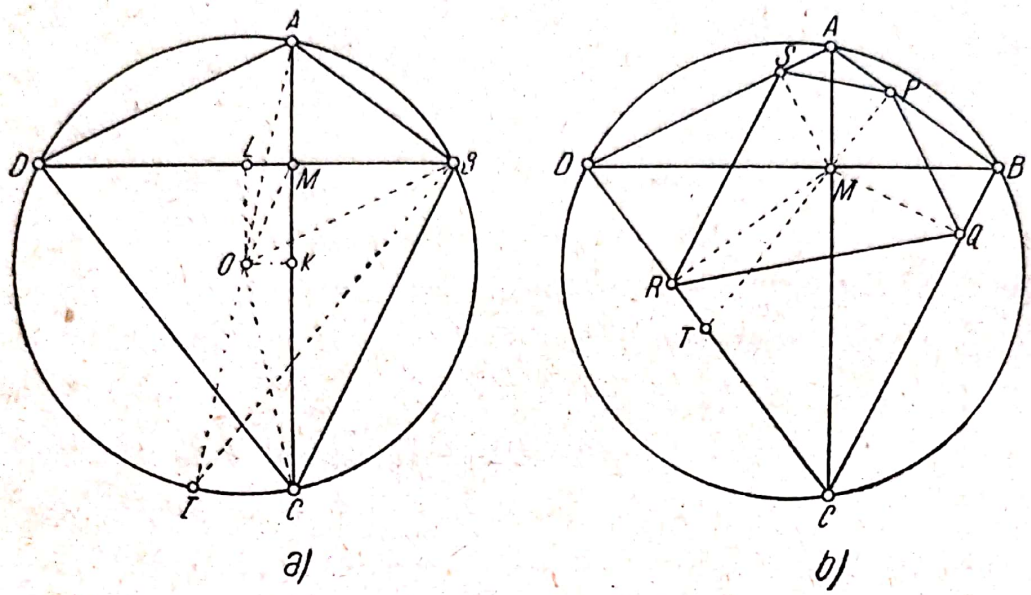


Fig. 70

Segmentul $\overline{MB}$ se deduce din triunghiul dreptunghic AMB,

$$\overline{MB} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AM}^2} = \sqrt{25 - 9} = 4,$$

iar din

$$\overline{DM} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AM}^2} = \sqrt{45 - 9} = 6.$$

Avem deci $\overline{BD} = \overline{DM} + \overline{MB} = 6 + 4 = 10$.

Se observă că avem $\overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MB} \cdot \overline{MD} = 24$, de unde rezultă că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil.

b) Ducem în B perpendiculara $\overline{BI}$ pe latura $\overline{AB}$ (I pe cercul circumscris patrulaterului). Deoarece unghiurile ABD și ACD sînt egale ca avînd aceeași măsură, arcul AD, urmează că și complementele acestora, adică $\overset{\frown}{DBI}$ respectiv $\overset{\frown}{BDC}$ sînt și ele egale. Rezultă că patrulaterul $DBIC$ este un trapez isoscel și prin urmare $\overline{BI} = \overline{DC}$. Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul ABI unde $\overline{AI}$ este diametrul cercului, obținem

$$\overline{AB}^2 + \overline{BI}^2 = \overline{AI}^2, \text{ sau } \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4R^2.$$

În cazul numeric dat, avem $4R^2 = 25 + 100$, sau $R = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

c) Coborîm din centrul O al cercului perpendicularele $\overline{OK}$ și $\overline{OL}$ pe coardele $\overline{CA}$ și $\overline{BD}$. Aceste perpendiculare taie coardele în mijloacele lor K și L.

Avem

$$\overline{CK}^2 = \frac{\overline{AC}^2}{4} = \overline{OC}^2 - \overline{OK}^2 = R^2 - \overline{OK}^2$$

și

$$BL^2 = \frac{\overline{BD}^2}{4} = OB^2 - OL^2 = R^2 - OL^2,$$

de unde rezultă $\frac{\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2}{4} = 2R^2 - (\overline{OL}^2 + \overline{OK}^2)$.

Ținînd seamă că $\overline{OL}^2 + \overline{OK}^2 = \overline{OM}^2$, ultima relație devine după eliminarea numitorului 4

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 8R^2 - 4\overline{MO}^2.$$

În cazul numeric dat, avem $4\overline{MO}^2 = 8\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2 - (11^2+10^2) = 29$, sau

$$\overline{MO} = \frac{\sqrt{29}}{2}.$$

d) Fie $\overline{MP}$ (fig. 70, *b*) perpendiculara coborîtă pe latura $\overline{AB}$ și care prelungită taie latura opusă $\overline{CD}$ în punctul T. Din egalitatea unghiurilor $\widehat{TMC} = \widehat{AMP} = \widehat{ABM}$ rezultă $\widehat{TCM} = \widehat{TMC} = \widehat{ABM}$, pentru că $\widehat{TCM}$ și $\widehat{ABM}$ au aceeași măsură jumătatea arcului AD. Constatăm astfel că triunghiul TMC din triunghiul dreptunghic DMC este isoscel. Rezultă prin urmare că $\overline{TM}$ este mediană, ceea ce trebuia dovedit.

e) Patrulaterele $MSAP$, $MPBQ$, $MQCR$, $MRDS$ (fig. 70, *b*) fiind inscriptibile, avem

$$\widehat{RSP} + \widehat{RQP} = (\widehat{RSM} + \widehat{MSP}) + (\widehat{RQM} + \widehat{MQP}) =$$

$$= \widehat{CDB} + \widehat{CAB} + \widehat{DCA} + \widehat{DBA},$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\overset{\frown}{RSP} + \overset{\frown}{RQP} = (\overset{\frown}{CDM} + \overset{\frown}{DCM}) + (\overset{\frown}{MAB} + \overset{\frown}{MBA}) =$$
$$= 90° + 90° = 180°.$$

De unde deducem că patrulaterul $PQRS$ este înscris într-un cerc. Să arătăm că acest cerc trece și prin mijloacele laturilor patrulaterului $ABCD$. Este suficient să arătăm că cercul RSP trece prin mijlocul T al laturii DC.

S-a văzut mai sus că PMT este o linie dreaptă și că $\overline{TM} = \overline{TC}$. Să dovedim că patrulaterul $RSPT$ este inscriptibil. Avem:

$$\overset{\frown}{RSP} + \overset{\frown}{RTP} = \overset{\frown}{CDB} + \overset{\frown}{CAB} + 2\overset{\frown}{TCM} =$$
$$= 2\,(\overset{\frown}{CDM} + \overset{\frown}{DCM}) = 180°,$$

urmează deci că cercul RSP trece și prin T. La fel se demonstrează că același cerc care este identic cu cercurile SPQ, PQR, QRS trece și prin mijloacele celorlalte laturi ale patrulaterului $ABCD$.

Să arătăm că există un cerc înscris în patrulaterul $PQRS$. Din egalitatea unghiurilor $\overset{\frown}{RSM} = \overset{\frown}{MSP}$ urmează că SM este bisectoarea unghiului RSP. La fel se arată că RM, QM, PM sînt respectiv bisectoarele unghiurilor SRQ, RQP, QPS. Urmează deci că punctul M este egal depărtat de laturile patrulaterului $SPQR$, astfel că M este centrul unui cerc tangent laturilor SP, PQ, QR, RS, ceea ce dovedește existența unui cerc înscris în patrulaterul $PQRS$.

201. Considerăm un cerc, un punct A pe cerc, tangenta în A și o dreaptă perpendiculară pe tangentă, care taie cercul în punctele B, C, și tangenta în T. Fie M mijlocul coardei BC. Să se arate că:

a) $4\overline{TM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

b) Diferența unghiurilor ABC și ACB este un unghi drept și că bisectoarele unghiului BAC sînt egal înclinate pe tangenta AT.

c) Dacă E este intersecția lui AB cu diametrul OM și F intersecția lui AC cu același diametru, să se arate că mijlocul segmentului EF coincide cu punctul de intersecție a tangentelor în B și C la cerc.

d) Dacă AU este perpendiculară pe planul ABC, atunci UT este perpendiculară pe BC.

Scanned with OKEN Scanner

e) Cum trebuie luat punctul U, astfel încît unghiul BUC să fie drept?

Facultatea de matematică-mecanică, București, 1962,

R. a) Ridicînd la pătrat (fig. 71) relația cunoscută $2\overline{TM} = \overline{TB} + \overline{TC}$, obținem $4\overline{TM}^2 = \overline{TB}^2 + \overline{TC}^2 + 2\overline{TB} \cdot \overline{TC}$. În această relație substituim $\overline{TB}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AT}^2$, $\overline{TC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AT}^2$ și $\overline{TB} \cdot \overline{TC} = \overline{TA}^2$, de unde rezultă

$$4\overline{TM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

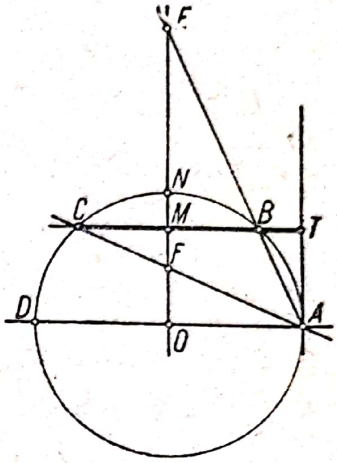


Fig. 71

b) Ducînd prin centrul O al cercului diametrul AD paralel cu BC, avem

$$\text{măs } \widehat{ABC} = \text{măs } \frac{\widehat{CDA}}{2}$$

și

$$\text{măs } \widehat{ACB} = \text{măs } \frac{\widehat{AB}}{2},$$

deci

$$\text{măs } (\widehat{ABC} - \widehat{ACB}) = \text{măs } \frac{\widehat{CDA} - \widehat{AB}}{2} = \text{măs } \frac{\widehat{CDA} - \widehat{CD}}{2} = 90°.$$

Bisectoarea unghiului BAC este AN (N mijlocul arcului BC), astfel că AN formează un unghi de 45° cu AT, iar cealaltă bisectoare fiind perpendiculară pe AN formează, de asemenea, un unghi de 45° cu AT, ceea ce demonstrează afirmația.

c) Din considerarea unor asemănări de triunghiuri rezultă

$$\overline{OE} = \frac{R \times \overline{OM}}{R - \overline{MB}}, \qquad \overline{OF} = \frac{R \times \overline{OM}}{R + \overline{MB}}.$$

Dacă notăm cu L mijlocul segmentului EF, avem $2\overline{OL} = \overline{OE} + \overline{OF}$

sau

$$2\overline{OL} = R \times \overline{OM}\left(\frac{1}{R - \overline{MB}} + \frac{1}{R + \overline{MB}}\right) = \frac{2R^2 \times \overline{OM}}{R^2 - \overline{MB}^2} = \frac{2R^2}{\overline{OM}}.$$

Rezultă $\overline{OL} = \frac{R^2}{\overline{OM}}$, ceea ce demonstrează că L coincide cu punctul în care se întîlnesc tangentele în B și C la cerc.

d) Dreapta UT este perpendiculară pe dreapta BC conform teoremei celor trei perpendiculare.

Scanned with OKEN Scanner

e) Pentru a avea $\widehat{BUC} = 90°$ trebuie să existe relaţia

$$\overline{BU}^2 + \overline{CU}^2 = \overline{BC}^2.$$

Dar $\overline{BU}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AU}^2$ şi $\overline{CU}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AU}^2$, prin urmare, avem condiţia

$$2\overline{AU}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$$

Avînd în vedere că $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 4\overline{TM}^2$, relaţia precedentă devine

$$\overline{AU}^2 = \frac{BC^2 - 4R^2}{2} = \frac{BC^2}{2} - 2R^2;$$

de aici rezultă lungimea segmentului AU astfel încît $\widehat{BUC}$ să fie un unghi drept.

202. Un con circular drept are raza bazei $R = 3a$ şi înălţimea $l = 4a$.

a) Să se calculeze volumul şi aria laterală a conului.

b) Să se afle raportul dintre volumul sferei circumscrise conului şi volumul sferei înscrise în con.

c) Dacă se desfăşoară suprafaţa laterală pe un plan, se obţine un sector circular. Să se afle unghiul format de razele care mărginesc sectorul.

Institutul politehnic, Bucureşti, 1962.

R. a) Se deduce generatoarea $\overline{VB} = 5a$ (fig. 72) şi prin urmare:

$A_{lat} = 15\,\pi\,a^2$, iar volumul $V = 12\,\pi a^3$.

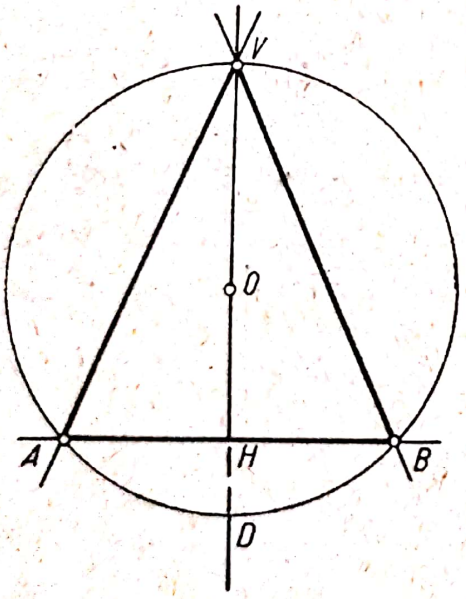


Fig. 72

b) Raza sferei circumscrise este şi raza cercului circumscris triunghiului VAB care este o secţiune plană prin axa conului.

Aplicînd formula $R = \dfrac{\overline{AV} \cdot \overline{VB} \cdot \overline{AB}}{4\,(\text{aria } VAB)}$, obţinem

$$R = \frac{5a \cdot 5a \cdot 6a}{4 \cdot 12a^2} = \frac{25a}{8},$$

iar din formula $r = \dfrac{\text{aria } AVB}{\frac{1}{2}(\overline{AV} + \overline{VB} + \overline{AB})}$ se obţine raza sferei înscrise, $r = \dfrac{3a}{2}$;

prin urmare, raportul dintre volumul sferei circumscrise și a celei înscrise este

$$\left(\frac{R}{r}\right)^3 = \left(\frac{25a}{8} \cdot \frac{2}{3a}\right)^3 = \left(\frac{25}{12}\right)^3 .$$

c) Aria laterală a conului se desfășoară după un sector circular a cărui rază r este generatoarea conului (egală cu $5a$); lungimea arcului de sector este egală cu lungimea cercului de bază a conului, adică $l = 6\pi a$. Din formula care dă lungimea arcului de $n°$, $l = \frac{\pi r n°}{180°}$, obținem $n° = \frac{l \cdot 180°}{\pi r} = \frac{6\pi a \cdot 180°}{\pi \cdot 5a} = 216°$.

203. Fie două cercuri O și O' cu razele R și R', secante exterioare, care au comună coarda $\overline{AB}$. Coarda $\overline{AB}$ este în cercul O latura patratului înscris, iar în cercul O', latura triunghiului echilateral înscris (fig. 73). Se cere:

a) să se calculeze coarda AB și raza R';

b) distanța centrelor OO' și aria patrulaterului $O'AOB$;

c) segmentul tangentă comună TT';

d) volumul corpului născut prin rotirea trapezului $TOO'T'$ în jurul dreptei TT'.

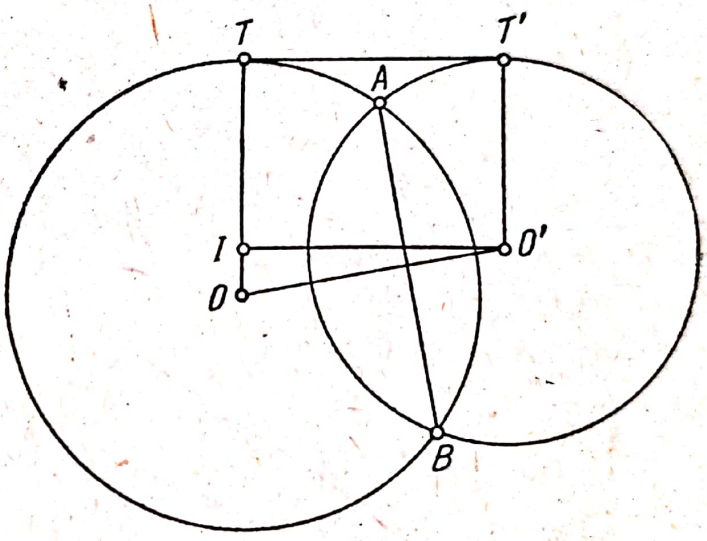


Fig. 73

(Toate rezultatele se vor exprima în funcție de raza R).

Institutul politehnic, Timișoara, 1961.

R. a) $\overline{AB} = R\sqrt{2} = R'\sqrt{3}$, de unde rezultă $R' = \frac{R\sqrt{6}}{3}$.

b) $\overline{OO'}$ = apotema pătratului în cercul O + apotema triunghiului echilateral din cercul $O' = \frac{R\sqrt{2}}{2} + \frac{R'}{2} = \frac{R(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{6}$.

Aria $O'AOB = \frac{\overline{OO'} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{R(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{6} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R^2(6+2\sqrt{3})}{12} =$

$$= \frac{R^2(3+\sqrt{3})}{6} .$$

Scanned with OKEN Scanner

c) $\overline{TT'} = \sqrt{\overline{OO'}^2 - (R - R')^2}$. După efectuarea calculelor, găsim:

$$\overline{TT'} = \frac{R}{3}\sqrt{3(\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 3)}.$$

d) $$V = \frac{\pi \cdot \overline{TT'}}{3}(\overline{OT}^2 + \overline{O'T'}^2 + \overline{OT} \cdot \overline{OT'}) =$$

$$= \frac{\pi R^3}{27}(5 + \sqrt{6}) \cdot \sqrt{3(\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 3)}.$$

204. Fie $ABCD$ un pătrat de centru O și de latură a. Prin vîrfurile opuse A și C ale pătratului se duc în același sens, perpendicularele AA' și CC' pe planul pătratului. Punctul A' este ales astfel, încît $\overline{A'O} = a$ și C' astfel încît, $\overline{A'C'} = 2a$.

a) Să se arate că dreapta $A'C'$ este perpendiculară pe planul $A'BD$.

b) Suma volumelor tetraedrelor $A'ABD$ și $C'CBD$ este egală cu volumul tetraedrului $C'A'BD$.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1960.

R. a) Trebuie demonstrat că $A'C' \perp A'B$ și $A'C' \perp A'O$ (fig. 74). În acest scop, arătăm prin teorema lui Pitagora că triunghiurile $OA'C'$ și $BA'C'$ sînt dreptunghice. Din datele problemei, și prin calcul, aflăm

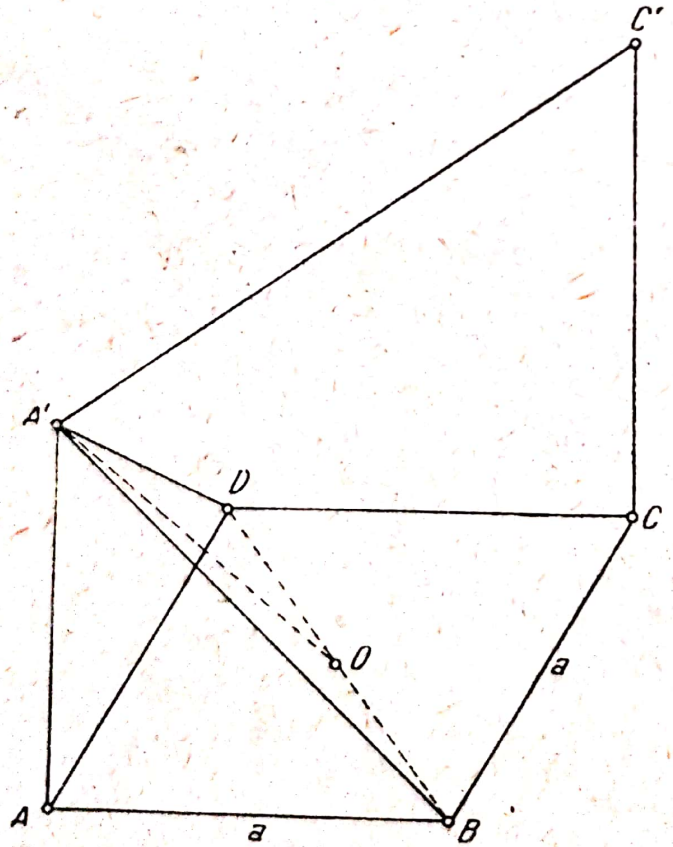


Fig. 74

$$\overline{AA'} = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$\overline{CC'} = \frac{3a\sqrt{2}}{2};$$

$$\overline{OC'} = a\sqrt{5}.$$

Rezultă

$$\overline{OA'}^2 + \overline{A'C'}^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2 = \overline{OC'}^2$$

și

$$\overline{A'B}^2 + \overline{A'C'}^2 = (\overline{AA'}^2 + \overline{AB}^2) + \overline{A'C'}^2 = \frac{3a^2}{2} + (2a)^2 = CC'^2 + \overline{BC}^2 =$$

Scanned with OKEN Scanner

$= \overline{BC'}^2$, ceea ce demonstrează că $OA'C'$ și $BA'C'$ sînt dreptunghice în A.

b) Avem vol $(A'ABD)$ + vol $(C'CBD) = \frac{\text{aria}\,(ABD)\cdot \overline{AA'}}{3} + \frac{\text{aria}\,(CBD)\cdot \overline{CC'}}{3} = \frac{a^2}{6}(\overline{AA'} + \overline{CC'}) = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

De asemenea, avem: vol $(C'A'BD) = \frac{\text{aria}\,(BA'D)\cdot \overline{A'C'}}{3}$.

Dar cum $DA'B$ este isoscel ($\overline{DA'} = \overline{BA'}$ din triunghiurile egale DAA' și BAA'), rezultă aria $(BA'D) = \frac{\overline{BD}\cdot \overline{A'O}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{a}$ și prin urmare

$$\text{vol}\,(C'A'BD) = \frac{\frac{a^2\sqrt{2}}{2}\cdot 2a}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

ceea ce demonstrează afirmația din enunț.

205. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat, lungimea muchiilor fiind a și S mijlocul înălțimii $\overline{AO}$ (O fiind proiecția lui A pe planul BCD).

a) să se arate că dreptele SB, SC, SD sînt perpendiculare două cîte două;

b) să se determine, în funcție de a, distanța de la centrul sferei circumscrise piramidei $SBCD$ la planul BCD și apoi raza acestei sfere.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1961.

R. a) Cunoscînd (fig. 75) că $\overline{BO} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ și $\overline{SO} = \frac{1}{2}\overline{AO} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$, deducem $\overline{SB} = \overline{SC} = \overline{SD} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Deoarece $\overline{SB}^2 + \overline{SC}^2 = \overline{SB}^2 + \overline{SD}^2 = \overline{SC}^2 + \overline{SD}^2 = a^2$, rezultă că $\overline{SB}$, $\overline{SC}$, $\overline{SD}$ sînt perpendiculare două cîte două.

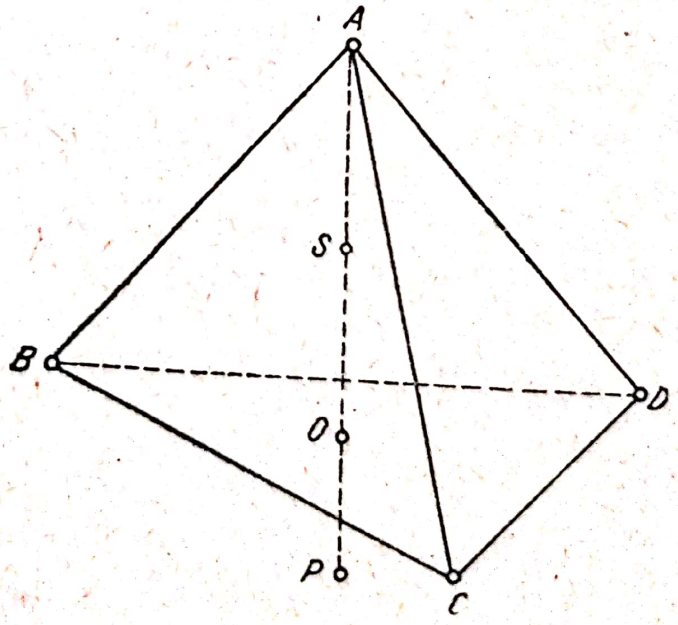


Fig. 75

b) Fie P centrul sferei circumscrise piramidei $SBCD$. Trebuie să avem

$$\overline{PS} = \overline{PB} = \sqrt{\overline{BO}^2 + (\overline{PS} - \overline{SO})^2},$$

sau

$$\overline{PS} = \frac{\overline{BO}^2 + \overline{SO}^2}{2\overline{SO}} = \left(\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6}\right) : \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

care este raza sferei circumscrise piramidei $SBCD$. Distanța de la centrul sferei la planul BCD este

$$\overline{PO} = \overline{PS} - \overline{SO} = \frac{a}{2\sqrt{6}}.$$

206. O piramidă exagonală are baza înscrisă într-un cerc de rază R iar muchiile laterale egale cu $l = R\sqrt{2}$. Se cere să se calculeze:

a) volumul și aria totală a piramidei;

b) raportul dintre volumul sferei circumscrise și volumul sferei înscrise.

Institutul politehnic, Brașov, 1961.

R. a) $V = \frac{R^3\sqrt{3}}{2}$, $\quad A_{tot} = \frac{3R^2}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{3})$.

b) Raza sferei circumscrise este aceeași cu raza cercului circumscris triunghiului care are ca laturi $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{2}$, $2R$, de unde deducem că ea este egală cu R. Raza sferei înscrise este aceeași cu raza cercului înscris în triunghiul care are ca laturi două apoteme situate pe două fețe opuse ale piramidei și ca bază, distanța dintre două laturi opuse ale exagonului. Astfel, găsim că raza sferei înscrise este egală cu $\frac{R(\sqrt{21} - 3)}{4}$.

Deducem că raportul căutat este egal cu

$$\frac{V}{v} = \left[R : \frac{R(\sqrt{21} - 3)}{4}\right]^3 = \frac{(\sqrt{21} + 3)^3}{27}.$$

207. Se dă o piramidă triunghiulară $OABC$ în care se duce secțiunea $A'B'C'$, paralelă cu baza ABC.

a) Să se demonstreze că piramidele $AOB'C'$, $BOC'A'$, $COA'B'$ sînt echivalente. De asemenea, că piramidele $A'OBC$, $B'OCA$, $C'OAB$ sînt echivalente.

b) Să se calculeze în funcție de înălțimea h a piramidei $OABC$ distanța h' de la vîrful O la planul de secțiune, în cazul cînd volumul trunchiului de piramidă format este medie proporțională între volumele celor două piramide.

Institutul de construcții, București, 1960.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Deoarece planul $A'B'C'$ este paralel cu baza ABC, avem (fig. 76)

aria $(OB'C') = k$ aria (OBC), aria $(OA'C') = k$ aria (OAC) și aria $(OA'B') = k$ aria (OAB), unde k este un factor de proporționalitate.

De asemenea, dacă notăm cu $h_{A'}, h_{B'}, h_{C'}, h_A, h_B, h_C$ distanțele de la punctele A', B', C', A, B, C pînă la fețele opuse acestor puncte, avem

$$\frac{h_{A'}}{h_A} = \frac{h_{B'}}{h_B} = \frac{h_{C'}}{h_C} = m.$$

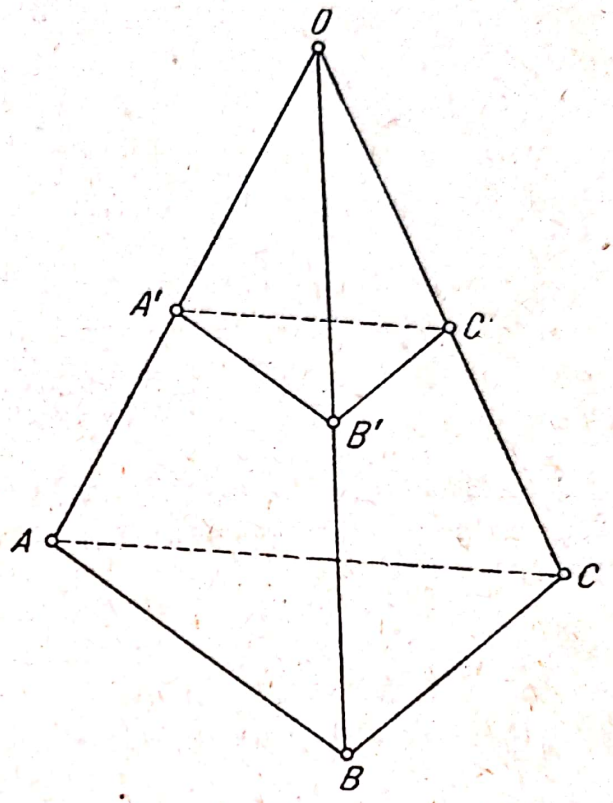


Fig. 76

Ținînd seama de cele spuse mai sus, aflăm că

$$\text{vol}(AOB'C') = \text{vol}\,(BOC'A') = \text{vol}\,(COA'B') = \frac{\text{aria}\,(OB'C')\,h_A}{3} = kV$$

și

$$\text{vol}\,(A'OBC) = \text{vol}\,(B'COA) = \text{vol}\,(C'OAB) = \frac{\text{aria}\,(OBC)\cdot h_{A'}}{3} = mV,$$

unde V este volumul piramidei $OABC$, ceea ce demonstrează afirmațiile de la pct. a).

b) Dacă notăm cu V volumul piramidei $OABC$, cu v volumul $OA'B'C'$, atunci, conform enunțului, avem

$$V - v = \sqrt{Vv}, \text{ sau } (V - v)^2 = Vv,$$

de unde rezultă

$$\frac{v}{V} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ținînd seama că $v < V$, nu putem lua decît

$$\frac{v}{V} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relația cunoscută $\frac{h'}{h} = \sqrt[3]{\frac{v}{V}}$

deducem

$$h' = h\sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}.$$

208. Se dă un trapez dreptunghic $ABCD$ în care poate fi înscris un cerc; fie A', B', C' și respectiv D' punctele de contact ale cercului cu laturile $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ și respectiv $\overline{DA}$, unghiurile din A și D fiind presupuse drepte.

a) Să se stabilească în ce caz este posibil să se înscrie un cerc într-un trapez dreptunghic.

b) Să se calculeze în funcție de baza mare B și de baza mică b, perimetrul patrulaterului $A'B'C'D'$ și lungimea diagonalei sale $\overline{B'D'}$.

c) În funcție de aceleași mărimi, să se calculeze aria și volumul corpului născut prin rotația triunghiului $B'C'A'$ în jurul dreptei $A'C'$.

d) Dacă punctele A și D rămîn fixe, iar punctele B și C se deplasează pe direcțiile paralele AB și DC, astfel ca BC să rămînă tangentă la cercul înscris, să se determine cazul în care perimetrul și aria patrulaterului $A'B'C'D'$ devin maxime.

Facultatea de matematică și fizică, 1961.

R. a) Cercul O fiind înscris în trapez (fig. 77), avem

$$\overline{BB'} = \overline{BA'} = b - \overline{AA'} = b - \overline{AD'} \text{ și } \overline{CB'} = \overline{CC'} = B - \overline{DC'} = B - \overline{DD'},$$

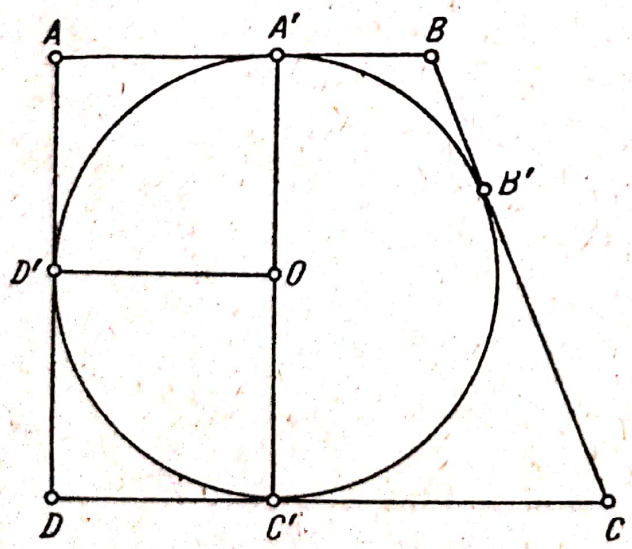


Fig 77

de unde deducem

$$\overline{BC} = B + b - I, \quad (1)$$

unde I este înălțimea trapezului.

Reciproc, dacă (1) este îndeplinită, atunci există un cerc înscris în trapez. Într-adevăr, din (1) deducem că se pot purta pe segmentul $\overline{BC}$ două lungimi $\overline{BB'}$, $\overline{CB'}$ respectiv egale cu $\overline{A'B}$ și $\overline{C'C}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seamă că $\overline{OB}^2 - \overline{OC}^2 = \overline{A'B}^2 - \overline{C'C}^2 = \overline{B'B}^2 - \overline{B'C}^2$, rezultă că $OB' \perp BC$, astfel că triunghiul BOC este dreptunghic. Din egalitatea triunghiurilor dreptunghice $OB'B$ şi OBA', rezultă că $\overline{OB'} = \overline{OA'} = \frac{I}{2}$; prin urmare, BC este tangentă.

În cazul cînd trapezul dreptunghic de baze B, b este circumscris unui cerc, înălţimea şi raza se pot calcula în funcţie de B, b.

Într-adevăr, din relaţia: $I = \sqrt{\overline{BC}^2 - (B - b)^2}$, rezultă

$$I = \sqrt{(B + b - I)^2 - (B - b)^2}$$

şi prin urmare

$$I = \frac{2Bb}{B + b},$$

iar raza cercului este

$$\frac{1}{2} I = \frac{Bb}{B + b}.$$

Lungimea $\overline{BC}$ este deci egală cu $B + b - I = B + b - \frac{2Bb}{B + b} = \frac{B^2 + b^2}{B + b}$, iar segmentele $\overline{A'B}$ şi $\overline{C'C}$ rezultă, respectiv, egale cu:

$$\overline{A'B} = b - \frac{Bb}{B + b} = \frac{b^2}{B + b} \quad \text{şi} \quad \overline{C'C} = B - \frac{Bb}{B + b} = \frac{B^2}{B + b}.$$

b) Calculăm $\overline{OB}$ şi $\overline{OC}$ pentru a putea determina apoi $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$. Avem: $\overline{OB}^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{A'B}^2 = \frac{b^2(B^2 + b^2)}{(B + b)^2}$, rezultă $\overline{OB} = \frac{b\sqrt{B^2 + b^2}}{B + b}$; analog, obţinem $\overline{OC} = \frac{B\sqrt{B^2 + b^2}}{B + b}$.

Deducem $\overline{A'B'} = 2\frac{\overline{OA'} \cdot \overline{A'B}}{OB} = \frac{2Bb^2}{(B + b)\sqrt{B^2 + b^2}}$, la fel $\overline{B'C'} = \frac{2B^2b}{(B + b)\sqrt{B^2 + b^2}}$.

Laturile $\overline{A'D'}$ şi $\overline{D'C'}$ sînt fiecare egale cu latura pătratului înscris în cercul tangent la laturile trapezului dreptunghic. Avem deci,

$$\overline{A'D'} = \overline{D'C'} = \frac{1}{2} I\sqrt{2} = \frac{Bb\sqrt{2}}{B + b}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Perimetrul P al patrulaterului $A'B'C'D'$ este deci egal cu

$$P = \frac{2Bb\sqrt{2}}{B+b} + \left[\frac{2Bb^2}{(B+b)\sqrt{B^2+b^2}} + \frac{2B^2b}{(B+b)\sqrt{B^2+b^2}}\right] =$$
$$= \frac{2Bb\,(B+b+\sqrt{2(B^2+b^2)})}{(B+b)\sqrt{B^2+b^2}}.$$

Lungimea diagonalei $\overline{B'D'}$ o calculăm din patrulaterul inscriptibil $A'B'C'D'$, unde avem:

$$\overline{B'D'} \cdot \overline{A'C'} = \overline{A'D'} \cdot \overline{B'C'} + \overline{A'B'} \cdot \overline{C'D'}. \quad \text{(Ptolemeu)}$$

Rezultă

$$\overline{B'D'} = \frac{Bb\sqrt{2}}{\sqrt{B^2+b^2}}.$$

c) Raza r (comună) a conurilor generate de $A'B'$ și $B'C'$ este egală cu

$$r = \frac{2B^2b^2}{(B+b)(B^2+b^2)},$$

astfel că aria generată de $B'C'A'$ este egală cu

$$\pi r \cdot \overline{A'B'} + \pi\, r \cdot \overline{B'C'} = \pi r\,(\overline{A'B'} + \overline{B'C'}) =$$
$$= \frac{4\pi B^3b^3}{(B+b)(B^2+b^2)\sqrt{B^2+b^2}},$$

iar volumul, $\frac{\pi r^2}{3} \cdot I = \frac{8\pi\, B^5b^5}{3(B+b)^3(B^2+b^2)^2}$.

d) Perimetrul este maxim dacă suma $\overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \frac{2Bb}{\sqrt{B^2+b^2}}$ devine maximă, pentru că în timpul variației sale laturile $\overline{A'D'}$ și $\overline{D'C'}$ rămîn constante. De asemenea și aria patrulaterului $A'B'C'D'$ este maximă atunci cînd aria triunghiului $A'B'C'$, care este egală cu $\frac{2B^3b^3}{(B+b)^2(B^2+b^2)}$, devine maximă.

Ținînd seama că în decursul variației, înălțimea trapezului, care este egală cu $\frac{2Bb}{B+b}$, rămîne constantă, avem de cercetat în ce caz sînt maxime expresiile:

$$z = \frac{B^2b^2}{B^2+b^2} = \frac{(\overline{A'B'} + \overline{B'C'})^2}{4} \quad \text{și} \quad u = \frac{B^3b^3}{(B+b)^2(B^2+b^2)} =$$
$$= \frac{\text{aria}\,(A'B'C')}{2}.$$

Deoarece $\overline{A'B'} + \overline{B'C'}$ și $\frac{1}{2}\ \overline{A'B'} \cdot \overline{B'C'}$ sînt, respectiv, suma catetelor și aria triunghiului $A'B'C'$ înscris într-un semicerc constant, ele sînt maxime atunci cînd $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$, adică în cazul cînd avem:

$$\frac{2Bb^2}{(B+b)\sqrt{B^2+b^2}} = \frac{2B^2b}{(B+b)\sqrt{B^2+b^2}},$$

sau

$$B = b.$$

209. Două cercuri sînt tangente exterioare într-un punct A. Fie $\overline{TT'}$ o tangentă comună exterioară (T și T' punctele de contact) și M, M' intersecțiile celor două cercuri cu o dreaptă variabilă care trece prin punctul A.

a) Să se afle locul geometric al punctului P, intersecția dreptelor MT și MT'.

b) Să se arate că dreptele PA și MM' sînt perpendiculare.

c) Să se arate că volumul generat prin rotația triunghiului PTT' în jurul laturei $\overline{TT'}$ este dat de expresia

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\overline{PT}^2 \cdot \overline{PT'}^2}{TT'}.$$

Facultatea de matematică și fizică, București, 1960.

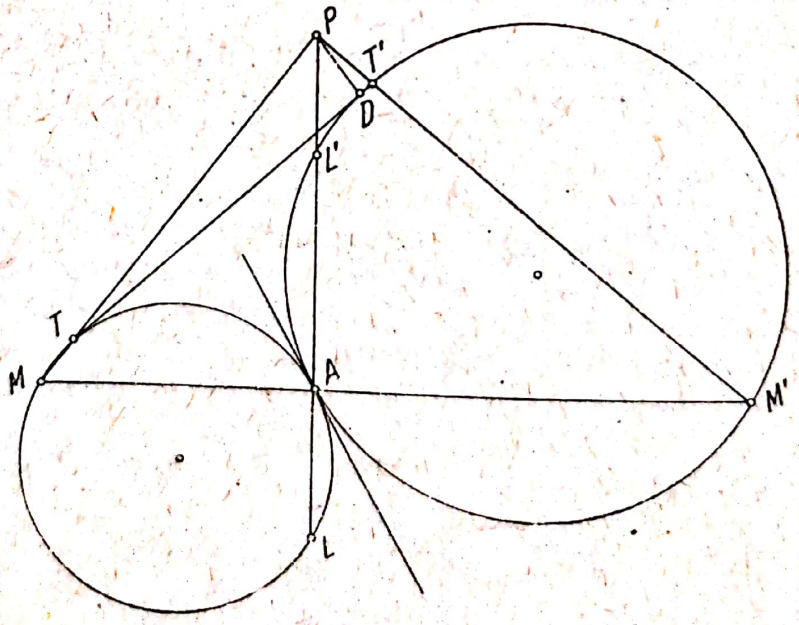


Fig. 78

R. a) Avem (fig. 78) $\widehat{MPM'} = 180° - (\hat{M} + \hat{M}')$, însă măs $\hat{M} = \frac{1}{2}$ măs $\widehat{AT}$ și măs $\hat{M}' = \frac{1}{2}$ măs $\widehat{AT'}$, deci măs $\hat{M} + \hat{M}' = \frac{1}{2}$ măs $(\widehat{AT} + \widehat{AT'})$.

Ținînd seama că $\frac{1}{2}(\widehat{AT} + \widehat{AT'})$ este și mărimea unghiului TAT', care este drept, rezultă că $\widehat{M} + \widehat{M'} = 90°$, iar $\widehat{MPM'}$ este de asemenea drept. Deducem că din P se vede segmentul fix $\overline{TT'}$ sub un unghi drept, astfel că locul lui P este cercul care are $\overline{TT'}$ ca diametru.

b) Patrulaterul $TPT'A$ este inscriptibil, pentru că unghiurile TPT' și TAT' sînt drepte. Rezultă că $\widehat{TPA} = \widehat{AT'T} = \widehat{PM'A}$. Dar, cum avem $\widehat{M'PA} + \widehat{APM} = 90°$, deducem că și $\widehat{M'PA} + \widehat{AM'P} = 90°$, ceea ce demonstrează că $PA \perp M'M$.

c) Dacă notăm cu D piciorul perpendicularei dusă din P pe TT', avem $V =$ volumul generat de $TPT' = \frac{\pi}{3} \cdot \overline{PD}^2 \cdot \overline{DT'} + \frac{\pi}{3} \cdot \overline{PD}^2 \cdot \overline{DT} = \frac{\pi}{3} \overline{PD}^2 \cdot \overline{TT'}$. Deoarece triunghiul TPT' este dreptunghic în P, putem scrie $\overline{PD} = \frac{\overline{PT} \cdot \overline{PT'}}{TT'}$ și prin urmare

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\overline{PT}^2 \cdot \overline{PT'}^2}{\overline{TT'}^2} \cdot \overline{TT'} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\overline{TT}^2 \cdot \overline{PT'}^2}{\overline{TT'}},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

210. Se dă o sferă de rază R cu centrul O și un diametru AOD. Prin mijlocul lui OD se duce un plan perpendicular pe AD care secționează sfera după un cerc C. Se consideră conul înscris în sferă avînd vîrful A și ca bază cercul C. Se cere:

a) Să se calculeze volumul acestui con și aria lui laterală.

b) Dacă tăiem fața laterală a conului după o generatoare și o desfășurăm pe un plan, se obține un sector circular. Să se afle cîte grade are arcul acestui sector.

Institutul politehnic, București, 1961.

R. a) $V = \frac{3\pi R^3}{8}$; $A = \frac{3R^2}{2}$. b) $n° = 180°$.

Scanned with OKEN Scanner

211. Se dă un con circular cu înălțimea $\overline{SA} = 48$ mm și generatoarea $\overline{SB} = 52$ mm.

a) Să se calculeze aria laterală și volumul conului.

b) Se secționează conul cu un plan paralel cu baza la distanța $AC = 12$ mm față de bază; să se calculeze aria laterală și volumul trunchiului de con rezultat.

Facultatea de chimie industrială, Iași, 1961.

R. a) $A_l = 1\,040\,\pi$, $V = 6\,400\,\pi$.

b) Dacă notăm cu a_l aria laterală a trunchiului și cu v volumul său, avem

$$\frac{A_l - a_l}{A_l} = \left(\frac{36}{48}\right)^2 \quad \text{și} \quad \frac{V - v}{V} = \left(\frac{36}{48}\right)^3.$$

Ținînd seama că $A_l = 1\,040\,\pi$ și $V = 6\,400\,\pi$, deducem

$$a_l = A_l\left[1 - \left(\frac{36}{48}\right)^2\right] = \frac{7}{16}A_l \quad \text{și} \quad v = V\left[1 - \left(\frac{36}{48}\right)^3\right] = \frac{37}{64}V.$$

212. Se dă triunghiul ABC. Notînd cu a, b, c, m respectiv laturile acestui triunghi și mediana $\overline{AM}$, se cere:

a) să se arate că volumele corpurilor care se obțin prin rotirea triunghiurilor AMB și ACM în jurul medianei AM sînt egale;

b) să se exprime ariile acestor corpuri în funcție de a, b, c și m.

Institutul politehnic, Timișoara, 1961.

R. a) Notînd cu $\overline{BI}$, $\overline{CL}$ distanțele de la vîrfurile B, C pînă la mediana $\overline{AM} = m$, avem:

$$\text{Volumul generat de } \Delta ABM = \frac{\pi \cdot \overline{BI}^2 \cdot \overline{AM}}{3} =$$

$$= \frac{\pi m \cdot \left(\frac{2 \text{ aria } ABM}{m}\right)^2}{3} = \frac{4\pi p(p-a)(p-b)(p-c)}{3m},$$

iar volumul generat de ΔACM este egal cu cel precedent, pentru că $\overline{BI} = \overline{CL}$.

b) Aria A_1, generată de ABM, este egală cu $A_1 = \pi\,\overline{BI}\,(\overline{AB} + \overline{BM})$, iar A_2, generată de ACM, este $\pi \cdot \overline{CL}\,(\overline{AC} + \overline{MC})$, de unde rezultă

$$A_1 = \frac{\pi S(a + 2c)}{2m} \quad \text{și} \quad A_2 = \frac{\pi S(a + 2b)}{2m},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde:

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}, \qquad 2p = a + b + c.$$

213. Într-o emisferă de rază R se înscrie un con circular drept; la ce distanță x de bază trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încît aria zonei sferice să fie egală cu aria laterală a trunchiului de con tăiat din conul înscris în emisferă.

Să se indice o metodă grafică pentru construcția segmentului x.

Institutul politehnic, București, 1951.

R. Conform enunțului problemei, va trebui să avem

$$2\pi Rx = \pi(R + r)G$$

sau, simplificînd cu π,

$$2Rx = (R + r)G,$$

de unde

$$x = \frac{(R + r)G}{2R}. \tag{1}$$

Din asemănarea triunghiurilor COB și CFE (fig. 79) rezultă

$$\frac{R}{r} = \frac{R}{R - x} \text{ și deci } r = R - x. \tag{2}$$

Înlocuind în ecuația (1), obținem

$$x = \frac{(R + R - x)\,G}{2R}. \tag{3}$$

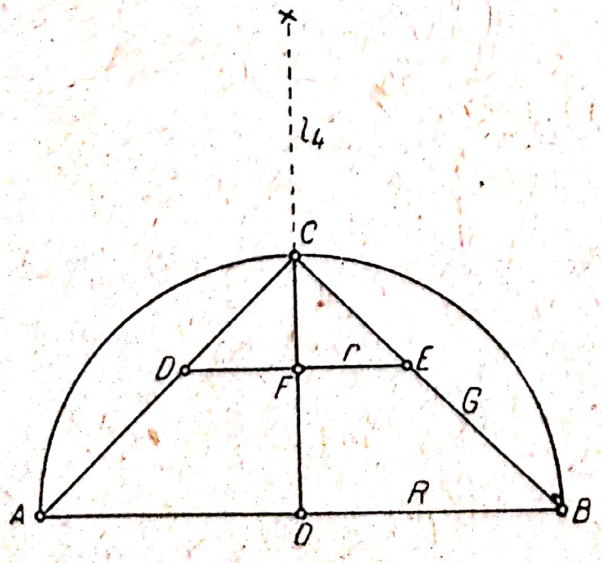


Fig. 79

G este însă egal cu $R\sqrt{2} - r\sqrt{2}$ sau, ținînd seama de relația (2), avem

$$G = x\sqrt{2}.$$

Revenind la ecuația (3), obținem

$$x = R\,(2 - \sqrt{2}).$$

Pentru a construi grafic segmentul x, vom ridica o perpendiculară pe diametrul emisferei, egală cu diametrul, și din ea vom

scădea apoi latura pătratului înscris în cercul de rază R și vom obține astfel segmentul căutat x.

214. Un punct S se găsește la distanța de 175 mm de centrul O al unui cerc. Coarda TT' unește punctele de contact ale tangentelor duse din S la cerc. Diametrul cercului ce trece prin S intersectează cercul în punctele A și A' și coarda TT' în C; $\overline{SC} = 112$ mm. Se cere:

a) aria suprafeței generate prin rotirea segmentului $\overline{ST}$ și a arcului de cerc TA' în jurul diametrului AA';

b) volumul și suprafața corpului generat prin rotirea triunghiului STT' în jurul diametrilor BB' și AA'.

Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1953,

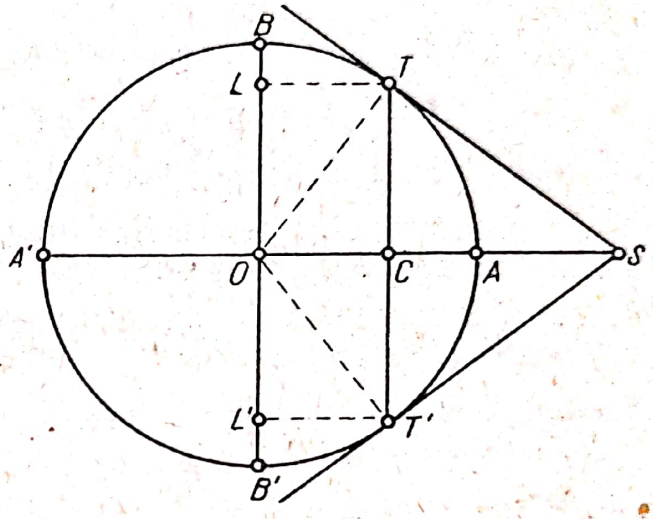


Fig. 80

R. Pentru a răspunde la problemă, avem nevoie de lungimile segmentelor $\overline{OT}$ = raza cercului, $\overline{ST}$ = lungimea tangentei și $\overline{CT}$ = jumătatea coardei contactelor.

În triunghiul dreptunghi OTS (fig. 80) avem

$$\overline{ST}^2 = \overline{SO} \cdot \overline{SC} = 175 \cdot 112,$$

și

$$\overline{OT}^2 = \overline{OS} \cdot \overline{OC} = 175\,(175 - 112) = 175 \cdot 63$$

$$\overline{CT}^2 = \overline{OC} \cdot \overline{CS} = 63 \cdot 112.$$

Făcînd calculele indicate, obținem

$$\overline{ST} = 140;\ \overline{OT} = 105 \text{ și } \overline{CT} = 84.$$

Aria corpului descris prin rotirea liniei $STBA'$ în jurul segmentului $A'S$ este formată din aria laterală a conului descris de $\overline{ST}$ și din aria zonei descrisă de arcul de cerc TBA'; deci, avem

$$\text{aria } STBA' = \pi \cdot \overline{CT} \cdot \overline{ST} + 2\pi \cdot \overline{OT} \cdot \overline{A'C} =$$

$$= \pi \cdot 84 \cdot 140 + 2\pi \cdot 105 \cdot 168 = 47\,040\pi.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Aria corpului format prin rotirea triunghiului STT' în jurul lui AA' este aria totală a unui con

$$A_t = \pi \cdot \overline{CT}\,(\overline{ST} + \overline{CT}) = \pi \cdot 84 \cdot 224 = 18\,816\pi,$$

iar volumul corpului este volumul aceluiași con

$$V = \frac{\pi \cdot \overline{CT}^2 \cdot \overline{CS}}{3} = \frac{\pi \cdot 84^2 \cdot 112}{3} = 263\,424\pi.$$

Aria corpului, descrisă prin rotația triunghiului STT' în jurul lui BB', diametrul perpendicular pe $A'AS$, este formată din dublul ariei laterale a trunchiului de con descris de segmentul $\overline{ST}$ și din aria laterală a cilindrului descris de latura $T'T$; deci, avem

$$A = 2\pi \cdot \overline{TS} \cdot (\overline{LT} + \overline{OS}) + 2\pi \cdot \overline{LT} \cdot \overline{T'T} = 2\pi \cdot 140 \cdot 238 + 2\pi \cdot 63 \cdot 168 = 87\,808\pi.$$

Volumul corpului descris de triunghiul STT' în jurul lui BB' se obține scăzînd volumul cilindrului descris de TT', din dublul volumului trunchiului de con descris de segmentul $\overline{ST}$.

Volumul căutat este dat deci de expresia

$$V = 2 \cdot \frac{\pi \cdot \overline{CT}}{3}(\overline{OS}^2 + \overline{LT} \cdot \overline{OS} + \overline{LT}^2) - \pi \cdot \overline{LT}^2 \cdot \overline{TT'} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi \cdot 84}{3}(175^2 + 63 \cdot 175 + 63^2) - \pi \cdot 63^2 \cdot 168 = 1\,887\,872\pi.$$

215. Să se găsească raza unei sfere înscrise într-un con circular drept. Înălțimea conului este h, iar volumul său V.

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

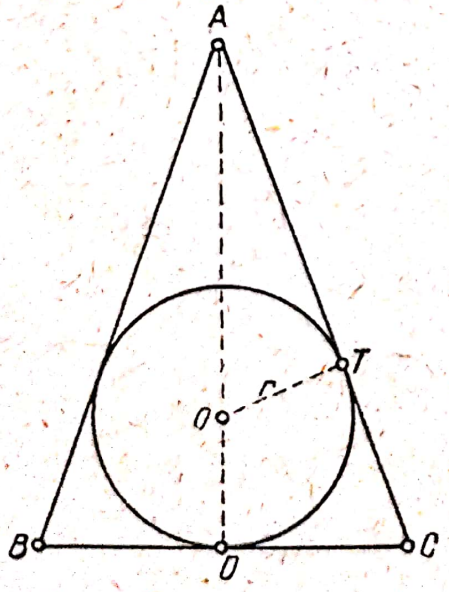


Fig. 81

R. Fie triunghiul isoscel ABC și cercul O înscris în el, secțiunile în con și sfera înscrisă în el, printr-un plan dus prin axa conului (fig. 81).

Din datele problemei rezultă raza $\overline{DC}$ a conului

$$R = \overline{DC} = \sqrt{\frac{\overline{3V}}{\pi h}},$$

iar din asemănarea triunghiurilor AOT și ADC ($\overline{OT}$ este raza la punctul de contact), avem

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\frac{r}{R} = \frac{h-r}{\sqrt{R^2+h^2}} = \frac{r+(h-r)}{R+\sqrt{R^2+h^2}},$$

de unde rezultă

$$r = \frac{Rh}{\sqrt{R^2+h^2}+R} = \frac{R}{h}\left[\sqrt{R^2+h^2}-R\right],$$

unde

$$R = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}.$$

216. Un trunchi de con cu bazele paralele este circumscris unei sfere de rază R. Raza bazei inferioare este împătritul razei bazei superioare.

Să se găsească volumul corpului în funcție de R.

Institutul de petrol și gaze, București, 1955.

R. Fie $ABCD$ secțiunea axială în trunchi și cercul O secțiunea în sferă. Notăm $\overline{MB} = x$ (fig. 82), deci $\overline{NC} = 4x$. Avem $\overline{BT} = \overline{BM} = x$ și $\overline{CT} = \overline{CN} = 4x$ (T și N fiind punctele de tangență cu cercul O).

În triunghiul dreptunghic BOC avem relația

$$\overline{OT}^2 = \overline{BT} \cdot \overline{CT},$$

de unde

$$R^2 = x \cdot 4x,$$

adică

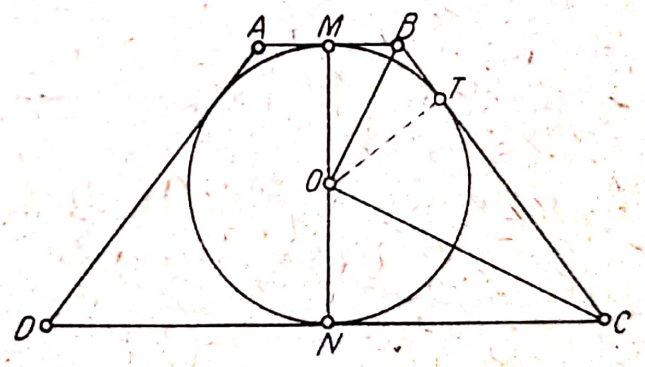


Fig. 82

$$x = \frac{R}{2}.$$

Avem deci $\overline{MB} = \frac{R}{2}$, $\overline{CN} = 2R$ și $\overline{MN} = 2R$. Volumul trunchiului de con este deci

$$V = \frac{\pi \cdot 2R}{3}\left[\frac{R^2}{4} + \frac{R}{2} \cdot 2R + 4R^2\right] = \frac{7\pi R^3}{2}.$$

B. Exerciții și probleme urmate de răspunsuri și indicații

Școala de poduri și șosele București, Școala politehnică București, Școala politehnică Timișoara, 1895—1945.

217. În punctele A și B ale unui cerc se duc două tangente care se întîlnesc în C. Prin A se duce o paralelă la BC, care taie cercul în D. Dreapta CD intersectează a doua oară cercul în E. În sfîrșit, AE intersectează pe BC în F. Să se demonstreze că:

a) $\widehat{ADE} = \widehat{CAE} = \widehat{BCE}$;

b) triunghiurile ACF și CEF sînt asemenea;

c) $\overline{FC}^2 = \overline{FA} \cdot \overline{EF}$;

d) $\overline{FB} = \overline{FC}$;

e) să se determine unghiul C pentru a avea $\overline{AE} = 2\overline{EF}$.

R. a) Unghiurile CAE și ADE (fig. 83) au aceeași măsură, iar unghiurile ADE și BCE sînt egale, ca fiind unghiuri alterne interne formate de dreptele AD și BC.

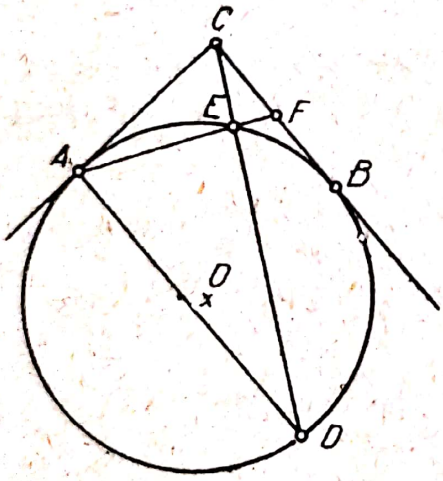


Fig. 83.

b) Unghiul CFA este comun și $\widehat{CAE} = \widehat{ECF}$, după cum s-a arătat la punctul a).

c) Rezultă pe baza punctului b).

d) Avem $\overline{FB}^2 = \overline{FA} \cdot \overline{FE}$ pe baza proprietății puterii punctului față de cerc, iar din c) avem $\overline{FC}^2 = \overline{FA} \cdot \overline{FE}$; rezultă deci $\overline{FB} = \overline{FC}$.

e) Triunghiul ABC este isoscel avînd $\overline{CA} = \overline{CB}$. Deoarece s-a dat $\overline{AE} = 2\overline{EF}$ și $\overline{AF}$ fiind mediană, înseamnă că E este centrul de greutate al triunghiului; prin urmare și CE este mediană. Această ultimă dreaptă fiind mediana corespunzătoare bazei unui triunghi isoscel este și bisectoare.

Avînd $\widehat{ECF} = \widehat{CAE}$ (demonstrat la pct. a), vom avea și $ACE = \widehat{CAE}$, deci $\overline{AE} = \overline{CE}$; prin urmare, medianele din A și C sînt egale. Rezultă că triunghiul ABC este echilateral, astfel că $\hat{C} = 60^\circ$.

Scanned with OKEN Scanner

218. Se dau două cercuri cu centrele în O și O', și care se intersectează în două puncte A și B. Se duce diametrul MON paralel cu $O'A$ și diametrul $M'O'N$ paralel cu OA, punctele M, M' și A fiind de aceeași parte a dreptei OO'. Se cere:

a) să se arate că triunghiurile MOA și $M'O'A$ sînt asemenea; la fel și triunghiurile NOA și $N'O'A$;

b) să se deducă că dreptele AM și AM' sînt în prelungire și că dreptele AN și AN' sînt confundate;

c) că dreptele $AN'N$ și MAM' sînt bisectoarele unghiului $\widehat{OAO'}$.

R. a) Triunghiurile AOM și $AO'M'$ (fig. 84) fiind isoscele cu unghiurile $\widehat{AOM} = \widehat{AO'M'}$, sînt asemenea. Același raționament pentru triunghiurile NOA și $N'O'A'$.

b) Se arată că $\widehat{MAO} + \widehat{OAO'} + \widehat{O'AM'} = 180°$ și că $\widehat{OAN'} = \widehat{OAN}$.

c) Rezultă din cele spuse la punctele precedente.

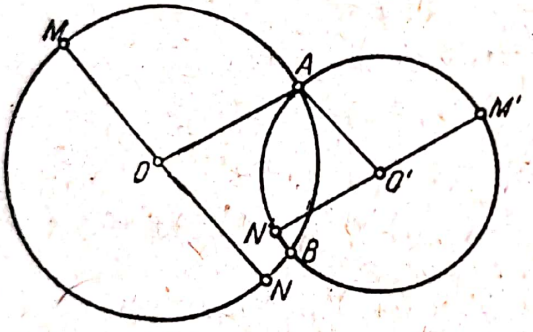


Fig. 84

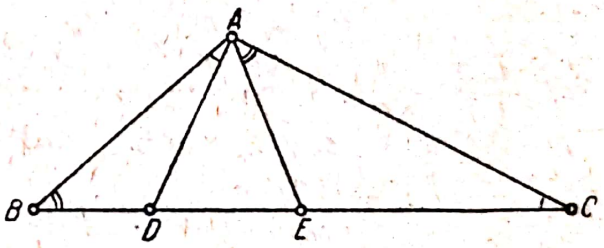


Fig. 85

219. Se dă un triunghi ABC. Pe latura BC se ia un punct D astfel ca unghiul DAB să fie egal cu unghiul ACB, și un punct E astfel ca unghiul EAC să fie egal cu unghiul ABC.

a) Să se calculeze unghiul DAE cînd se cunosc unghiurile triunghiului ABC.

b) Să se arate că avem $\overline{AD} = \overline{AE}$.

c) Să se demonstreze relațiile

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD}, \quad \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CE},$$

cu ajutorul triunghiurilor asemenea ce se formează.

d) Să se demonstreze relația

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{EC}.$$

Scanned with OKEN Scanner

e) Să se arate cum se poate construi triunghiul ABC, cînd se cunosc laturile AB și AC și segmentul $\overline{AD} = \overline{AE}$ de mai sus.

R. a) Dacă $\hat{A} < 90°$, $\widehat{DAE} = 2\,(90° - \hat{A})$; dacă $\hat{A} = 90°$, atunci $\widehat{DAE} = 0$ și cînd $\hat{A} > 90°$, $\widehat{DAE} = 2\,(\hat{A} - 90°)$ (fig. 85).

b) Avem

$$\widehat{ADE} = \widehat{AED} = \hat{B} + \hat{C}.$$

c) Din asemănarea triunghiurilor ABD și ABC avem

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD},$$

iar din triunghiurile asemenea AEC și ABC, obținem

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{EC}.$$

d) Relația rezultă din proporționalitatea laturilor triunghiurilor ABD și AEC, și unde se ține seama de b).

e) Din triunghiurile asemenea ABD și ABC se deduce

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}},$$

relație care permite construirea segmentului $\overline{BD}$ și, prin urmare, posibilitatea construirii triunghiului ABD etc.

220. În triunghiul ABC, unghiul din A este de două ori mai mare ca unghiul din B.

a) Să se calculeze unghiurile A, B și C cînd triunghiul ABC este isoscel sau dreptunghic.

b) Punctul D fiind intersecția bisectoarei interioare a unghiului A cu latura BC, să se arate că bisectoarea unghiului ADC este paralelă cu latura AB.

c) Să se arate că latura CA este medie proporțională între latura BC și segmentul $\overline{DC}$.

d) Să se construiască triunghiul ABC cînd se dau laturile AB, AC și relația $\hat{A} = 2\hat{B}$.

R. a) Cînd triunghiul este isoscel avem,

$$\hat{A} = \hat{C} = 72°, \quad \hat{B} = 36° \quad \text{sau} \quad \hat{B} = \hat{C} = 45°, \ \hat{A} = 90°.$$

Cînd triunghiul este dreptunghic, obținem

$$\hat{A} = 90°, \quad \hat{B} = \hat{C} = 45° \quad \text{sau} \quad \hat{C} = 90°, \quad \hat{A} = 60° \text{ și } \hat{B} = 30°.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Proprietatea rezultă din faptul că triunghiul ABD este isoscel (fig. 86).

c) Deoarece avem $\hat{A} = 2\hat{B}$, triunghiul ADC este asemenea cu ABC. Scriind proporționalitatea laturilor, obținem

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{DC}.$$

d) Din relația anterioară și din faptul că $\overline{AD}$ împarte baza $\overline{BC}$ în segmente proporționale cu laturile $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$, deducem

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}\,(\overline{AB} + \overline{AC}).$$

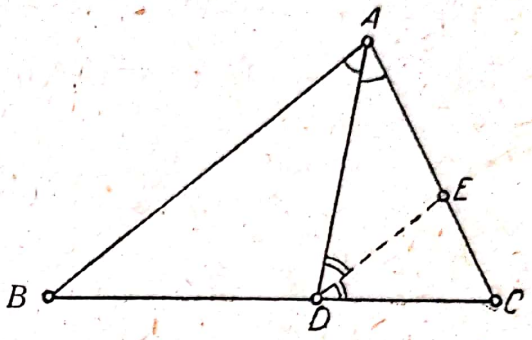


Fig. 86

Această relație folosește la construirea lungimii $\overline{BC}$. Cunoscînd laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ putem construi triunghiul ABC.

221. Printr-un punct I situat pe bisectoarea unui unghi cu vîrful în A se duce o dreaptă variabilă care intersectează laturile unghiului în punctele M și N. Perpendiculara pe bisectoare intersectează aceleași laturi în B și respectiv C. Prin I se duce și o paralelă la AB, care intersectează pe AC în P. Să se arate că:

a) din asemănarea triunghiurilor AMN și PIN, rezultă

$$\frac{1}{\overline{AM}} + \frac{1}{\overline{AN}} = \frac{1}{\overline{IP}} = \text{const};$$

b) avem relația

$$E = \frac{\text{aria } \Delta AMN}{\overline{AM} \cdot \overline{AN}} = \text{const} = \frac{\overline{AI} \cdot \overline{IC}}{\overline{AB}^2};$$

c) dacă unghiul A este de 60°, avem $\overline{AC} = 2\overline{IC}$. Să se construiască în acest caz dreapta MN care trece prin I, astfel ca aria triunghiului AMN să fie dublul ariei triunghiului ABC. Se va observa că suma și produsul segmentelor AM și AN sînt cunoscute. Să se facă exact construcția pentru cazul $\overline{AI} = 4$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Scriem proporționalitatea laturilor triunghiurilor AMN, PIN (fig. 87).

$$\frac{\overline{IP}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{AN}},$$

unde înlocuim

$$\overline{PN} = \overline{AN} - \overline{AP} = \overline{AN} - \overline{IP}.$$

b) Ducem ML perpendiculară pe dreapta AN. Avem

$$\frac{\text{aria } AMN}{\overline{AM} \cdot \overline{AN}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{AN} \cdot \overline{ML}}{\overline{AN} \cdot \overline{AM}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{ML}}{\overline{MA}}.$$

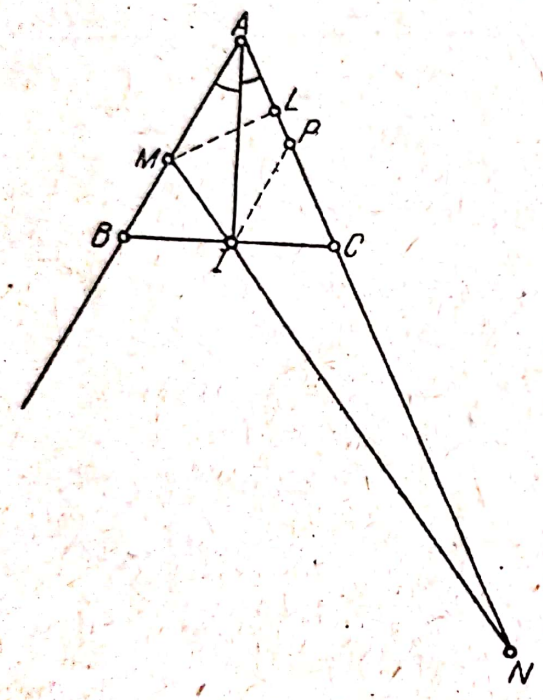


Fig. 87

După ce luăm o altă poziție a secantei $M'IN'$ și perpendiculara analogă $M'L'$, găsim că raportul considerat este egal cu

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{M'L'}}{\overline{M'A'}}.$$

Din asemănarea triunghiurilor AML, $AM'L'$, rezultă

$$\frac{\overline{ML}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{M'L'}}{\overline{M'A'}},$$

adică raportul E este constant. Valoarea raportului constant se obține luînd pentru secantă poziția particulară BIC.

c) În cazul dat, avem

$$\overline{AM} \cdot \overline{AN} = 2\overline{AB}^2 \quad \text{și}$$
$$\overline{AM} + \overline{AN} = 4\overline{AB}.$$

Cunoscînd suma și produsul segmentelor $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, acestea se construiesc după metoda cunoscută.

222. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale pătratului $ABCD$ se iau în același sens segmentele egale $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$. Să se arate că:

a) cercurile $D'AA'$, $A'BB'$, $B'CC'$, $C'DD'$ trec prin același punct I;

b) dacă M este punctul unde diagonala BD taie cercul $D'AA'$ arcul $A'M$ este egal cu AD';

Scanned with OKEN Scanner

c) dacă M' este punctul unde diagonala BD taie a doua oară cercul $B'CC'$, iar L și L' punctele unde diagonala AC taie a doua oară respectiv cercurile $A'BB'$ și $C'DD'$, patrulaterul $LML'M'$ este un pătrat.

R. a) $A'B'C'D'$ (fig. 88) este un pătrat, iar punctul I de întîlnire a diagonalelor $A'C'$, $B'D'$ este situat pe cercurile circumscrise triunghiurilor $D'AA'$, $A'BB'$, $B'CC'$, $C'DD'$.

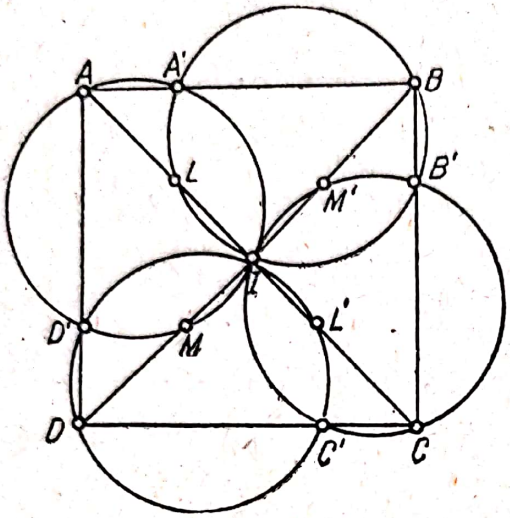


Fig. 88

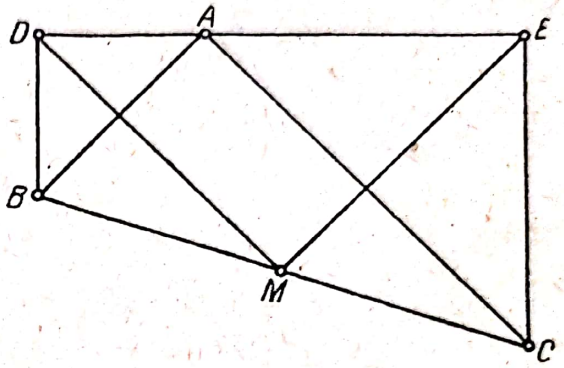


Fig. 89

b) Se constată că patrulaterul $AA'MD'$ este dreptunghic, de unde rezultă $\overset{\frown}{AD'} = \overset{\frown}{A'M}$.

c) Întocmai ca și M, celelalte puncte M', L, L' se obțin, ducînd paralele la laturile pătratului prin punctele $(B'C')$; (A',B'); $(C'D')$. De aceea, rezultă că patrulaterul $LML'M'$ are unghiurile drepte și laturile egale; prin urmare, este un pătrat.

223. Se consideră un triunghi ABC avînd unghiul din A de 90°. Pe laturile AB, AC se construiesc în exterior triunghiurile dreptunghice isoscele ABD și ACE, avînd aceste laturi ca ipotenuze.

Se cere să se demonstreze că

a) punctele D, A, E (fig. 89) sînt coliniare;

b) dreptele BD și EC sînt paralele;

c) bisectoarele unghiurilor D și E împreună cu BC sînt trei drepte concurente.

R. a) Avem

$$\overset{\frown}{DAB} + \overset{\frown}{BAC} + \overset{\frown}{CAE} = 180°.$$

b) BD este paralelă cu CE, ambele fiind perpendiculare pe DAE.

Scanned with OKEN Scanner

c) Proprietatea rezultă din faptul că bisectoarele unghiurilor D și E sînt mediatoarele laturilor AB și AC.

224. Se dau două cercuri tangente exterioare în punctul A (fig. 90), cu centrele în O și O' și cu razele $\overline{OA} = R$, $\overline{O'A} = R'$. Cele două cercuri au trei tangente comune: AT, care le atinge pe amîndouă în A; BB', care atinge cercul O în B și cercul O' în B'; CC', analogă cu precedenta. Tangenta AT taie tangenta comună BB' în punctul T.

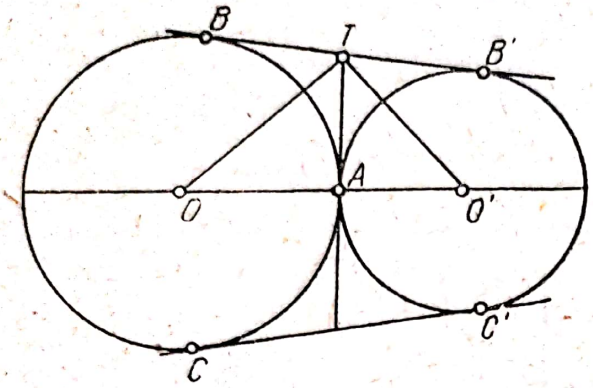


Fig. 90

a) Să se demonstreze că triunghiul OTO' este dreptunghic, Să se deducă expresia lungimii $\overline{AT}$ și de aci a lungimii $t = \overline{BB'}$ a tangentei comune cu ajutorul razelor R și R'.

b) Se presupune că pentru cele două cercuri tangente O și O' se cunoaște depărtarea $\overline{OO'} = d$ dintre cele două centre, precum și lungimea $t = \overline{BB'}$ a tangentei comune. Să se formeze ecuația de gradul al doilea care are ca rădăcini razele necunoscute R și R' ale cercurilor. Să se deducă de aci condiția de posibilitate a problemei.

R. a) Dreptele OT și $O'T$ sînt bisectoarele a două unghiuri suplimentare adiacente, deci sînt perpendiculare. Triunghiul OTO' este dreptunghic, iar $\overline{AT}$ este înălțimea unghiului drept; avem deci,

$\overline{TA}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{O'A}$, de unde rezultă $\overline{TA} = \sqrt{RR'}$, iar $t = 2\sqrt{RR'}$;

b) $4x^2 - 4dx + t^2 = 0$; condiția de posibilitate $d > t$.

225. Se dă un paralelogram $ABCD$ (fig. 91) căruia i se împarte diagonala $\overline{BD}$ prin punctele M și N în trei părți egale. Dreapta AM intersectează latura $\overline{BC}$ în A', iar AN intersectează latura $\overline{CD}$ în A''; de asemenea, dreapta CM intersectează pe $\overline{AB}$ în C'', iar CN intersectează pe $\overline{AD}$ în C'. Se cere

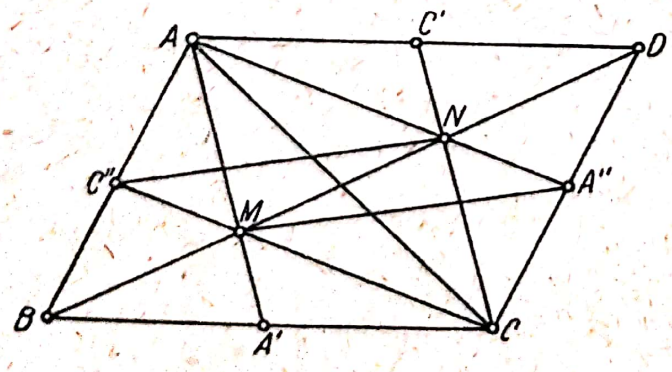


Fig. 91

a) să se arate că patrulaterele $AMCN$ și $A''MC''N$ sînt paralelograme;

b) să se determine rapoartele dintre ariile acestor paralelograme și aria paralelogramului $ABCD$.

c) Cum trebuie să fie paralelogramul $ABCD$ pentru ca $AMCN$ să fie un dreptunghi? Dar $A''MC''N$ să fie un dreptunghi?

R. a) Se deduce din egalitatea triunghiurilor ADM și CNB, precum și din egalitatea triunghiurilor AMC'' și $A''CN$.

b) Triunghiul AMN avînd același vîrf cu triunghiul ABD și baza $\overline{MN} = \frac{1}{3}\overline{BD}$, rezultă că aria sa este $\frac{1}{3}$ din aria ABD; prin urmare și aria $AMCN = \frac{1}{3}$ (aria $ABCD$).

Triunghiul $MC''N$ are vîrful C'' așezat în mijlocul lui $\overline{AC}$, deci C'' este situat la jumătate distanță de $\overline{BD}$ pe cît este A distanțat de aceeași bază. Rezultă că aria $MC''N = \frac{1}{2}$ aria MAN, sau aria $MC''N = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ aria $ABC = \frac{1}{6}$ aria ABD și prin urmare avem aria $A''NC''M = \frac{1}{6}$ (aria $ABCD$).

c) Pentru ca $AMCN$ să fie dreptunghi este necesar să avem $3\overline{AC} = \overline{BD}$, iar pentru ca $A''MC''N$ să fie dreptunghi, trebuie ca $3\overline{A''C''} = \overline{BD}$, sau $3\overline{BC} = \overline{BD}$.

226. Se dau două cercuri de rază R și R' (fig. 92) cu centrele în O și O', tangente exterioare în A. Se duce tangenta comună BB',

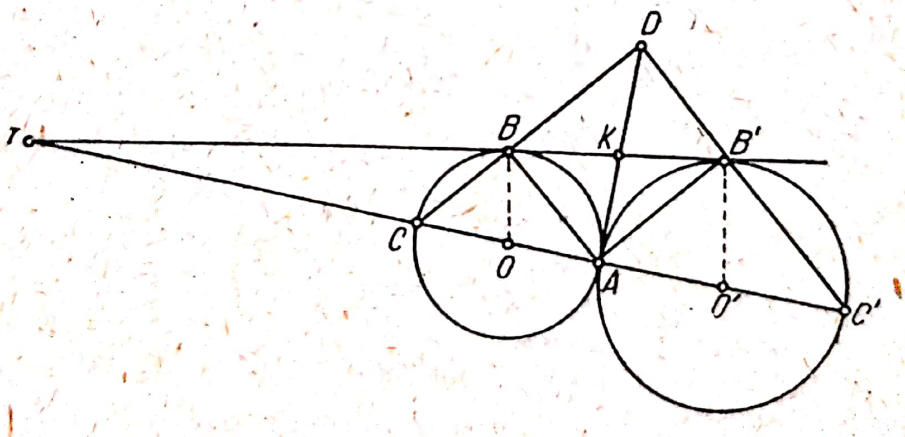


Fig. 92

care atinge cercul O în B. cercul O' în B' și intersectează linia centrelor OO' în I. Să se calculeze lungimile $\overline{IO}$, $\overline{IO'}$, $\overline{IB}$, $\overline{IB'}$ și deci $\overline{BB'}$. Dacă se notează cu C și C' punctele diametral opuse

lui A în cercurile O și O', dreptele CB și $C'B'$ se intersectează într-un punct D. Să se arate că $ABDB'$ este un dreptunghi, în care diagonala AD este tangentă în A la cele două cercuri. Să se găsească pe această cale lungimea $\overline{BB'} = \overline{AD}$, exprimată cu ajutorul razelor R și R'.

R. Avem

$$\overline{IO} = \frac{R(R'+R)}{R'-R}; \quad \overline{IO'} = \frac{R'(R'+R)}{R'-R}; \quad \overline{IB} = \frac{2R\sqrt{RR'}}{R'-R};$$

$$\overline{IB'} = \frac{2R'\sqrt{RR'}}{R'-R}; \quad \overline{BB'} = 2\sqrt{RR'}.$$

Unghiurile CBA și $AB'C'$ sînt drepte, fiind înscrise în cîte un semicerc. Se arată, de asemenea, că și unghiul BAB' este drept. Dreapta AD este perpendiculară pe OO', de unde rezultă că D este pe tangenta în A la cele două cercuri. Dacă punctul K este intersecția dreptelor BB' și AD, avem deci

$$\overline{BB'} = \overline{AD} = 2\overline{AK}.$$

Din triunghiul dreptunghic OKO' deducem $\overline{AK} = \sqrt{RR'}$, prin urmare,

$$\overline{BB'} = \overline{AD} = 2\sqrt{RR'}.$$

227. Se consideră un cerc de centru O (fig. 93), de rază R și un diametru fix Ox al acestuia. Un segment $\overline{AB}$, de lungime egală cu raza R, se mișcă în așa fel, ca A să descrie axa Ox, iar B cercul O. În punctul A se duce perpendiculara pe Ox, care întîlnește pe OB în M. Se cere:

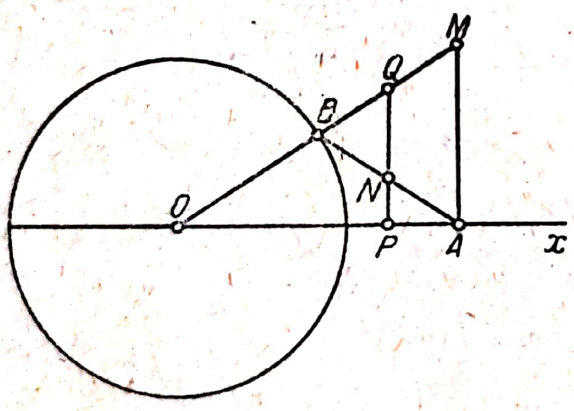


Fig. 93

a) să se calculeze $\overline{AM}$ în funcție de $\overline{OA} = 2u$;

b) fie N punctul de pe AB, situat între A și B la distanța b de A, iar P și Q punctele unde perpendiculara din N pe Ox intersectează pe Ox și OB. Să se calculeze raportul $\frac{\overline{PQ}}{\overline{PN}}$, arătînd că este constant cînd $\overline{AB}$ variază ca poziție, păstrînd însă o lungime constantă R;

c) să se afle locul lui Q și al lui M;

d) se poate deduce locul lui N din cunoașterea locului lui Q?

Scanned with OKEN Scanner

R. Avem

a) $\overline{AM} = 2\sqrt{R^2 - u^2}$.

b) $\frac{\overline{PQ}}{\overline{PN}} = \frac{2R - b}{b}$.

c) Avînd $\overline{AB} = \overline{BO} = R$, triunghiul ABO este isoscel și deci $\widehat{BOA} = \widehat{BAO}$. Complementele acestor unghiuri $\widehat{OMA}$, respectiv $\widehat{BAM}$ sînt de asemenea egale și prin urmare triunghiul ABM este isoscel. Astfel că avem $\overline{MB} = \overline{BA}$ și $\overline{MO} = \overline{AB} + \overline{BO} = 2R$, urmează de aici că locul lui M este cercul cu centrul în O și raza $2R$.

Triunghiul QBN este isoscel, fiind asemenea cu MBA; deci $\overline{QB} = \overline{BN} = R - b$ și prin urmare $\overline{QO} = \overline{QB} + \overline{BO} = R - b + R = 2R - b$.

Deci locul Q este cercul cu centrul O și raza $2R - b$.

d) Deoarece avem $\frac{\overline{PQ}}{\overline{PN}} = \frac{2R - b}{b} = \text{const}$, iar Q descrie cercul cu centrul O, atunci N descrie o elipsă cu centrul O, axa mare egală cu diametrul cercului O descris de Q și axa mică $2b$. Aceasta este o consecință a teoremei cercului principal.

228. Se dau două cercuri exterioare O și O' (fig. 94), de raze R și R' și avînd distanța centrelor $\overline{OO'} = d$; din centrul O se construiesc tangentele $\overline{OA'}$ și $\overline{OB'}$ la cercul O' și din centrul O' tangentele $O'A$ și $O'B$ la cercul O.

Cele patru tangente determină patru puncte $M(O'A, OA')$, $M'(OB', O'B')$, $N(OA', BO')$ și $N'(OB', O'A)$ (ultimele două puncte nu sînt reprezentate pe figură).

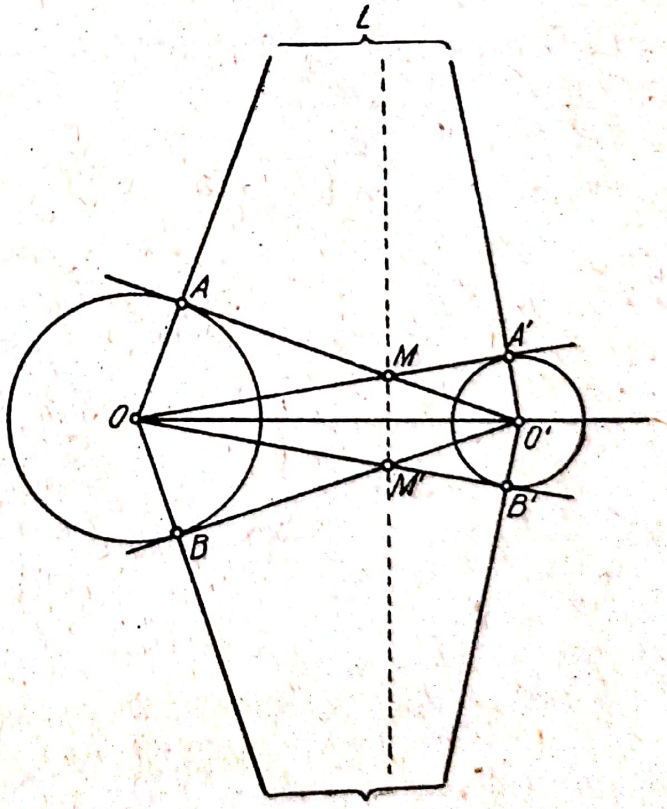


Fig. 94

Să se arate:

a) că dreptele OA, $O'A'$ se întîlnesc în L pe MM' și de asemenea, OB și $O'B'$ se întîlnesc în L' pe MM';

b) că dreptele OB, $O'A'$ se întîlnesc în P' pe NN'; de asemenea, OA și $O'B'$ se întîlnesc în P pe NN';

c) să se calculeze perimetrul și aria patrulaterului $OMO'M'$;

d) să se calculeze aria trapezului $MNN'M'$;

e) să se calculeze lungimea segmentului $\overline{LL'}$.

R. a) și b) se demonstrează pe baza unor considerații de simetrie.

c) Avem

$$P = \frac{2d^2(R + R')}{R\sqrt{d^2 - R'^2} + R'\sqrt{d^2 - R^2}},$$

$$S = \frac{d^2RR'}{R\sqrt{d^2 - R'^2} + R'\sqrt{d^2 - R^2}}.$$

d) $$S = \frac{4R^2R'^3\sqrt{(d^2 - R'^2)(d^2 - R^2)^2}}{d^2(R^2 - R'^2)^2}.$$

e) $$\overline{LL'} = \frac{2d\sqrt{(d^2 - R^2)(d^2 - R'^2)}}{R\sqrt{d^2 - R'^2} + R'\sqrt{d^2 - R^2}}.$$

229. Se dă un plan (P) (fig. 95), un cerc O de rază dată R în acest plan și un segment AB, de lungime $2a$, exterior planului (P).

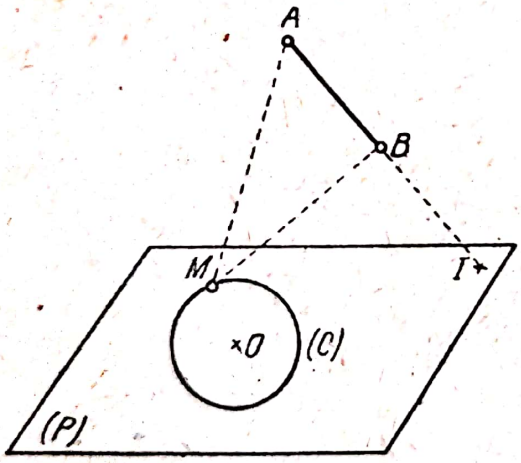


Fig. 95

a) Să se găsească pe cercul O punctele care sînt egal depărtate de extremitățile segmentului $\overline{AB}$. Discuție.

b) Să se găsească pe cercul O punctele M pentru care raportul $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ are o valoare dată $\frac{m}{n}$. Discuție.

c) Să se ducă prin dreapta AB un plan care să dea în cercul O coarda cea mai mare.

d) Să se ducă prin dreapta AB un plan care să dea în cercul O o coardă $\overline{CD}$ de lungime dată a. Discuție.

R. a) Punctele căutate sîntla intersecția planului mediator al segmentului $\overline{AB}$ cu cercul O. Putem avea două soluții, una sau nici una.

Scanned with OKEN Scanner

b) Locul geometric al punctelor din spaţiu pentru care raportul distanţelor la punctele A, B este $\frac{m}{n}$ reprezintă o sferă care are ca diametru segmentul care unește punctele de pe $\overline{AB}$ și prelungirea lui și care îl împart pe acest în raportul $\frac{m}{n}$. De aici rezultă că punctele M de pe cercul O, astfel ca $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{m}{n}$, sînt situate la intersecţia sferei cu acest cerc. Putem avea ca soluţie toate punctele de pe cercul O dacă acesta aparţine sferei; două soluţii, dacă cercul O taie sfera, o soluţie în cazul cînd sfera este tangentă cu cercul O_2 sau nici o soluţie.

c) Planul format de AB și centrul O. Dacă dreapta AB trece prin O, avem o infinitate de soluţii.

d) Toate coardele de aceeași lungime a sînt tangente unui cerc (C) concentric cu cercul O. Pentru a găsi planele ce trec prin AB, care interceptează în cercul O coarda de lungime a, vom duce din punctul I, unde AB taie planul cercului O, tangentele la cercul (C). Putem avea două soluţii, una sau nici una, după cum I este în exteriorul cercului (C), pe cercul (C), sau în interiorul acestuia. Dacă dreapta AB este paralelă cu planul cercului, atunci ducem două tangente la cercul (C) paralele cu direcţia dreptei AB.

230. Fie cercul fix O și punctul fix C exterior lui (fig. 96). Ducem secanta CBA și o tangentă CD la cercul O. Cercul CBD intersectează pe AD în E. Să se arate că:

a) dreapta CE este tangentă cercului ABE;

b) segmentele $\overline{CD}$ și $\overline{CE}$ sînt egale;

c) să se afle locul punctului E;

d) să se afle locul punctului M de intersecţie al dreptelor AO și CE.

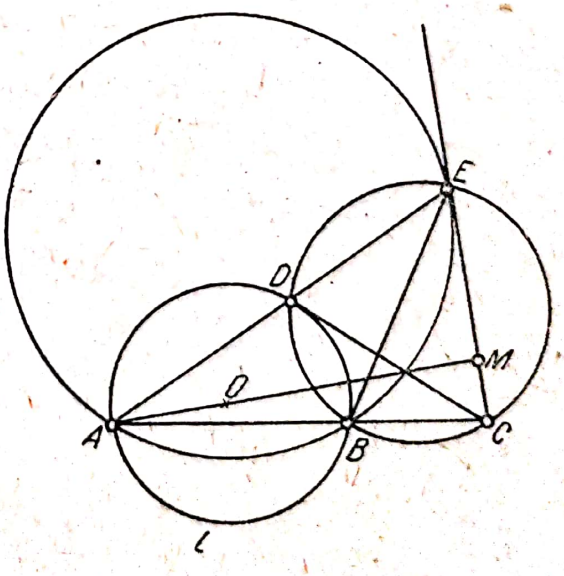


Fig. 96

R. a) Din egalitatea unghiurilor $\widehat{CEB} = \widehat{CDB} = \widehat{BAD}$ rezultă că CE este tangentă la cercul ABE în punctul E.

b) Avem în cercul O relaţia $\overline{CD}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CA}$, iar în cercul ABE relaţia $\overline{CE}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CA}$, deci $\overline{CE} = \overline{CD}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Din relația $\overline{EC} = \overline{DC}$ rezultă că locul lui E este un cerc cu centrul în C și rază $\overline{DC}$.

d) Patrulaterul $CEBD$ fiind înscriptibil, avem măs $\widehat{ACE}$ = măs $\widehat{BDA}$ = măs $\frac{\widehat{ALB}}{2}$. Pe de altă parte, constatăm că măs $\widehat{MAC}$ = măs $\frac{180^\circ - \widehat{ALB}}{2}$, de unde rezultă $\widehat{ACE} + \widehat{MAC} = 90^\circ$ și prin urmare $AM \perp EC$. Deducem că locul lui M este cercul de diametru $\overline{OC}$, pentru că din M se vede segmentul fix $\overline{OC}$ sub un unghi drept.

231. Se consideră un triunghi echilateral ABC în care ducem înălțimea AD coborîtă din A pe BC. Perpendiculara coborîtă din D pe AB întîlnește paralela dusă prin A la BC în M. Notînd cu $2a$ latura triunghiului echilateral, se cere:

a) să se calculeze, în funcție de a, aria triunghiului BDM;

b) să se arate că $\overline{AM} = 3a$;

c) să se calculeze $\overline{BM}$ în funcție de a.

R. a) Obținem

$$\text{aria } BDM = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

b) Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice ADC, MAD, rezultă $\overline{AM} = 3a$.

c) $\overline{BM} = a\sqrt{7}$.

232. Se dă paralelogramul $ABCD$ (fig. 97), în care $\overline{AB} = \overline{DC} = a$, $\overline{AD} = \overline{BC} = b$; se duc bisectoarele interioare AEG, BFG, CFH, DEH ale unghiurilor $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$. Se cere:

a) să se demonstreze că patrulaterul $EHFG$, format de cele patru bisectoare, este un dreptunghi;

b) dacă vîrfurile C și D sînt fixe, lungimile a și b constante, iar unghiurile $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ variabile în propriul lor plan, să se găsească locurile geometrice descrise de punctele E, F, G, H, I, J, unde I și J sînt punctele de intersecție ale laturii AB respectiv cu bisectoarele DEH și CFH;

c) dacă $ABCD$ este un dreptunghi, $EHFG$ este un pătrat; în acest caz, să se calculeze aria sa.

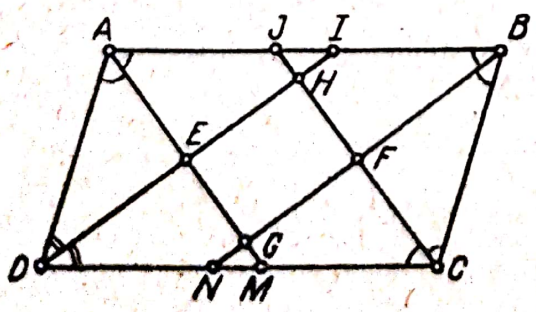


Fig. 97

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Se calculează unghiurile $\hat{E}$, $\hat{F}$, $\hat{G}$, $\hat{H}$ în funcție de unghiurile paralelogramului $ABCD$. Se găsește $\hat{E} = \hat{F} = \hat{G} = \hat{H} = 90°$.

b) Notăm cu M și N punctele de întretăiere a bisectoarelor AEG și BFG cu latura DC. Se constată că aceste puncte sînt fixe, pentru că avem $\overline{DM} = \overline{DA} = b = \text{const}$ și $\overline{CN} = \overline{CB} = b = \text{const}$. Unghiurile $\widehat{DEM}$, $\widehat{NFC}$, $\widehat{NGM}$, $\widehat{DHC}$ fiind drepte, rezultă că locurile punctelor E, F, G, H sînt cercuri de diametrii $\overline{DM}$, $\overline{NC}$, $\overline{NM}$, $\overline{DC}$. Din egalitățile $\overline{MI} = \overline{DA} = b$ și $\overline{NJ} = \overline{CB} = b$ rezultă că I și J descriu cercuri de rază b și cu centrele respective în M și N.

c) Se calculează $\overline{EG} = \overline{GF} = \frac{a-b}{2}\sqrt{2}$. Aria pătratului este deci $\frac{(a-b)^2}{2}$.

233. Într-un triunghi oarecare ABC (fig. 98), fie D piciorul înălțimii coborîte din A pe BC, E piciorul înălțimii coborîte din B pe AC, F mijlocul lui $\overline{AB}$, G mijlocul lui $\overline{AC}$ și O centrul cercului circumscris triunghiului. Presupunînd că $\overline{AD} = \overline{DC}$ și $\overline{AB} = 2\overline{BD}$, se cere:

a) să se construiască triunghiul cunoscînd înălțimea $\overline{AD}$;

b) să se arate că $\widehat{FDG} = 75°$;

c) să se arate că dreptele AO și BO sînt perpendiculare;

d) să se arate că lungimea $\overline{DE}$ este egală cu raza cercului circumscris triunghiului ABC.

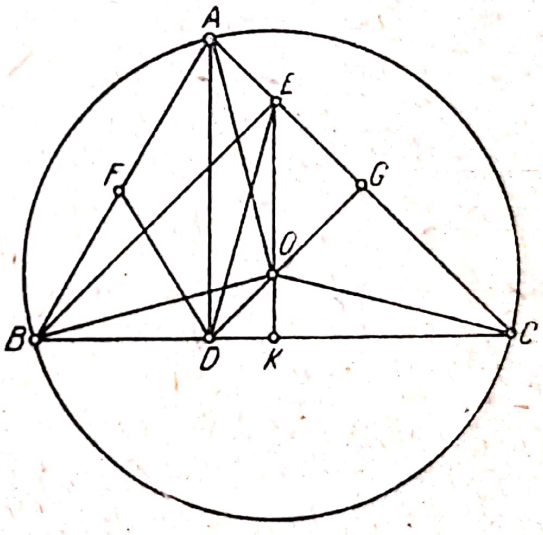


Fig. 98

R. a) Se construiește triunghiul dreptunghic isoscel ACD, apoi se duce semidreapta AB astfel ca $\widehat{BAD} = 30°$ și care intersectează prelungirea lui CD în punctul B, al treilea vîrf al triunghiului ABC.

b) Unghiurile triunghiului ABC sînt respectiv $\hat{A} = 75°$, $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 45°$. Avînd în vedere că $\widehat{FDA} = \widehat{FAD} = 30°$ și $\widehat{GDA} = \widehat{GAD} = 45°$, găsim $\widehat{FDG} = \widehat{FDA} + \widehat{GDA} = 75°$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Unghiul la centru $\widehat{AOB}$ fiind îndoitul unghiului $\widehat{C}$, rezultă că AO este perpendiculară pe BO.

d) Dacă punctul K este mijlocul lui $\overline{BC}$, se constată că triunghiurile dreptunghice DEK, KOC sînt egale, de unde deducem că ipotenuzele $\overline{DE} = \overline{OC} = R$.

234. Se dă un triunghi dreptunghic isoscel OAB (fig. 99), în care $\overline{OA} = \overline{OB}$; pe cateta $\overline{OA}$ (sau pe prelungirea ei) se ia un punct arbitrar P, iar pe cateta $\overline{OB}$ (sau pe prelungirea ei) un punct Q, astfel ca $\widehat{BPQ} = 90°$. Paralela dusă din A la PQ intersectează dreapta OB în R.

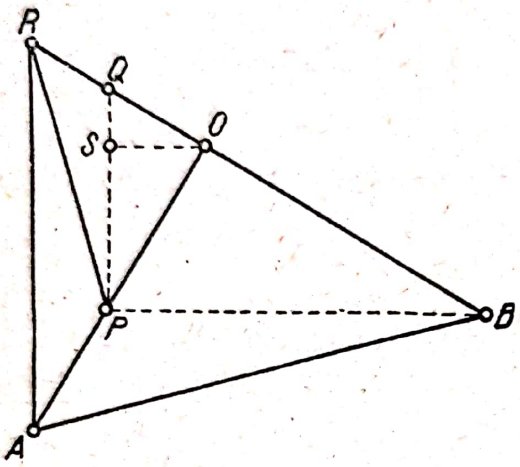


Fig. 99

a) Să se arate că triunghiul POR este isoscel.

b) Să se determine poziția lui Q astfel ca segmentul $\overline{OP}$ să fie de două ori mai mare decît distanța $\overline{OS}$ a punctului O la dreapta PQ.

R. a) Din egalitatea triunghiurilor dreptunghice AOR și BOP, rezultă $\overline{OR} = \overline{OP}$ și $\overline{AR} = \overline{BP}$ și, prin urmare, triunghiul dreptunghic POR este isoscel.

b) Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice SOP și SOQ și din triunghiul QPB se deduce $\overline{OQ} \cdot \overline{OB} = 3\overline{OQ}^2$, de unde rezultă pentru poziția lui Q două soluții: $\overline{OQ} = 0$ sau $\overline{OQ} = \frac{\overline{OB}}{3}$.

235. Se dă un trapez isoscel $ABCD$ cu bazele $\overline{AB} = 2a$ și $CD = 2b$ și ale cărui diagonale se intersectează în unghi drept. Se cere:

a) să se arate cum se poate construi un astfel de trapez cînd se cunoaște a și b;

b) să se demonstreze că suma ariilor pătratelor, construite pe cele două baze, este egală cu suma ariilor pătratelor construite pe laturile oblice ale trapezului;

c) fie $ADD'A'$ pătratul construit pe latura AD în exteriorul trapezului. Să se găsească locul geometric al vîrfului D' al pătratului, cînd baza CD a trapezului se deplasează paralel cu AB, care rămîne fixă.

R. a) Pe o dreaptă se iau punctele M, N, P (fig. 100, a) astfel ca $\overline{MN} = a$; $\overline{NP} = b$, Se construiesc cercurile cu centrele în M

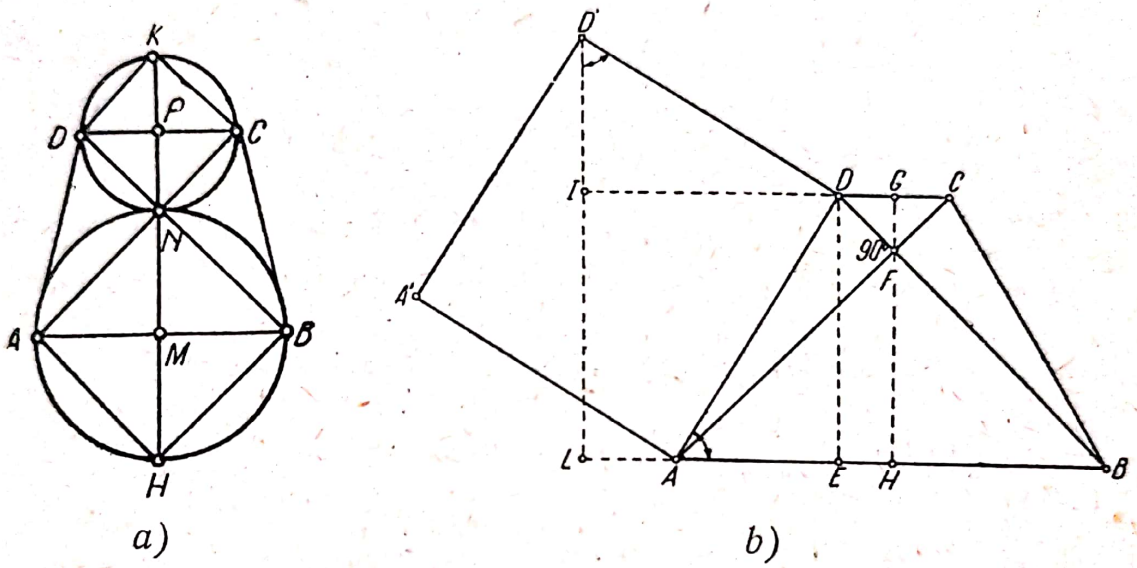
Scanned with OKEN Scanner

și P și de raze a și b. Se duce diametrul AMB perpendicular pe MP. Dreptele AN și BN intersectează cercul cu centrul în P în punctele C și D. Trapezul $ABCD$ este cel căutat.

b) Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice DNC; ANB; DNA și CNB. Obținem

$$\overline{AB}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CB}^2.$$

c) Fie I și L proiecțiile punctului D' respectiv pe prelungirile bazei mici și a bazei mari, iar E proiecția punctului D pe baza mare (fig. 100, b). Triunghiurile dreptunghice $D'ID$ și DAE sînt egale



a) b)

Fig. 100

avînd ipotenuzele egale $(\overline{D'D} = \overline{DA})$ și $\widehat{D'DI} = \widehat{ADE}$. Rezultă $\overline{D'I} = \overline{AE} = \frac{2a - 2b}{2} = a - b$.

Triunghiurile dreptunghice DFC și AFB fiind isoscele, distanțele $\overline{FG}$ și $\overline{FH}$ ale punctului F la baze sînt egale respectiv cu jumătățile ipotenuzelor corespunzătoare, astfel că avem

$$\overline{IL} = \overline{GH} = \overline{GF} + \overline{FH} = \frac{\overline{DC}}{2} + \frac{\overline{AB}}{2} = a + b.$$

Rezultă $\overline{D'L} = \overline{D'I} + \overline{IL} = a - b + a + b = 2a = \text{const}$, ceea ce demonstrează că D' descrie o paralelă la baza mare, așezată la o distanță de ea cît lungimea bazei mari.

236. Fie ABC un triunghi echilateral înscris în cercul de rază R (fig. 101) fie M un punct variabil pe arcul BC și P punctul unde

bisectoarea unghiului BMC intersectează latura BC. Din P se duc perpendiculare pe dreptele BM și CM, care intersectează pe CM și BM respectiv în R și T.

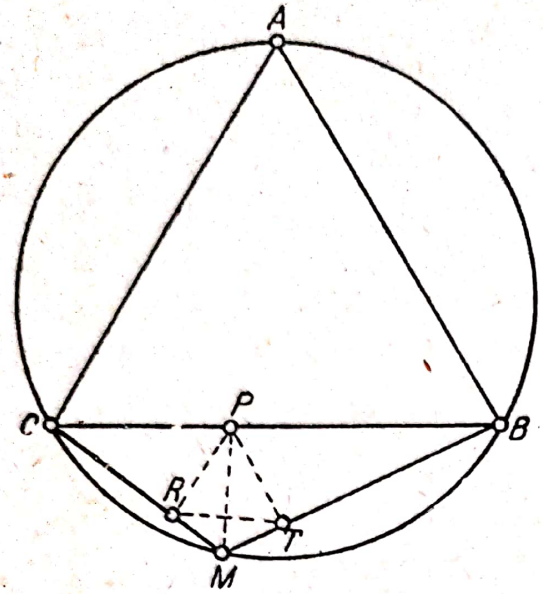


Fig. 101

a) Să se demonstreze că triunghiul PRT este asemenea cu triunghiul ABC.

b) Să se arate cum variază raportul de asemănare al acestor două triunghiuri cînd M descrie arcul $\overset{\frown}{BC}$.

c) Să se afle aria triunghiului PRT în cazul cînd raportul de asemănare este maxim.

R. a) Se arată că triunghiul PRT este echilateral, deci asemenea cu ABC.

b) Raportul de asemănare este $\frac{\overline{MP}}{2R}$, unde $2R$ este diametrul cercului ABC. Acest raport crește de la 0 la $\frac{1}{4}$ cînd M descrie arcul $\overset{\frown}{BC}$ de la B pînă la mijlocul său, după care raportul descrește pînă la 0, cînd M ajunge în C.

c) Aria maximă este egală cu $\frac{3R^2\sqrt{3}}{64}$.

237. Fie ABC un triunghi din planul (P)(fig. 102) în care înălțimea $\overline{CE} = d$ împarte latura $\overline{AB} = l$ în raportul $\frac{m}{n}$. Acest triunghi este proiecția triunghiului ABD din spațiu; fie $\overline{CD} = h$.

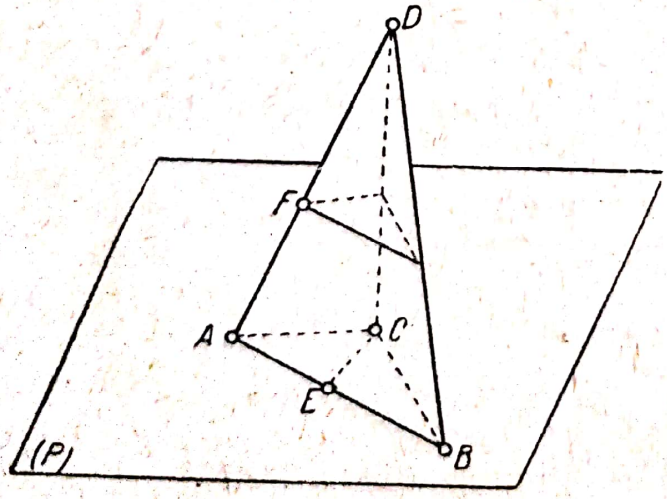


Fig. 102

a) Să se calculeze distanțele $\overline{AD}$ și $\overline{BD}$.

b) Prin punctul F, situat pe dreapta AD și la distanța $\overline{AF} = a$, se duce un plan paralel cu P. Se cere distanța dintre aceste două plane.

R. a) Avem

$$\overline{AD} = \sqrt{d^2 + h^2 + \frac{m^2 l^2}{(m+n)^2}};$$

$$\overline{BD} = \sqrt{d^2 + h^2 + \frac{n^2 l^2}{(m+n)^2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Distanța dintre plane este

$$\frac{ah\,(m+n)}{\sqrt{(m+n)^2\,(d^2+h^2)+m^2l^2}}.$$

238. Fie cercurile O și O', secante în A și B (fig. 103), de raze R și R'. Prin A și B se duc două secante paralele CAC' și DBD'; fie C, D și C', D' intersecțiile lor cu cele două cercuri. Să se arate că:

a) figura $CDD'C'$ este un paralelogram;

b) $\overline{CD} = \overline{C'D'} =$ = const;

c) mijlocul M al lui CD și mijlocul M' al lui $C'D'$ descriu cercuri concentrice cu O, respectiv cu O'; coroana circulară cuprinsă între cercul O și cercul (M) are aria egală cu coroana circulară cuprinsă între cercul O' și cercul (M') și este egală cu aria cercului de diametru AB.

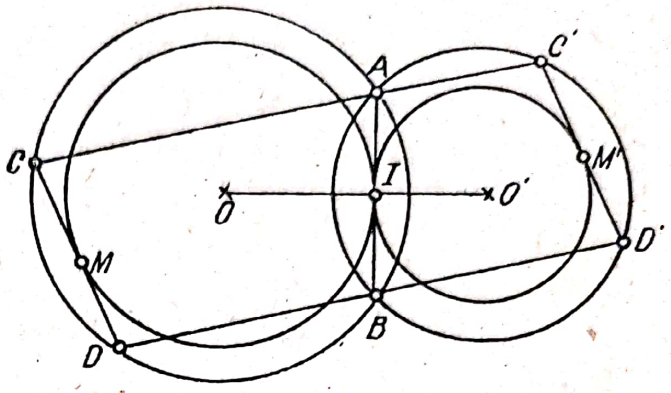


Fig. 103

R. a) Avem $\overset{\frown}{DCA} = \overset{\frown}{ABD'}$ și $\overset{\frown}{D'C'A} = \overset{\frown}{DBA}$ de unde rezultă $\overset{\frown}{DCA} + \overset{\frown}{D'C'A} = 180°$, iar laturile DC și $D'C'$ sînt paralele.

b) $ABDC$ și $ABD'C'$ sînt trapeze isoscele, de unde rezultă $\overline{CD} = \overline{AB} = \overline{C'D'}$.

c) Dacă notăm cu I mijlocul coardei $\overline{AB}$, avem $\overline{OM} = \overline{OI}$ și $\overline{O'M'} = \overline{O'I}$, deoarece patrulaterele $ACDB$, $ABD'C'$ înscrise respectiv în cercurile O și O' fiind trapeze isoscele, avem: $\overline{CD} = \overline{AB} = \overline{C'D'}$ prin urmare, M și M' descriu cercuri concentrice cu O și O'.

Aria coroanei corespunzătoare cercului M este

$$\pi(R^2 - \overline{OM}^2) = \pi(\overline{OA}^2 - \overline{OI}^2) = \pi \cdot \overline{AI}^2.$$

La fel se arată că aria coroanei corespunzătoare cercului M' este

$$\pi(R'^2 - OM'^2) = \pi(\overline{O'A}^2 - \overline{O'I}^2) = \pi \cdot \overline{AI}^2.$$

239. Se dau două cercuri O și O' (fig. 194) secante în punctele A și B. Se duce prin A o secantă arbitrară care întîlnește cercul O în P și cercul O' în P'. Pe mijlocul segmentului de dreaptă $\overline{PP'}$ se ridică o perpendiculară care intersectează coarda comună

$\overline{AB}$ în I. Dreptele IP și IP' mai taie cercurile date O și O' în punctele Q și Q'.

a) Să se demonstreze că $\overline{IQ} = \overline{IQ'}$.

b) Să se deducă de aici că $\overline{QQ'}$ este paralelă cu $\overline{PP'}$.

c) Dreapta QQ' mai taie cercul O în R și cercul O' în R'. Să se demonstreze relațiile

$$\overline{PQ} = \overline{AR} = \overline{P'Q'} = \overline{AR'};$$

$$\overline{Q'R} = \overline{AP'},\ \overline{QR'} = AP.$$

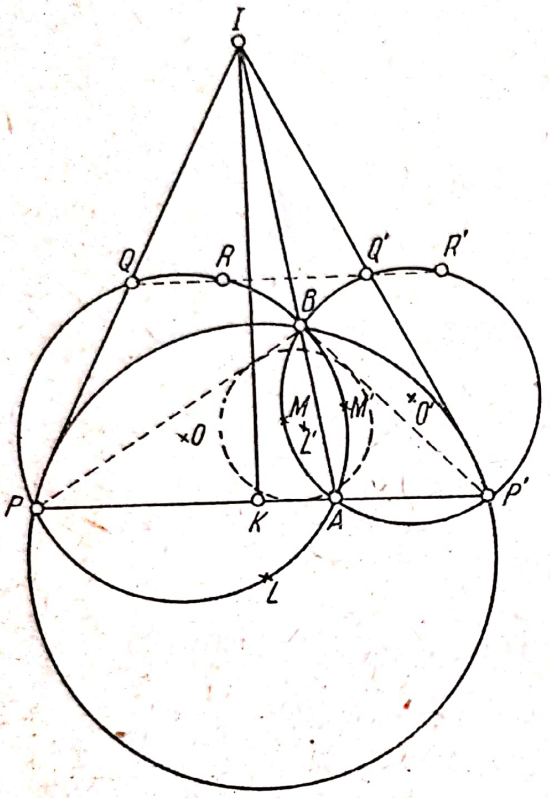


Fig. 104

d) Să se determine locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului BPP', cînd secanta PP' se rotește în jurul punctului A.

e) Să se găsească locul geometric al punctului comun bisectoarelor interioare ale aceluiași triunghi.

R. a) Notăm cu K mijlocul segmentului de dreaptă $\overline{PP'}$, cu L centrul cercului circumscris triunghiului BPP', cu L' centrul cercului înscris în același triunghi, cu M, M' mijloacele arcelor AB din cercurile O și O'.

Punctul I avînd aceeași putere față de cercurile O și O', rezultă

$$\overline{IP} \cdot \overline{IQ} = \overline{IP'} \cdot \overline{IQ'}.$$

Triunghiul IPP' este isoscel, pentru că dreapta IK îi este mediană și înălțime, deci $\overline{IP} = \overline{IP'}$. Relația precedentă se reduce la $\overline{IQ} = \overline{IQ'}$.

b) Relațiile $\overline{IP} = \overline{IP'}$, $\overline{IQ} = \overline{IQ'}$ ne dau

$$\frac{\overline{IP}}{\overline{IQ}} = \frac{\overline{IP'}}{\overline{IQ'}},$$

deci dreapta QQ' este paralelă cu dreapta PP'.

c) Triunghiul IPP' fiind isoscel și QQ' paralelă cu PP', urmează că patrulaterul $PP'Q'Q$ este un trapez isoscel, deci

$$\overline{PQ} = \overline{P'Q'}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din patrulaterele inscriptibile $APQR$, $AQ'R'P'$, care sînt trapeze isoscele, rezultă

$$\overline{PQ} = \overline{AR} = \overline{P'Q'} = \overline{AR'}.$$

Din faptul că patrulaterele $APQR'$, $AP'Q'R$ sînt paralelograme, avem

$$\overline{QR'} = \overline{AP},\ \overline{Q'R} = \overline{AP'}.$$

d) Notăm $\overset{\frown}{AMB} = a$, $\overset{\frown}{AM'B} = a'$. Centrul L al cercului circumscris triunghiului BPP' se află la intersecţia perpendicularelor duse din O şi O' pe BP şi BP', deci $\overset{\frown}{OLO'} = \overset{\frown}{PBP'}$. Rezultă

$$\text{măs}\,\overset{\frown}{OLO'} = \text{măs}\,\frac{(a + a')}{2} = \text{const.}$$

Locul geometric al punctului L este arcul de cerc trecînd prin O şi O', capabil de unghiul $\frac{(a + a')}{2}$.

e) Punctele M şi M' rămînînd fixe, avem

$$\overset{\frown}{ML'M'} = \overset{\frown}{PL'P'} = 180° - \frac{a + a'}{4} = \text{const.}$$

Deci, locul lui L' este arcul de cerc care trece prin punctele M şi M' şi este capabil de unghiul $180° - \frac{a + a'}{4}$.

240. Se dă un segment de dreaptă $\overline{AB}$ (fig. 105). Prin extremităţile A şi B ale acestui segment se duc perpendicularele AX şi BY pe dreapta AB.

a) Prin punctul I, mijlocul segmentului $\overline{AB}$, se duce o dreaptă oarecare, care intersectează dreapta AX în P şi dreapta BY în N.

Să se arate că triunghiurile API şi BNI sînt egale.

b) Prin punctul I se duce perpendiculara pe dreapta PN, perpendiculara care intersectează dreapta AX în punctul M şi dreapta BY în Q.

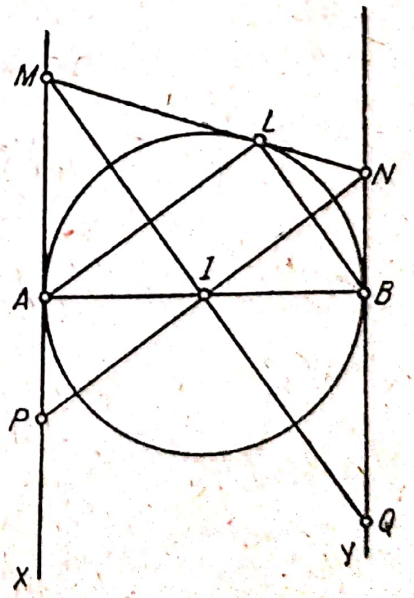


Fig. 105

Să se arate că triunghiul MNP este isoscel.

c) Să se arate că $\overline{MN} = \overline{AM} + \overline{BN}$.

d) L fiind punctul de pe MN astfel ca

$$\overline{LA} = \overline{AM} \text{ și } \overline{LN} = \overline{BN},$$

să se arate că triunghiul ALB este dreptunghic în L.

e) Să se arate că oricare ar fi punctul M pe AX, dreapta MN este tangentă la un cerc fix.

R. a) Triunghiurile dreptunghice IAP și IBN sînt egale pentru că avem $\overline{AI} = \overline{IB}$ și $\widehat{AIP} = \widehat{NIB}$.

b) Rezultă din faptul că punctul M este situat pe mediatoarea segmentului $\overline{PN}$.

c) Avem $\overline{AP} = \overline{BN}$ și deci

$$\overline{MN} = \overline{MP} = \overline{AM} + \overline{AP} = \overline{AM} + \overline{BN}.$$

d) După modul cum a fost construit L, rezultă că AL este perpendiculară pe IM și BL este perpendiculară pe IN și, prin urmare, triunghiul ALB este dreptunghic în L.

e) Punctul L se află pe cercul care are pe AB ca diametru, iar IL este perpendiculară pe MN, de unde deducem că MN este tangentă la cercul fix de diametru AB.

241. Se înscrie într-un cerc (O) un triunghi ABC (fig. 106).

a) Să se determine pe arcul $\widehat{BC}$, care nu conține pe A, un punct A', astfel încît, luînd intersecțiile A_b, A_c ale tangentei în A' la cercul (O) cu laturile AB și respectiv AC, triunghiul AA_bA_c să fie isoscel cu vîrful în A.

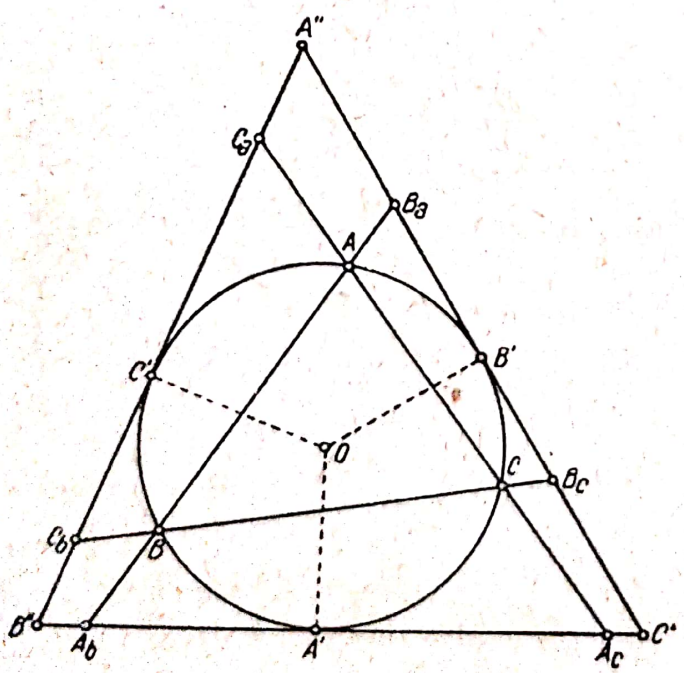


Fig. 106

b) Se consideră analog punctele B' și C' și triunghiurile isoscele BB_aB_c, CC_aC_b obținute prin permutarea circulară a literelor A, B, C; să se calculeze unghiurile triunghiului $A'B'C'$ în funcție de unghiurile A, B, C ale triunghiului ABC.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se calculeze de asemenea unghiurile triunghiului $A''B''C''$, format din intersecțiile dreptelor A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b.

d) Punctele B și C fiind fixe și A mobil pe cercul fix (O), să se găsească locul punctului A''.

R. a) Punctul A' se află la intersecția dreptei, duse prin O paralelă cu bisectoarea unghiului A, cu arcul BC;

$$\text{b) } \hat{A}' = 45° + \frac{\hat{A}}{4}, \quad \hat{B}' = 45° + \frac{\hat{B}}{4}, \quad \hat{C}' = 45° + \frac{\hat{C}}{4}.$$

$$\text{c) } \hat{A}'' = 90° - \frac{\hat{A}}{2}, \quad \hat{B}'' = 90° - \frac{\hat{B}}{2}, \quad \hat{C}'' = 90° - \frac{\hat{C}}{2}.$$

d) Locul lui A'' este un arc de cerc situat pe un cerc concentric cu cercul (O).

242. Se dă triunghiul echilateral ABC (fig. 107) de latură a; pe laturile BC, CA, AB se iau respectiv punctele A_1, B_1, C_1, astfel încît $\overline{BA_1} = \overline{CB_1} = \overline{AC_1} = \frac{a}{3}$. Prin intersecțiile dreptelor AA_1, BB_1, CC_1 se formează triunghiul $A_2B_2C_2$ (A_2 fiind așezat pe AA_1 mai aproape de A).

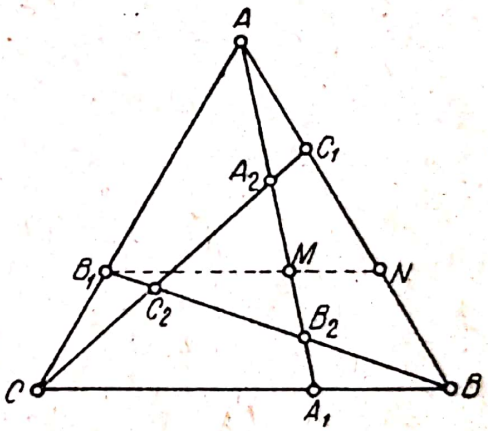


Fig. 107

a) Să se demonstreze relațiile:

$$\overset{\frown}{CBB_1} + \overset{\frown}{BCC_1} = 60°,$$

$$\overset{\frown}{BC_2C} = \overset{\frown}{CA_2A} = \overset{\frown}{AB_2B} = 120°$$

și să se demonstreze că triunghiul $A_2B_2C_2$ este echilateral.

b) Să se calculeze lungimile segmentelor $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1}$.

c) Să se arate că avem

$$\overline{BB_2} = \overline{CC_2} = \overline{AA_2} = \overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_2} = \overline{C_2A_2}.$$

$$\overline{B_1C_2} = \overline{C_1A_2} = \overline{A_1B_2} = \frac{\overline{A_2B_2}}{3} = \frac{\overline{B_2C_2}}{3} = \frac{\overline{C_2A_2}}{3}.$$

d) Să se calculeze aria triunghiului $A_2B_2C_2$.

R. a) Din egalitatea triunghiurilor BCB_1 și CAC_1, rezultă

$$\overset{\frown}{CBB_1} + \overset{\frown}{BCC_1} = \overset{\frown}{ACC_1} + \overset{\frown}{BCC_1} = \overset{\frown}{ACB} = 60°.$$

Scanned with OKEN Scanner

În triunghiul BC_2C, avem

$$\widehat{BC_2C} = 180° - (\widehat{CBB_1} + \widehat{BCC_1}) = 180° - 60° = 120°$$

și celelalte analoge.

Triunghiul $A_2B_2C_2$ este echilateral, pentru că are unghiurile de 60°.

b) $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = CC_1 = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

c) Dacă ducem prin B_1 o paralelă B_1MN la latura BC, aceasta intersectează pe AA_1 în M și pe AB în N. Triunghiurile formate ANB_1 și ABC sînt asemenea, de unde deducem

$$\frac{\overline{NB_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC}} = \frac{2}{3}, \overline{NB_1} = \frac{2a}{3};$$

apoi din relația

$$\frac{\overline{MB_1}}{\overline{NB_1}} = \frac{\overline{A_1C}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3}, \quad \text{avem } \overline{MB_1} = \frac{4a}{9}.$$

Din asemănarea triunghiurilor BB_2A_1 și MB_2B_1, deducem

$$\frac{\overline{BB_2}}{\overline{B_2B_1}} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{MB_1}} = \frac{3}{4}, \text{ de unde } \overline{BB_2} = \frac{a}{\sqrt{7}};$$

la fel, avem

$$\overline{CC_2} = \overline{AA_2} = \overline{BB_2} = \frac{a}{\sqrt{7}}.$$

Din același triunghi asemenea, deducem

$$\overline{A_1B_2} = \frac{a}{3\sqrt{7}}$$

și analog,

$$\overline{B_1C_2} = \overline{C_1A_2} = \overline{A_1B_2} = \frac{a}{3\sqrt{7}} = \frac{\overline{BB_2}}{3} = \frac{\overline{CC_2}}{3} = \frac{\overline{AA_2}}{3},$$

apoi

$$\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_2} = \overline{C_2A_2} = \frac{a}{\sqrt{7}} = \overline{BB_2} = \overline{AA_2} = \overline{CC_2}$$

d) Aria triunghiului echilateral $A_2B_2C_2$ este

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \overline{A_2B_2}^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{28}.$$

Scanned with OKEN Scanner

243. Se dă triunghiul echilateral ABC (fig. 108), de latură a și o dreaptă MN situată în același plan cu triunghiul, paralelă cu latura BC și la distanța h de aceasta.

a) Să se calculeze aria S ce se obține prin rotirea cu 360° în jurul axei MN a conturului $ABCA$ al triunghiului.

b) Să se calculeze volumul V ce se obține prin rotirea cu 360° în jurul axei MN a suprafeței triunghiului ABC.

R. a) $S = \pi a(6h + a\sqrt{3})$.

b) $V = \dfrac{\pi a^2(a + 2h\sqrt{3})}{4}$.

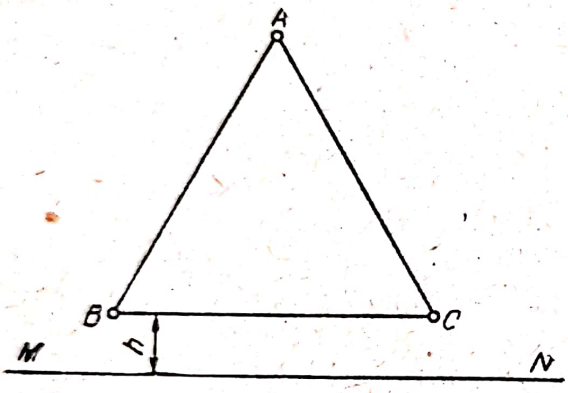


Fig. 108

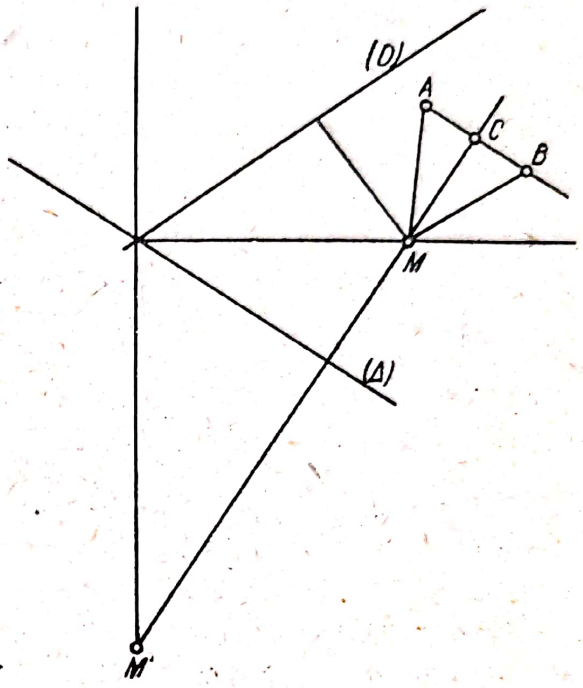


Fig. 109

244. Într-un plan se dau două puncte A, B (fig. 109) și două drepte oarecare (D) și (Δ). Se cere:

a) să se determine în acest plan un punct M, care să fie în același timp egal depărtat de punctele A, B și de dreptele (D) și (Δ);

b) însemnînd $\overline{AB} = 2l$, $\overline{MA} = a$, se cere să se calculeze aria și volumul născut de triunghiul AMB, prin rotirea acestuia în jurul lui AB;

c) să se determine locul geometric al punctelor din spațiu echidistante în același timp de punctele A, B și dreptele (D) și (Δ).

R. a) Se intersectează mediatoarea segmentului $\overline{AB}$ cu cele două bisectoare ale unghiului format de dreptele (D) și (Δ).

b) Avem

$$S = 2\pi a\sqrt{a^2 - l^2}, \quad V = \frac{2}{3}\pi(a^2 - l^2)l.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Locul punctelor este format din dreptele de intersecţie dintre planul mediator al segmentului $\overline{AB}$ şi planele perpendiculare pe planul (D, Δ), trecînd prin bisectoarele unghiului format de dreptele (D) şi (Δ).

244 bis. Un vas are forma unui con circular drept, avînd axa verticală, şi cu vîrful în jos. Raza cercului de bază al conului este R, iar înălţimea conului H.

a) În acest vas se toarnă o cantitate de apă egală cu V_1.

Să se determine înălţimea H_1 pînă la care se ridică apa.

b) Se presupune că în vas se află apă pînă la o înălţime H_1 şi se introduce în vas o sferă de rază r şi volum v care rămîne complet acoperită cu apă.

Se cere să se afle cu cît s-a ridicat nivelul apei prin introducerea sferei.

Să se determine această creştere în cazul particular cînd vasul are forma corespunzătoare relaţiei $R = H$, iar raza sferei este

$$r = H_1 : 2.$$

c) Să se determine, în cazul particular de la punctul b), care este suprafaţa vasului udat de apă, după denivelare.

d) Să se determine care este volumul cel mai mic de apă care trebuie să existe în vas, ca sfera să fie complet acoperită de apă, în cazul particular $R = H$.

e) Aceeaşi întrebare de la punctul d), pentru cazul general.

R. Prin ducerea unui plan paralel cu baza conului se formează un con omotetic cu cel dat. Aplicînd teoremele: raportul a două arii ale unor suprafeţe omoloage este egal cu raportul pătratului lungimii a două segmente omoloage şi raportul volumelor a două părţi de con omoloage este egal cu raportul cuburilor a două segmente omoloage, obţinem răspunsurile de mai jos.

a) $$H_1 = \sqrt[3]{\frac{3H^2V_1}{\pi R^2}}.$$

b) Creşterea de nivel este

$$i = \sqrt[3]{\frac{3H^2}{\pi R^2}}\left[\sqrt[3]{V_1 + v} - \sqrt[3]{V_1}\right];$$

în cazul particular, avem

$$i = \sqrt[3]{\frac{3V_1}{\pi}}\left(\sqrt[3]{1{,}5} - 1\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

c) $S = \pi H_1^2 \sqrt[6]{40,5}$;

d) $v_1 = \frac{\pi r^3 (3 + 5\sqrt{2})}{3}$;

e) $v_1 = \frac{\pi r^3}{3}\left[\frac{R^2\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{H}{R}\right)^2}\right)^3}{H^2} - 4\right]$.

245. Se dă tetraedrul $VABC$, la care vîrful V se proiectează în O, centrul cercului ABC. Însemnînd cu $2a$, $2b$, $2c$ respectiv lungimile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ și cu h lungimea segmentului VC', care unește vîrful V cu mijlocul C' al laturii AB, se cere:

a) să se exprime volumul tetraedrului $VABC$ în funcție de aceste date ale problemei;

b) să se deducă înălțimea corespunzătoare fețelor laterale VBC și VCA, utilizînd această expresie a volumului.

Discuție asupra condițiilor de posibilitate ale problemei:

c) să se calculeze (în cazul cînd problema este posibilă) razele cercurilor VAB, VBC, VCA, în funcție de datele problemei;

d) ce relație de legătură trebuie să avem între datele problemei, pentru ca unghiul diedru $VABC$ (cu muchea AB) să fie de 60°?

R. a) Obținem

$$V = \frac{1}{3}(\text{aria } ABC)\sqrt{h^2 + c^2 - R^2},$$

unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

b) Ariile triunghiurilor VBC, VCA sînt respectiv $a\sqrt{h^2+c^2-a^2}$, $b\sqrt{h^2+c^2-b^2}$ și, prin urmare, înălțimile piramidei h_1, h_2 corespunzătoare acestor fețe sînt

$$h_1 = \frac{3V}{a\sqrt{h^2 + c^2 - a^2}}, \qquad h_2 = \frac{3V}{b\sqrt{h^2 + c^2 - b^2}}.$$

Pentru ca problema să fie posibilă, este necesar și suficient să avem

$$h^2 + c^2 > R^2.$$

c) $R_1 = \frac{h^2 + c^2}{2\sqrt{h^2 + c^2 - a^2}}$, $R_2 = \frac{h^2 + c^2}{2\sqrt{h^2 + c^2 - b^2}}$, $R_3 = \frac{h^2 + c^2}{2h}$.

d) $h = 2\sqrt{R^2 - c^2}$.

246 . Se consideră triunghiul ABC (fig. 110) avînd unghiul ABC egal cu dublul unghiului ACB. Perpendiculara ridicată în A pe AC întîlneşte dreapta CB în punctul M.

a) Să se arate că $\overline{CM} = 2\overline{AB}$.

b) Presupunînd $\widehat{ACB} = 36°$, se construiesc dreptele BN şi BP care împart unghiul ABM în trei părţi egale, punctele N şi P (N mai aproape de M) fiind pe dreapta AM. Să se arate că paralela dusă prin N la dreapta CP trece prin O, mijlocul segmentului CM; dreapta AO este bisectoarea unghiului BAC.

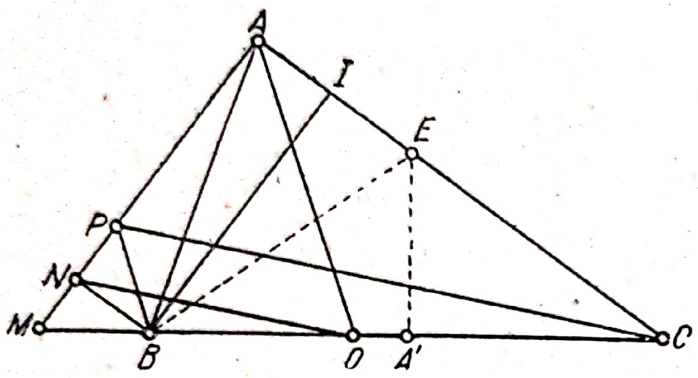


Fig. 110

c) În acest caz particular ($\widehat{ACB} = 36°$), să se calculeze volumul născut prin rotirea triunghiului ABM în jurul axei AC, lungimea segmentului $\overline{AB}$ fiind $2a$.

R. a) Din A', mijlocul lui BC se ridică o perpendiculară care taie AC în E. Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice $CA'E$, MAC şi a triunghiurilor ABE, ABC rezultă din compararea rapoartelor egale că avem $\overline{MC} = 2\overline{AB}$.

b) Din evaluarea unghiurilor deducem că triunghiul MBN este dreptunghic şi triunghiul MBP, isoscel; prin urmare, N este la mijlocul lui $\overline{MP}$ şi deci O la mijlocul lui $\overline{MC}$. Dreapta AO este mediană în triunghiul dreptunghic MAC, iar $\widehat{OAC} = 36°$, adică jumătate din $\hat{A} = 72°$.

c) Notînd cu I proiecţia lui B pe latura $\overline{AC}$, avem volumul generat de AMB egal cu

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \overline{AI} \cdot \overline{AM} \cdot (\overline{AM} + \overline{BI}).$$

Se observă că $\overline{AC} = \overline{BC}$ este raza cercului în care $\overline{AB} = 2a$ este latura decagonului convex, de unde rezultă

$$\overline{AC} = \overline{BC} = a(\sqrt{5} + 1).$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea se constată că $\overline{BI}$ este $\frac{1}{2}$ din latura pentagonului convex în care $\overline{BC}$ este raza. Folosind formulele pentru latura și apotema pentagonului convex, obținem

$$\overline{BI} = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \text{ și } \overline{AI} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

Înlocuind în formula de mai sus, obținem

$$V = \frac{5\pi a^3}{3}(\sqrt{5}-1).$$

247. Într-un plan se dau două puncte A, B și două drepte oarecare D și D'. Se cere:

a) să se determine în acest plan un punct M care să fie în același timp egal depărtat de punctele A, B și de dreptele D, D';

b) însemnînd $\overline{AB} = 2a$, $\overline{MA} = b$, se cere să se calculeze aria și volumul născut de triunghiul AMB, prin rotirea acestuia în jurul lui AM;

c) să se determine locul geometric al punctelor din spațiu echidistante în același timp de punctele A, B și M.

R. a) Punctul arătat se află la intersecția mediatoarei lui AB cu una din bisectoarele dreptelor D, D'.

b) Obținem

$$A = \frac{2\pi a}{b}(2a+b)\sqrt{b^2-a^2}, \quad V = \frac{4\pi a^2}{3b}(b^2-a^2).$$

c) Locul geometric este format de intersecția planului mediator al lui AB cu planul perpendicular pe planul mediator al segmentului AM.

248. În cercul de bază al unui con circular drept se înscrie un pătrat $ABCD$, ale cărui vîrfuri se unesc cu vîrful V al conului.

a) Să se afle volumul piramidei $VABCD$, știind că aria laterală a conului se desfășoară după un semicerc de rază dată R.

b) Se consideră sfera cu centrul în V și care trece prin cercul de bază al conului. Să se afle, în același caz, aria calotei sferice mărginite de acest cerc.

R. a) $V = \frac{R^3\sqrt{2}}{12}$; b) $S = (2-\sqrt{3})\pi R^2$.

249. Se dă un cilindru de rotație de rază r și înălțime H și un con de rotație avînd aceeași înălțime, iar baza un cerc de rază R concentric cu unul din cercurile de bază ale cilindrului.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se determine raportul între r și R, astfel încît conul și cilindrul să aibă același volum.

b) Să se determine raportul dintre r și H pentru ca cilindrul și conul să aibă același volum și aceeași arie laterală.

c) Să se determine volumul părții de con situată în afara cilindrului, dimensiunile fiind cele găsite la pct. b).

R. a) $\frac{R}{r} = \sqrt{3}$; b) $\frac{H}{r} = 3$; c) $V = \frac{2}{3}\pi r^2\sqrt{3}$.

250. Se consideră un tetraedru $ABCD$ (fig. 111) avînd muchiile $\overline{AB} = 25$ m, $\overline{AC} = 56$ m, $\overline{AD} = 16$ m, $\overline{BC} = 63$ m, $\overline{CD} = 60$ m și $\overline{BD} = 33$ m. Se cere:

a) să se calculeze segmentele determinate pe CD de înălțimea dusă din A în triunghiul ACD și segmentele determinate pe CD de înălțimea dusă din B în triunghiul BCD. Să se deducă că aceste înălțimi se întîlnesc în același punct pe CD;

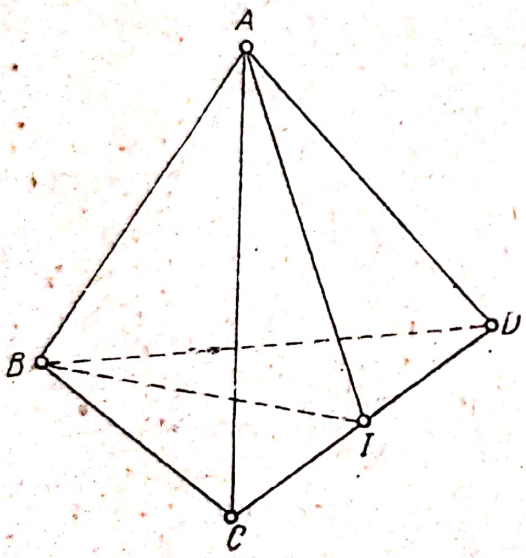


Fig. 111

b) să se deducă din a) că direcțiile muchiilor AB și CD fac în spațiu un unghi drept;

c) să se arate în același mod, același lucru pentru direcțiile (AC, BD) și (AD, BC). Să se calculeze aria totală a tetraedrului $ABCD$.

R. a) Dacă notăm cu I piciorul înălțimii din A pe CD și cu K piciorul înălțimii din B pe CD, găsim $\overline{CI} = 54$ m, $\overline{ID} = 6$ m; $\overline{CK} = 54$ m, $\overline{KD} = 6$ m; deci I și K sînt confundate.

b) Dreapta CD este perpendiculară pe planul dreptelor AI, BI prin urmare și pe AB. La fel se demonstrează că AC este perpendiculară pe BD și AD este perpendiculară pe BC.

c) $S \approx 384{,}25$ m^2.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III

TRIGONOMETRIE

A. Exerciții și probleme rezolvate

251. Să se demonstreze identitățile:

a) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$;

b) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$;

Institutul de petrol și gaze, București, 1952

R. a) Avem

$$A = \sin 20^\circ \sin 40^\circ = \frac{\cos 20^\circ - \cos 60^\circ}{2}$$

și

$$B = \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{\cos 20^\circ - \cos 140^\circ}{2} = \frac{\cos 20^\circ + \cos 40^\circ}{2},$$

de unde rezultă

$$4AB = \cos^2 20^\circ - \cos 60^\circ \cos 20^\circ + \cos 20^\circ \cos 40^\circ -$$

$$- \cos 40^\circ \cos 60^\circ = \frac{1 + \cos 40^\circ}{2} - \frac{1}{2}\cos 20^\circ +$$

$$+ \frac{\cos 60^\circ + \cos 20^\circ}{2} - \frac{\cos 40^\circ}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

sau

$$AB = \frac{3}{16}.$$

b) De asemenea, avem

$$C = \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \frac{\cos 60^\circ + \cos 20^\circ}{2}$$

și

$$D = \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{\cos 140^\circ + \cos 20^\circ}{2} = \frac{\cos 20^\circ - \cos 40^\circ}{2};$$

de unde

$$4CD = \cos^2 20^\circ + \frac{\cos 20^\circ}{2} - \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \frac{\cos 40^\circ}{2} =$$

$$= \frac{1+\cos 40^\circ}{2} + \frac{\cos 20^\circ}{2} - \frac{\cos 60^\circ + \cos 20^\circ}{2} - \frac{\cos 40^\circ}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4};$$

deci,

$$CD = \frac{1}{16}.$$

252. Să se verifice identitatea

$$\frac{\sin (2a+b)}{\sin a} + \frac{\sin (a+2b)}{\sin b} - 4 \cos (a+b) =$$

$$= \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b \, (\sin^2 a + \sin^2 b).$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1952.

R. Avem

$$\frac{\sin (2a+b)}{\sin a} + \frac{\sin (a+2b)}{\sin b} - 4 \cos (a+b) = \frac{\sin 2a \cos b}{\sin a} +$$

$$+ \frac{\sin b \cos 2a}{\sin a} + \frac{\sin a \cos 2b}{\sin b} + \frac{\sin 2b \cos a}{\sin b} - 4 \cos (a+b) =$$

$$= 4 (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + \frac{\sin b}{\sin a} + \frac{\sin a}{\sin b} - 4 \cos (a+b) =$$

$$= \frac{\sin^2 b + \sin^2 a}{\sin a \sin b} = \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b \, (\sin^2 a + \sin^2 b).$$

253. Să se verifice, fără ajutorul tabelelor, egalitatea

$$E = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Facultatea de chimie, București, 1953.

R. Fracția se transformă succesiv în modul următor

$$E = \frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\operatorname{tg} 75^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{2 \sin 30^\circ \cos 45^\circ}{\frac{\sin 90^\circ}{\cos 75^\circ \cos 15^\circ}}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$E = \frac{\cos 45^\circ \sin 15^\circ \cos 15^\circ}{1} = \frac{\cos 45^\circ \dfrac{\sin 30^\circ}{2}}{1} = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{4}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

254. Să se calculeze $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, știind că $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$ și că unghiul α este cuprins între 0 și 45°.

Institutul politehnic, Iași, 1953.

R. Dacă notăm $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = u$, atunci $\sin \alpha = \frac{2u}{1+u^2}$, iar $\cos \alpha = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, Ecuația dată devine

$$\frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{7}{5} \quad \text{sau} \quad 6u^2 - 5u + 1 = 0,$$

ale cărei soluții sînt

$$u_1 = \frac{1}{3} \text{ și } u_2 = \frac{1}{2}.$$

Expresia $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ poate avea, deci, valorile $\frac{1}{3}$ sau $\frac{1}{2}$. Alegem aceea pentru care $0 < \alpha < 45^\circ$ sau $0 < \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < \operatorname{tg} 22^\circ 30'$.

Calculăm

$$\operatorname{tg} 22^\circ 20' = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}} = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414\ldots$$

Dintre cele două valori găsite pentru $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$: $\frac{1}{3} = 0{,}33\ldots$ și $\frac{1}{2} = 0{,}5\ldots$, numai $\frac{1}{3}$ este mai mică decît $\sqrt{2} - 1$. Așadar, avem

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}.$$

255. Să se verifice identitatea

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{2}{3}.$$

Institutul politehnic, București, 1954.

R. Avem

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

și

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) =$$
$$= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x,$$

de unde rezultă

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x - 1}{1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x - 1} = \frac{2}{3}.$$

256. Se dă expresia

$$E = \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c.$$

Să se simplifice această expresie știind că $a + b + c = \pi$.

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

R. Avem

$$2 \cos a \cos b \cos c = \cos c [\cos (a + b) + \cos (a - b] =$$
$$- \cos (a + b) \cos c + \cos (a - b) \cos c.$$

Înlocuind produsele de cosinusuri prin sume, apoi $a + b + c = 180°$, $b + c - a = 180° - 2a$, $a + c - b = 180° - 2b$, $a + b - c = 180° - 2c$, obținem succesiv

$$2 \cos a \cos b \cos c = \frac{\cos (a+b+c) + \cos (a+b-c) + \cos (a-b+c)}{2} +$$
$$+ \frac{\cos (b + c - a)}{2} = \frac{-1 - \cos 2a - \cos 2b - \cos 2c}{2} =$$
$$= -2 + \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c,$$

de unde rezultă

$$E = \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c =$$
$$= \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c - (-2 + \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c) = 2.$$

257. Să se demonstreze identitatea

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \frac{\sin (a + b + c)}{\cos a \cos b \cos c} + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c.$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

R. Putem scrie

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \frac{\sin (a+b)}{\cos a \cos b} + \frac{\sin c}{\cos c} = \frac{\sin (a+b) \cos c + \sin c \cos a \cos b}{\cos a \cos b \cos c}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind la numărător

$$\cos a \cos b = \cos (a + b) + \sin a \sin b,$$

obținem

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \frac{\sin (a + b) \cos c + \sin c \cos (a + b) + \sin a \sin b \sin c}{\cos a \cos b \cos c} =$$

$$= \frac{\sin (a + b + c) + \sin a \sin b \sin c}{\cos a \cos b \cos c}$$

sau, în sfîrșit, avem

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \frac{\sin (a + b + c)}{\cos a \cos b \cos c} + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c.$$

258. Să se demonstreze identitatea

$$\cos^2 2a + \cos^2 (a - b) - 2\cos (a - b) \cos (a + b) \cos 2a = \sin^2 (a + b).$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

R. Ținînd seama de formula

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a + b) + \cos (a - b)],$$

expresia din membrul întîi se transformă succesiv

$$\frac{1 + \cos 4a}{2} + \frac{1 + \cos 2(a - b)}{2} - 2 \frac{\cos^2 2a + \cos 2a \cos 2b}{2} =$$

$$= \frac{1 + \cos 4a}{2} + \frac{1 + \cos 2 (a - b)}{2} - \frac{1 + \cos 4a + \cos 2 (a + b) + \cos 2 (a - b)}{2} =$$

$$= \frac{1 - \cos 2 (a + b)}{2} = \sin^2 (a + b).$$

259. Să se calculeze valoarea expresiei

$$E = \operatorname{tg} 4x + 4 \operatorname{tg} 2x + 2a$$

știind că

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = a.$$

Institutul de arhitectură, București, 1954.

R. Trebuie să calculăm

$$E = \operatorname{tg} 4x + 4 \operatorname{tg} 2x + 2a.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se știe că $2\operatorname{cotg} 2x = \operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x$, rezultă că avem

$$\operatorname{tg} 2x = -\frac{2}{a} \text{ și } \operatorname{tg} 4x = \frac{2\operatorname{tg} 2x}{1-\operatorname{tg}^2 2x} = \frac{\frac{-4}{a}}{1-\frac{4}{a^2}} = \frac{4a}{4-a^2}.$$

Deci,

$$E = \frac{4a}{4-a^2} - \frac{8}{a} + 2a = \frac{2(a^2-2)(a^2-8)}{a(a^2-4)}.$$

260. Ce devine expresia

$$x = \frac{\sqrt{3}\sin(a+b) - 2\sec\frac{\pi}{6}\cos(a+b)}{\sin a}$$

cînd $\sin b = \frac{4}{5}$, unghiul fiind ascuțit sau obtuz.

Institutul politehnic, Timișoara, 1954.

R. Introducem $\sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ și apoi dezvoltăm $\cos(a+b)$ și $\sin(a+b)$. După ce punem în evidență factorii comuni $\cos b$ și $\sin b$, expresia lui x devine

$$x = \frac{\cos b\,(3\sin a - 4\cos a) + \sin b\,(3\cos a + 4\sin a)}{\sqrt{3}\sin a}.$$

Dacă punem $\sin b = \frac{4}{5}$, avem două cazuri de calculat pentru x.

a) Dacă unghiul b este ascuțit, atunci $\cos b = \frac{3}{5}$, iar x devine:

$$x = \frac{\frac{3}{5}(3\sin a - 4\cos a) + \frac{4}{5}(3\cos a + 4\sin a)}{\sqrt{3}\sin a} = \frac{5\sin a}{\sqrt{3}\sin a} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

b) Dacă b este obtuz, atunci $\cos b = -\frac{3}{5}$ și în acest caz avem

$$x = \frac{-\frac{3}{5}(3\sin a - 4\cos a) + \frac{4}{5}(3\cos a + 4\sin a)}{\sqrt{3}\cdot\sin a} = \frac{7}{5\sqrt{3}} + \frac{24}{5\sqrt{3}}\operatorname{cotg} a.$$

261. Să se demonstreze relațiile:

a) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg} x}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg} x}=\operatorname{tg} 2x$;

b) $\dfrac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}=\sin 2x$.

Institutul forestier, Brașov, 1954.

R. a) Avem

$$\frac{1}{1-\operatorname{tg} x}-\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}=\frac{(1+\operatorname{tg} x)-(1-\operatorname{tg} x)}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\operatorname{tg} 2x.$$

b) $$\frac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}=\frac{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\sin x}{\cos 2x \cos x}}=\sin 2x.$$

262. Să se calculeze

$$y=\sin(3 \operatorname{arctg} x).$$

Facultatea de matematică și fizică, București, 1955.

R. Notăm $\beta=\operatorname{arctg} x$. Atunci

$$y=\sin(3 \operatorname{arctg} x)=\sin 3\beta=3\sin\beta-4\sin^3\beta$$

sau

$$y=\sin\beta(3-4\sin^2\beta)=\frac{\pm\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}\cdot\frac{3-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}=\pm\frac{3\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}^3\beta}{(1+\operatorname{tg}^2\beta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Avînd în vedere că $\operatorname{tg}\beta=x$, rezultă

$$\sin(3 \operatorname{arctg} x)=\pm\frac{3x-x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

263. Dîndu-se

$$\frac{\sin(x+z)}{\sin(y-z)}=m;\quad\frac{\cos(x-z)}{\cos(y+z)}=n,$$

să se verifice identitatea

$$\frac{\cos 2z}{\cos(x-y)}=\frac{m+n}{mn+1}.$$

Institutul politehnic, București, 1955.

R. După înlocuire, calculăm

$$\frac{m+n}{mn+1}=\frac{\dfrac{\sin(x+z)}{\sin(y-z)}+\dfrac{\cos(x-z)}{\cos(y+z)}}{\dfrac{\sin(x+z)\cos(x-z)}{\sin(y-z)\cos(y+z)}+1}=\frac{\sin(x+z)\cos(y+z)+\sin(y-z)\cos(x-z)}{\sin(x+z)\cos(x-z)+\sin(y-z)\cos(y+z)}$$

Înlocuind produsele de forma $\sin a \cos b$ prin expresia echivalentă

$$\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$$

obținem, după simplificarea numitorului 2,

$$\frac{m+n}{mn+1}=\frac{\sin(x+z+y+z)+\sin(x+z-y-z)+\sin(y-z+x-z)+\sin(y-z-x+z)}{\sin(x+z+x-z)+\sin(x+z-x+z)+\sin(y-z+y+z)+\sin(y-z-y-z)}$$

sau

$$\frac{m+n}{mn+1}=\frac{\sin(x+y+2z)+\sin(x+y-2z)}{\sin 2x+\sin 2y}=\frac{2\sin(x+y)\cos 2z}{2\sin(x+y)\cos(x-y)},$$

de unde rezultă

$$\frac{m+n}{mn+1}=\frac{\cos 2z}{\cos(x-y)}.$$

264. Să se transforme în produs expresiile

$$E_1=\sin\frac{5\pi}{24}+\cos\frac{11\pi}{24},\qquad E_2=\sin\frac{5\pi}{24}+\cos\frac{11\pi}{24}+\sin\frac{\pi}{6}$$

și să se arate că prima expresie este egală cu $\dfrac{\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}}{2}$.

Institutul de mine, București, 1955.

R. Prima expresie se transformă succesiv astfel

$$E_1=\sin\frac{5\pi}{24}+\cos\frac{11\pi}{24}=\sin\frac{5\pi}{24}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{24}\right)=\sin\frac{5\pi}{24}+\sin\frac{\pi}{24}=$$

$$=2\sin\frac{\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{24}}{2}\cos\frac{\frac{5\pi}{24}-\frac{\pi}{24}}{2}=2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{12}.$$

Avînd în vedere că

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}},\quad \cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}$$

și

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \text{iar}\quad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

rezultă

$$E_1=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})\,(2+\sqrt{3})}}{2}.$$

Pe baza rezultatului anterior, expresia a doua devine

$$E_2=2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{6}.$$

Înlocuind

$$\sin\frac{\pi}{6}=2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$$

și dînd factor comun $2\cos\frac{\pi}{12}$, obținem

$$E_2=2\cos\frac{\pi}{12}\left(\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{12}\right)=4\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{48}\cdot\cos\frac{\pi}{48},$$

265. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia

$$E=\cos x+\cos 2x+\cos 3x.$$

Academia tehnică militară, 1955.

R. Expresia se scrie succesiv

$$E=(\cos x+\cos 3x)+\cos 2x=2\cos 2x\cos x+\cos 2x=$$

$$=2\cos 2x\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)=2\cos 2x\,(\cos x+\cos 60^\circ),$$

de unde rezultă

$$E=4\cos 2x\cos\left(\frac{x}{2}+30^\circ\right)\cos\left(\frac{x}{2}-30^\circ\right).$$

Observație. O altă metodă de a transforma E în formulă calculabilă prin logaritmi este de a înmulți ambii membri prin $\sin \frac{x}{2}$ și de a înlocui produsele de forma $\sin a \cos b$ prin expresia echivalentă $\frac{\sin (a+b) + \sin (a-b)}{2}$.

Se efectuează reducerile ce apar și apoi se înlocuiește diferența prin produse de funcții trigonometrice. Această metodă are avantajul că ea se aplică și sumei de forma

$$E = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx.$$

266. Se dau expresiile:

$$A_1 = A \cos^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha;$$

$$B_1 = C \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha - A \sin 2\alpha;$$

$$C_1 = A \sin^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha.$$

Să se arate că avem

$$B_1^2 - 4A_1C_1 = B^2 - 4AC.$$

Institutul politehnic, Cluj, 1955.

R. Se calculează B_1^2 și $4A_1C_1$. În decursul dezvoltării acestor două expresii se înlocuiește $2 \sin \alpha \cos \alpha$ prin $\sin 2\alpha$ și $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ prin $\cos 2\alpha$; obținem

$$B_1^2 = (A^2 + C^2 - B^2 - 2AC) \sin^2 2\alpha + 2 (BC - AB) \sin 2\alpha \times \cos 2\alpha + B^2, \; 4A_1C_1 = (A^2 + C^2 - B^2 - 2AC) \sin^2 2\alpha + 2 (BC - AB) \sin 2\alpha \cos 2\alpha + 4AC.$$

Scăzînd membru cu membru, deducem

$$B_1^2 - 4A_1C_1 = B^2 - 4AC.$$

267. Să se verifice relația

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin (x+y) \sin (x-y).$$

Facultatea de matematică și fizică, Cluj, 1955.

R. Se știe că

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{și} \quad \sin^2 y = \frac{1 - \cos 2y}{2},$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \frac{\cos 2y - \cos 2x}{2}.$$

Transformăm diferența $\cos 2y - \cos 2x$ în produs și obținem

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \frac{2 \sin (x-y) \sin (x+y)}{2} = \sin (x-y) \sin (x+y).$$

268. Se dă $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{2}$ și $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = \sqrt{3}$. Se cere

$$\sin (x+y); \sin (x-y); \operatorname{tg} (x+y).$$

Institutul tehnic, Craiova, 1955.

R. Cu ajutorul formulelor

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \text{și} \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

obținem

$$\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \cos x = \frac{-1}{3}; \operatorname{tg} x = -2\sqrt{2}$$

$$\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos y = -\frac{1}{2}; \operatorname{tg} y = -\sqrt{3},$$

de unde rezultă

$$\sin (x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6} \sin (x-y) = \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{6}$$

și

$$\operatorname{tg} (x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{9\sqrt{3} + 8\sqrt{2}}{23}.$$

269. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia

$$E = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c.$$

Institutul tehnic, Craiova, 1955.

Scanned with OKEN Scanner

R. Înlocuind produsele de cosinusuri prin sume și pe $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, obținem

$$E = 1 - \frac{1+\cos 2a}{2} - \frac{1+\cos 2b}{2} - \frac{1+\cos 2c}{2} +$$

$$+ [\cos(a+b) + \cos(a-b)]\cos c = -\frac{1+\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c}{2}$$

$$+ \frac{\cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)+\cos(a-b+c)+\cos(b+c-a)}{2},$$

sau scris în altă ordine, avem

$$E = \frac{[\cos(a+b+c)-1]+[\cos(b+c-a)-\cos 2a]+[\cos(a-b+c)-\cos 2b]}{2} +$$

$$+ \frac{[\cos(a+b-c)-\cos 2c]}{2} = -\sin^2\frac{a+b+c}{2} -$$

$$-\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-3a}{2} - \sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+c-3b}{2} -$$

$$-\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-3c}{2},$$

sau

$$E = -\sin\frac{a+b+c}{2}\left[\left(\sin\frac{a+b+c}{2}+\sin\frac{b+c-3a}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\sin\frac{a+b-3c}{2}+\sin\frac{a-3b+c}{2}\right)\right] =$$

$$= 4\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}.$$

270. Să se demonstreze identitatea

$$\sin a\sin b\sin(b-a) + \sin b\sin c\sin(c-b) +$$

$$+ \sin c\sin a\sin(a-c) = \sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a).$$

Institutul tehnic, Craiova, 1955.

R Avem

$$\sin b\sin c\sin(c-b) = \frac{[\cos(c-b)-\cos(c+b)]\sin(c-b)}{2} =$$

$$= \frac{\sin 2(c-b)-[\sin 2c-\sin 2b]}{4};$$

Scanned with OKEN Scanner

transformăm la fel produsele analoge și după ce le adunăm avem

$$\sin a \sin b \sin (b-a) + \sin b \sin c \sin (c-b) +$$

$$+ \sin c \sin a \sin (a-c) = \frac{\sin 2(b-a) + \sin 2(c-b) + \sin 2(a-c)}{4} =$$

$$= \frac{2 \sin (c-a) \cos (a+c-2b) - 2 \sin (c-a) \cos (c-a)}{4} =$$

$$= \sin (a-b) \sin (b-c) \sin (c-a).$$

271. Să se verifice identitatea

$$\frac{\cos^2 2x + \cos^2 (x-y) - 2 \cos (x-y) \cos (x+y) \cos 2x}{\sin^2 x + \sin^2 y + 2 \sin x \sin y \cos (x+y)} = 1$$

Institutul politehnic, Brașov, 1958.

R. Numărătorul N al expresiei se poate scrie succesiv

$$N = \cos^2 2x + \frac{1 + \cos 2(x-y)}{2} - \cos 2x (\cos 2x + \cos 2y) =$$

$$= \frac{1 + \cos 2x \cos 2y + \sin 2x \sin 2y - 2 \cos 2x \cos 2y}{2}$$

sau

$$N = \frac{1 - \cos 2(x+y)}{2} = \sin^2 (x+y).$$

Numitorul n al expresiei, la rîndul său, poate fi transformat succesiv, astfel

$$n = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 2y}{2} + 2 \sin x \sin y \cos x \cos y -$$

$$- 2 \sin^2 x \sin^2 y,$$

sau

$$n = \frac{2 - \cos 2x - \cos 2y}{2} + \frac{\sin 2x \sin 2y}{2} - \frac{(1 - \cos 2x)(1 - \cos 2y)}{2} =$$

$$= \frac{2 - \cos 2x - \cos 2y + \sin 2x \sin 2y - 1 + \cos 2x + \cos 2y - \cos 2x \cos 2y}{2} =$$

$$= \frac{1 - \cos 2(x+y)}{2} = \sin^2 (x+y).$$

Așadar, primul membru al expresiei date devine

$$\frac{\sin^2 (x+y)}{\sin^2 (x+y)} = 1.$$

272. Să se verifice următoarele identități

1) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+a\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-a\right)=\frac{\sin 2a}{\sqrt{2}}$.

2) $(1+\sin a)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)=\cos a$.

Institutul politehnic, București, 1959.

R. 1) Ținînd seama de identitatea

$$\sin^2 a-\sin^2 b=\sin(a+b)\sin(a-b),$$

avem

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+a\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-a\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}+a+\frac{\pi}{8}-a\right)\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi}{8}+a-\frac{\pi}{8}+a\right)=\sin\frac{\pi}{4}\sin 2a=\frac{\sin 2a}{\sqrt{2}}.$$

2) Se poate scrie succesiv

$$(1+\sin a)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)=\left(\cos\frac{a}{2}+\sin\frac{a}{2}\right)^2\cdot\frac{1-\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}}=$$

$$=\left(\cos\frac{a}{2}+\sin\frac{a}{2}\right)^2\frac{\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}+\sin\frac{a}{2}}=\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}=\cos a.$$

273. Să se găsească o relație algebrică între unghiurile x, y, z astfel încît să aibă loc relația trigonometrică

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}+\operatorname{tg}\frac{z}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$$

Facultatea de matematică-mecanică, Cluj, 1962.

R. Expresia E din membrul stîng al egalității date apare în dezvoltarea $\operatorname{tg}\frac{x+y+z}{2}$, care este

$$\operatorname{tg}\frac{x+y+z}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}+\operatorname{tg}\frac{z}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{1-E}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama că s-a dat $E = 1$, rezultă $\frac{x+y+z}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{2}$

şi prin urmare

$$x + y + z = (2k+1)\pi.$$

274. Să se rezolve ecuaţia trigonometrică

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0.$$

Institutul de petrol şi gaze, Bucureşti, 1952.

R. Grupăm termenii ecuaţiei în felul următor

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 4x) + (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x) = 0.$$

Înlocuim sumele din paranteze prin expresii calculabile prin logaritmi, după care ecuaţia devine

$$\frac{\sin 5x}{\cos x \cos 4x} + \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} = 0,$$

sau

$$\frac{\sin 5x\,(\cos 2x \cos 3x + \cos x \cos 4x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x} = 0.$$

Ţinînd seama că avem

$$\cos 2x \cos 3x + \cos x \cos 4x = \cos 2x\,(\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x) +$$

$$+ \cos x \cos 4x = \cos^2 2x \cos x - \cos 2x \sin 2x \sin x +$$

$$+ \cos x \cos 4x = \cos x\,(\cos^2 2x - 2 \cos 2x \sin^2 x + \cos 4x)$$

şi că

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x, \quad \text{iar} \quad \cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1,$$

ultima ecuaţie devine, după simplificarea cu $\cos x$ şi reducerile din paranteză,

$$\frac{\sin 5x\,(4 \cos^2 2x - \cos 2x - 1)}{\cos 2x \cos 3x \cos 4x} = 0.$$

Astfel, rădăcinile ecuaţiei propuse sînt date de următoarele

I) $\sin 5x = 0$ cu soluţia generală $x' = \frac{k\pi}{5}$

şi de

II) $\cos 2x = \frac{1 \pm 17}{8}$ cu soluţiile generale $x'' = k\pi \pm \frac{1}{2} \times$

$\times \arccos \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$.

275. Să se rezolve ecuația

$$\sin 3x - \cos 2x - \sin x = 0.$$

Facultatea de matematică și fizică, București, 1954

R. Transformînd în produs diferența dintre primul și ultimul termen, ecuația devine

$$2 \sin x \cos 2x - \cos 2x = 0 \quad \text{sau} \quad 2 \cos 2x \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Avem de rezolvat ecuațiile

$$\cos 2x = 0 \quad \text{și} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

Soluțiile primei ecuații sînt date de

$$x' = \frac{(2n+1)\pi}{4},$$

iar ale celei de-a doua, de

$$x'' = 2n\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{și} \quad x''' = 2n\pi + \frac{5\pi}{6},$$

unde n este un întreg oarecare.

276. Să se rezolve ecuația

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right).$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

R. În membru întîi se transformă în produs suma

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos 2x,$$

iar în membrul al doilea, diferența

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin 2x.$$

După aceste transformări, ecuația devine succesiv

$$\cos 2x + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos 2x = \sin 2x + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin 2x;$$

$$(\sin 2x - \cos 2x) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)(\sin 2x - \cos 2x) = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde avem

$$(\sin 2x - \cos 2x)\left[1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right] = 0.$$

Soluţiile sînt date de ecuaţiile

I) $\sin 2x - \cos 2x = 0$, care se mai scrie şi sub forma

$$\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right),$$

a cărei singură soluţie generală este $x' = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$.

II) $1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0$ sau $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{1}{2} =$

$$= \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right),$$

ale cărei soluţii generale sînt

$$x'' = 2k\pi - \frac{5\pi}{12} \quad \text{şi} \quad x''' = 2k\pi + \frac{11\pi}{12}.$$

În toate soluţiile obţinute, numărul k este un întreg oarecare pozitiv sau negativ.

277. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin^3 x\,(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x\,(1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x.$$

Institutul de petrol şi gaze, Bucureşti, 1954.

R. Ecuaţia dată se scrie succesiv

$$\sin^3 x\left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right) + \cos^3 x\left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

sau

$$\sin^2 x\,(\cos x + \sin x) + \cos^2 x\,(\cos x + \sin x) - (\cos x + \sin x)\,(\cos x - \sin x) = 0.$$

Dînd factor comun pe $\cos x + \sin x$, ecuaţia devine

$$(\cos x + \sin x)\,(\sin^2 x + \cos^2 x - \cos x + \sin x) = 0,$$

care se desface în două ecuaţii

I) $\cos x + \sin x = 0$

şi

II) $\cos x - \sin x = 1$.

Pentru rezolvarea primei ecuații scriem

$$\cos x + \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0.$$

care dă soluția $x' = k\pi + \frac{3\pi}{4}$.

Ecuația a doua se scrie

$$\sin x + (1 - \cos x) = 0$$

sau

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0,$$

adică

$$2 \sin \frac{x}{2}\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right) = 0,$$

ale cărei soluții generale sînt $x'' = 2k\pi$ și $x''' = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ *).

278. Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{tg} 4x = 2\sqrt{3}\,(\cos^4 x - \sin^4 x).$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

R. Putem scrie succesiv

$$\operatorname{tg} 4x = 2\sqrt{3}\,(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2\sqrt{3} \cos 2x.$$

Dar fiindcă avem

$$\operatorname{tg} 4x = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{1 - 2 \sin^2 2x},$$

ecuația devine

$$2\sqrt{3}\,(1 - 2 \sin^2 2x) \cos 2x - 2 \sin 2x \cos 2x = 0,$$

sau

$$2 \cos 2x\,[2\sqrt{3} \sin^2 2x + \sin 2x - \sqrt{3}] = 0,$$

care ne dă

I) $\cos 2x = 0$,

II) $\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

*) Soluțiile x'', x''' nu au sens pentru ecuația dată.

și

III) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Din prima ecuație obținem

$$x' = k \cdot 90° + 45°,$$

a doua dă soluțiile

$$x'' = k \cdot 360° + 35°15'52'' \quad \text{și} \quad x''' = k \cdot 360° + 144°44'8'',$$

iar a treia

$$x^{IV} = k \cdot 360° - 60° \text{ și } x^{V} = k \cdot 360° + 240°.$$

În soluțiile găsite se consideră k întreg pozitiv sau negativ.

279. Să se rezolve ecuația

$$\cos^2 x + 3 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 1.$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

R. După substituția $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ și $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ecuația devine

$$\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 1.$$

Înlocuim $\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°}$ și obținem

$$\cos 2x \cos 60° - \sin 2x \sin 60° = \cos 60°$$

sau

$$\cos (2x + 60°) = \cos 60°,$$

cu soluțiile date de $2x + 60° \pm 60° = k \cdot 360°$, de unde

$$x' = k \cdot 180° \text{ și } x'' = k \cdot 180° - 60°.$$

280. Să se rezolve ecuația

$$\sin (75° + x) + \cos (105° + x) = 1 - \sin 2x.$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

R. Ecuația dată se mai poate scrie

$$\sin 75° \cos x + \cos 75° \sin x + \cos 105° \cos x - \sin 105° \sin x = 1 - 2 \sin x \cos x.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind $\sin 75° = \cos 15°$; $\cos 75° = \sin 15°$; $\cos 105° = -\sin 15°$; $\sin 105° = \cos 15°$ și $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, ecuația devine

$$\cos 15° (\cos x - \sin x) - \sin 15° (\cos x - \sin x) = (\cos x - \sin x)^2.$$

Aceasta se desface în două ecuații

I) $\cos x - \sin x = 0$, cu soluția $x' = k \cdot 180° + 45°$,

și

II) $\cos x - \sin x = \cos 15° - \sin 15°$,

care se transformă în ecuația

$$2 \sin (45° - x) \cos 45° = 2 \sin 30° \cos 45°$$

sau

$$\sin (45° - x) = \sin 30°$$

cu soluțiile

$$x'' = 15° + k \cdot 360° \text{ și } x''' = 75° + (2k - 1)\, 180°$$

unde k este un întreg oarecare.

281. Să se rezolve ecuația

$$(\sin x + \cos x)^2 = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

R. Ecuația dată se transformă în

$$(\cos x + \sin x)^2 = \cos 2x \text{ sau } (\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Trecînd totul în membrul întîi și dînd factor comun pe $\cos x + \sin x$, obținem

$$(\cos x + \sin x) (\cos x + \sin x - \cos x + \sin x) = 0$$

sau

$$2 \sin x (\cos x + \sin x) = 0,$$

care se desface în ecuațiile

I) $\sin x = 0$, cu soluția $x' = k\pi$,

și

II) $\cos x + \sin x = 0$, cu soluția $x'' = (2k + 1) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$.

282. Să se rezolve ecuația

$$8 \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}.$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1954

R. Eliminînd numitorii, obținem

$$8 \cos x \sin x \cos x = \sqrt{3} \cos x + \sin x.$$

Înlocuind în membrul întîi $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ și împărțind ambii membri prin 2, obținem

$$2 \sin 2x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x.$$

Membrul întîi se înlocuiește cu $\sin 3x + \sin x$, iar al doilea prin $\sin (x + 60°)$, după care ecuația devine

$$\sin 3x + \sin x = \sin (x + 60°)$$

sau

$$\sin 3x = \sin (x + 60°) - \sin x.$$

După transformarea diferenței de sinusuri în produs, obținem

$$\sin 3x = \cos (x + 30°) = \sin (60° - x)$$

cu soluțiile

$$x' = k \cdot 90° + 15° \text{ și } x'' = k \cdot 180° + 60°.$$

283. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} - 2 \sin (45° + x) \sin (45° - x) = 0.$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1954

R. Înlocuim

$$\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos 2x \cos x}$$

și

$$2 \sin (45° + x) \sin (45° - x) = \cos 2x;$$

ecuația devine

$$\frac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}{\frac{\sin x}{\cos 2x \cos x}} - \cos 2x = 0$$

sau, după simplificare, avem

$$\sin 2x - \cos 2x = 0,$$

a cărei soluție este

$$x = k \cdot 90° + 22°30'.$$

284. Să se determine toate soluțiile ecuației

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}.$$

Institutul politehnic, Iași, 1954.

R. După eliminarea numitorilor obținem ecuația

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot 2 \sin x \cos x. \qquad (1)$$

Din identitatea

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x,$$

deducem

$$2 \sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2 - 1,$$

pe care o introducem în ecuația (1) și avem

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x) - \sqrt{2} = 0 \qquad (2)$$

care dă

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \qquad (1')$$

sau

$$\sin x + \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (2')$$

După înlocuirea expresiei $\sin x + \cos x$ prin $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, ecuațiile (1') și (2') devin

I) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ cu soluția

$$x' = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

și

II) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ cu soluțiile

$$x'' = 2k\pi + \frac{11\pi}{12} \text{ și } x''' = 2k\pi - \frac{5\pi}{12}.$$

285. Să se rezolve ecuaţia

$$4 \sin 4x + \operatorname{tg} 2x + 4 \sin 2x + \operatorname{tg} x = 0$$

Institutul politehnic, Galaţi, 1954.

R. Ecuaţia dată se scrie

$$4 (\sin 4x + \sin 2x) + (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x) = 0.$$

Transformînd expresiile din paranteze în altele, calculabile prin logaritmi, avem

$$4 \cdot 2 \sin 3x \cos x + \frac{\sin 3x}{\cos 2x \cos x} = 0.$$

Eliminînd numitorul şi dînd factor comun $\sin 3x$, obţinem

$$\sin 3x (8 \cos^2 x \cos 2x + 1) = 0.$$

Înlocuind acum $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ şi restrîngînd expresia avem

$$\sin 3x (1 - 4 \cos^2 x)^2 = 0,$$

ale cărei soluţii sînt date de ecuaţiile

I) $\sin 3x = 0$ cu soluţia $x_1 = \frac{k\pi}{3}$.

II) $\cos x = \pm \frac{1}{2}$ cu soluţiile

$$x_{2,3} = k\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

unde k este un întreg oarecare, pozitiv sau negativ.

286. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{9}{8}.$$

Institutul de petrol şi gaze, Bucureşti, 1955.

R. Avem relaţiile

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ şi } \sin^4 x = \frac{1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4}.$$

Introducînd în ultima expresie pe $\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$, obţinem

$$\sin^4 x = \frac{3 - 4 \cos 2x + \cos 4x}{8}.$$

Aplicînd această formulă fiecărui termen al ecuației date, avem

$$\frac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{8}+\frac{3-4\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(4x+\pi)}{8}+$$

$$+\frac{3-4\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(4x-\pi)}{8}=\frac{9}{8}.$$

După eliminarea numitorilor și efectuarea reducerilor, obținem

$$-4\left[\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right]+$$

$$+\cos 4x+\cos(4x+\pi)+\cos(4x-\pi)=0.$$

Înlocuim

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin 2x;\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2x$$

$\cos(4x+\pi)=-\cos 4x$ și $\cos(4x-\pi)=-\cos 4x$,

după care, în urma reducerilor, ecuația devine

$$-4\cos 2x-\cos 4x=0.$$

În urma substituției $\cos 4x=2\cos^2 2x-1$, avem de rezolvat ecuația echivalentă

$$2\cos^2 2x+4\cos 2x-1=0,$$

care dă

$$\cos 2x=\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}.$$

Dintre soluțiile obținute, singura care dă arce reale este

$$\cos 2x=\frac{\sqrt{6}-2}{2}\approx 0{,}224\ 74,$$

cu soluțiile generale date de formula $x=k\cdot 180^\circ\pm 38^\circ 30'32''$, unde k este un număr întreg oarecare.

287. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$\sin x+m\sin^2 2x+\sin 3x=0.$$

Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1955.

Scanned with OKEN Scanner

R. Transformînd în produs suma dintre primul și ultimul termen ecuația devine

$$2 \sin 2x \cos x + m \sin^2 2x = 0,$$

sau

$$2 \sin 2x \cos x (1 + m \sin x) = 0,$$

ale cărei soluții sînt date de ecuațiile

I) $\sin 2x = 0$, $x' = \frac{k\pi}{2}$;

II) $\cos x = 0$, $x'' = \frac{(2k+1)\pi}{2}$;

III) $\sin x = -\frac{1}{m}$, $x''' = -\operatorname{Arcsin} \frac{1}{m}$.

Ecuația a treia admite soluții reale numai dacă avem

$$|m| \geqslant 1.$$

288. Să se rezolve ecuația

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}.$$

Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1955.

R. Ecuația propusă se mai scrie:

$$(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \frac{1}{4}$$

sau

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \frac{1}{4}.$$

Ținînd seama de relațiile

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x =$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x,$$

deducem

$$1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \quad \text{sau} \quad 3 (\sin x \cos x)^2 = \frac{3}{4}.$$

Înlocuind $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$ și simplificînd, avem

$$\sin^2 2x = 1 \text{ sau } \sin 2x = \pm 1,$$

ale cărei soluții sînt date de formula

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{4}.$$

289. Să se găsească toate soluțiile ecuației

$$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x.$$

Institutul de industrie ușoară, Iași, 1955.

R. Ecuația dată de scrie

$$\sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sqrt{2} \sin x.$$

Transformînd membrul întîi în produs, avem

$$2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin x.$$

Simplificînd cu $2 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ și punînd $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, ecuația devine

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

ale cărei soluții sînt date de ecuațiile

$$\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2k\pi \qquad \text{(I)}$$

și

$$\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2k\pi. \qquad \text{(II)}$$

Pentru ecuația (I) avem

$$x' = \frac{2k\pi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

iar pentru ecuația (II), avem

$$x'' = 2k\pi - \frac{\pi}{4},$$

unde k este un număr oarecare întreg negativ sau pozitiv.

290. Să se rezolve ecuația

$$3\,(1 + \cos x) = 2 \sin^2 x$$

și apoi să se calculeze $\sin 2x$; $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$.

Institutul politehnic, Timișoara, 1955.

R. Înlocuim $\sin^2 x$ prin $(1 - \cos x)(1 + \cos x)$ și trecem totul în membrul întîi; ecuația devine succesiv

$$2\,(1 - \cos x)(1 + \cos x) - 3\,(1 + \cos x) = 0,$$

$$(1 + \cos x)(-2 \cos x - 1) = 0,$$

care se desface în

I) $1 + \cos x = 0$, cu soluția

$$x' = (2k + 1)\,\pi;$$

II) $-2 \cos x - 1 = 0$, cu soluțiile

$$x'' = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, \quad x''' = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}.$$

Să calculăm $\sin 2x$; $\cos 2x$; $\operatorname{tg} 2x$ pentru fiecare caz în parte. Obținem

$$\sin 2x' = \sin 2\pi = 0; \quad \cos 2x' = \cos 2\pi = 1; \quad \operatorname{tg} 2x' = \operatorname{tg} 2\pi = 0;$$

$$\sin 2x'' = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 2x'' = \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 2x'' = \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}; \quad \sin 2x''' = \sin \frac{8\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 2x''' = \cos \frac{8\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \quad \operatorname{tg} 2x''' = \operatorname{tg} \frac{8\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

291. Să se rezolve și să se discute rădăcinile ecuației

$$(2m - 1)\,\cos 2x - 9 \cos x + m - 5 = 0.$$

Institutul tehnic, Craiova, 1955.

R. Ecuația se mai poate scrie

$$(2m - 1)\,(2 \cos^2 x - 1) - 9 \cos x + m - 5 = 0.$$

sau

$$2\,(2m - 1) \cos^2 x - 9 \cos x - (m + 4) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Această ecuație, rezolvată în raport cu $\cos x$, ne dă

I) $\cos x = -\frac{1}{2}$, cu soluțiile $x' = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$ și $x'' = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

II) $\cos x = \frac{m+4}{2m-1}$, cu soluția $x = \operatorname{Arccos}\frac{m+4}{2m-1}$.

Pentru ca această ultimă soluție să existe, trebuie să avem

$$-1 \leqslant \frac{m+4}{2m-1} \leqslant 1,$$

de unde rezultă sistemul de inegalități simultane

$$\begin{cases} \frac{m+4}{2m-1} + 1 \geqslant 0 \\ \frac{m+4}{2m-1} - 1 \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \frac{3(m+1)}{2m-1} \geqslant 0 \\ \frac{m-5}{2m-1} \geqslant 0, \end{cases}$$

care este verificat pentru valorile lui $m \leqslant -1$ sau $m \geqslant 5$. Pentru $-1 < m < 5$, ecuația dată nu admite decît soluțiile date de $\cos x = -\frac{1}{2}$.

292. Să se rezolve ecuația

$$\sin(x + 20°) + \cos(x - 10°) - \sin(x - 40°) = \sqrt{3}.$$

Institutul tehnic, Craiova, 1955.

R. Transformînd în produs diferența sinusurilor din membrul întîi, obținem ecuația

$$\cos(x - 10°) + 2 \sin 30° \cos(x - 10°) = \sqrt{3},$$

cu soluțiile $x' = k \cdot 360° + 40°$ și $x'' = k \cdot 360° - 20°$.

293. Să se rezolve ecuația

$$\cos x + \cos 7x = \cos 4x.$$

Se va da soluția generală și soluțiile particulare cuprinse între 0° și 180°.

Institutul de mine, Petroșeni, 1959.

R. Transformînd primul membru în produs, ecuația devine

$$\cos 4x (2 \cos 3x - 1) = 0,$$

care are soluțiile generale:

$$x' = \frac{(2k+1)\pi}{4},\quad x'' = \frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \text{ și } x''' = \frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{3}.$$

Soluțiile cuprinse între 0 și 180° sînt:

$$x_1 = 45°,\ x_2 = 60° \text{ și } x_3 = 135°.$$

294. Se dă expresia

$$E = \sin x + \sin 3x + 2 \sin 2x$$

și se cere:

a) să se facă expresia dată calculabilă prin logaritmi;
b) să se rezolve ecuația $E = 0$;
c) să se calculeze valoarea expresiei date pentru $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$.

Institutul Politehnic, București, 1961.

R. a) Avem $E = 2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 2x =$

$$= 2 \sin 2x\,(1 + \cos x) = 4 \sin 2x \cos^2 \frac{x}{2}.$$

b) Pentru a avea $E = 0$, trebuie ca

$$\sin 2x = 0, \text{ deci } x' = \frac{n\pi}{2},$$

sau

$$\cos \frac{x}{2} = 0, \text{ deci } x'' = (2k+1)\pi,$$

n și k fiind întregi oarecare.

c) Ținînd seama că avem $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} =$

$$= \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}\right)$$

și $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, rezultă

$$\sin 2x = \frac{3}{5} \text{ și } \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{10 \pm 3\sqrt{10}}{20}.$$

Prin urmare,

$$E = \frac{3\,(10 \pm 3\sqrt{10})}{25};$$

semnul plus corespunde cazului în care x are extremitatea în cadranul I sau III, iar semnul minus cazului în care x are extremitatea în cadranul II sau IV.

295. Se dă expresia $E = 13 \sin x - 3 \cos 2x$. Se cere:

a) Să se afle valoarea numerică a expresiei pentru $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$.

b) Să se rezolve ecuația $E + 8 = 0$.

c) Să se afle valoarea numerică a expresiei pentru $x = \frac{\pi}{12}$.

Institutul politehnic, București, 1962.

R. a) Ținînd seama că avem $E = 6 \sin^2 x + 13 \sin x - 3$ și $\sin x = \frac{\pm \operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$, obținem

$$E = \frac{-9 \pm 13\sqrt{5}}{5}.$$

b) Avem

$$E + 8 = 6 \sin^2 x + 13 \sin x + 5 = 0$$

care are soluția generală $x = -\frac{\pi}{6} + (-1)^k \cdot k\pi$ unde k este un întreg.

c) Pentru $x = \frac{\pi}{12}$, avem $E = 13 \sin \frac{\pi}{12} - 3 \cos \frac{\pi}{6}$.

Avînd în vedere că $\sin \frac{\pi}{12} = \sin 15° = \sin (45° - 30°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ și că avem $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, rezultă

$$E = \frac{13(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - 6\sqrt{3}}{4}.$$

296. Să se determine valorile arcului x pentru care numerele

$$\sin x, \ \sin \frac{3x}{2}, \ \sin 3x,$$

formează o progresie geometrică. Să se calculeze rația acestei progresii.

Facultatea de matematică-mecanică, Cluj, 1962.

R. Trebuie să avem

$$\frac{\sin \frac{3x}{2}}{\sin x} = \frac{\sin 3x}{\sin \frac{3x}{2}} \quad \text{sau} \quad \frac{3 \sin \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{3x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = 2 \cos \frac{3x}{2}.$$

De unde rezultă

$$3 - 4 \sin^2 \frac{x}{2} = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}.$$

Substituind $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$ și $2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} = \cos 2x + \cos x$, ecuația devine

$$3 - 2 (1 - \cos x) = 2 (2 \cos^2 x - 1 + \cos x) \text{ sau } 4 \cos^2 x = 3.$$

Cum $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, obținem $2 \cos 2x = 1$ și prin urmare $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$.

Rația progresiei este

$$\frac{\sin 3x}{\sin \frac{3x}{2}} = 2 \cos \frac{3x}{2} = 2 \cos \left(\frac{3k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cos \left(\frac{k\pi}{2} \mp \frac{\pi}{4} \right).$$

297. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x - y = 15^\circ; \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 + \sqrt{3}. \end{cases} \quad (1)$$

Institutul pedagogic, Timișoara, 1956.

R. Aplicăm tangenta la ambii membri ai primei ecuații

$$\operatorname{tg} (x - y) = 2 - \sqrt{3} \text{ sau } \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = 2 - \sqrt{3}.$$

Înlocuind în ecuația obținută pe $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$ prin expresia echivalentă $\frac{1}{4} [(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)^2 - (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y)^2]$, obținem

$$\frac{4 (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y)}{4 + (1 + \sqrt{3})^2 - (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y)^2} = 2 - \sqrt{3}$$

sau

$$(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y)^2 + 4 (2 + \sqrt{3}) (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y) - 2 (4 + \sqrt{3}) = 0,$$

de unde aflăm

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = -2 (2 + \sqrt{3}) \pm 3 (1 + \sqrt{3}).$$

Sistemul dat se desface astfel în două sisteme

$$\text{I} \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3} + 1 \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \sqrt{3} - 1 \end{cases} \qquad \text{II} \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3 + 1} \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = -5 \sqrt{3 - 7}. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Primul sistem ne dă $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și $\operatorname{tg} y = 1$ cu soluțiile $x = m\pi + \frac{\pi}{3}$ și $y = n\pi + \frac{\pi}{4}$. Prin aplicarea tangentei la egalitatea $x - y = 15°$ s-au introdus și soluții străine.

Pentru a afla cele juste, trebuie să verificăm cele găsite. Ecuația a doua a sistemului (1) este verificată pentru orice m și n. Pentru ca soluțiile găsite să verifice și ecuația întîi, trebuie să avem

$$\left(m\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12};$$

așadar $m = n$.

Soluția sistemului I este deci $\left(x = nx + \frac{\pi}{3};\ y = n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$.

Urmînd același raționament ca la aflarea soluțiilor sistemului I, aflăm soluțiile sistemului II

$$x = (n+1)\,\pi - \operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{3});\quad y = n\pi + \operatorname{arctg}(4 + 3\sqrt{3}).$$

Pentru a le verifica, trebuie să arătăm că $x - y = \frac{\pi}{12}$ și $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 + \sqrt{3}$.

Avem

$$x - y = \pi - [\operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(4 + 3\sqrt{3})].$$

Calculăm $\operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(4 + 3\sqrt{3}) =$

$$= \operatorname{arctg}\frac{(3 + 2\sqrt{3}) + (4 + 3\sqrt{3})}{1 - (4 + 3\sqrt{3})(3 + 2\sqrt{3})} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{7 + 5\sqrt{3}}{29 + 17\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}\left[-\frac{(7 + 5\sqrt{3})(29 - 17\sqrt{3})}{29^2 - 17^2 \cdot 3}\right] =$$

$$= \operatorname{arctg}\left[-\frac{119\sqrt{3} - 145\sqrt{3} + 255 - 203}{3 \cdot 289 - 841}\right] = \operatorname{arctg}\left[-\frac{52 - 26\sqrt{3}}{26}\right] =$$

$$= \operatorname{arctg}[-(2 - \sqrt{3})] = \pi - \operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{12}$$

și prin urmare $x - y = \pi - \left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}$,

iar $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = -(3 + 2\sqrt{3}) + (4 + 3\sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3}$,

298. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \cos x + \sin 2x = \cos 3x \\ \cos(x + y) + \sqrt{3}\sin(x + y) = 1. \end{cases}$$

Institutul de transporturi și căi ferate, București, 1954.

Scanned with OKEN Scanner

R. Pentru a găsi soluțiile sistemului, îl punem sub forma

$$\sin 2x + (\cos x - \cos 3x) = 0$$

$$\cos(x+y) + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} \sin(x+y) = 1.$$

Înlocuind diferența de cosinusuri printr-un produs, în prima ecuație, și eliminînd numitorii la a doua, sistemul ia forma

$$\begin{cases} \sin 2x\,(1 + 2\sin x) = 0 \\ \cos\left(x + y - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

care se desface în trei sisteme

$$\text{I)} \begin{cases} x = \frac{n\pi}{2} \\ x + y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, \end{cases} \qquad \text{II)} \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = 2n\pi \\ x + y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = (2n+1)\pi, \\ x + y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

ale căror soluții diferite sînt

$$\begin{cases} x_1 = \frac{n\pi}{2} \\ y_1 = 2k\pi - \frac{n\pi}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \frac{n\pi}{2} \\ y_2 = 2k\pi - \frac{n\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 2n\pi - \frac{\pi}{6} \\ y_3 = 2(k-n)\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = 2n\pi - \frac{\pi}{6} \\ y_4 = 2(k-n)\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = 2n\pi + \frac{7\pi}{6} \\ y_5 = 2(k-n)\pi - \frac{7\pi}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_6 = 2n\pi + \frac{7\pi}{2} \\ y_6 = 2(k-n)\pi - \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Numerele k și n sînt întregi oarecare, pozitive sau negative, iar $k - n$ se poate nota de asemenea cu un întreg oarecare k'.

Scanned with OKEN Scanner

299. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3} \\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{y}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

R. Punem $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u$ și $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = w$. Sistemul dat devine după aceste substituții

$$\begin{cases} u + w = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2u}{1-u^2} + \frac{2w}{1-w^2} = 2\sqrt{3}. \end{cases} \tag{1}$$

Ecuația a doua a sistemului (1) se scrie în felul următor

$$\frac{u + w - uw(u+w)}{1 - (u+w)^2 + 2uw + (uw)^2} = \sqrt{3}.$$

Introducem în această ecuație $u + w = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ și obținem

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}(1 - uw) = \sqrt{3}\left[(uw)^2 + 2uw - \frac{4}{3} + 1\right],$$

sau, după eliminarea numitorilor și reduceri,

$$3(uw)^2 + 8(uw) - 3 = 0,$$

care admite soluțiile

$$uw = -3 \text{ și } uw = \frac{1}{3}.$$

Acestor soluții le corespund sistemele

$$\text{I)} \begin{cases} u + w = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\ uw = -3; \end{cases} \qquad \text{II)} \begin{cases} u + w = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\ uw = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Primul sistem are soluțiile

$$u = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{30}}{3} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \text{și} \quad w = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{30}}{3} = \operatorname{tg}\frac{y}{2},$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă

$$x = 2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\sqrt{3}+\sqrt{30}}{3} \quad \text{și} \quad y = 2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\sqrt{3}-\sqrt{30}}{3}$$

sau invers.

Al doilea sistem are soluțiile

$$u = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \text{și} \quad w = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg}\frac{y}{2}$$

de unde

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{și} \quad y = 2n\pi + \frac{\pi}{3};$$

numerele n și k sînt întregi oarecare.

300. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{2}\sin y \\ \sqrt{3}\sin 2x = 2\sin 2y. \end{cases}$$

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

R. Scoatem din ecuația întîi $\sin y = \frac{\sin x}{\sqrt{2}}$, pe care îl introducem în ecuația a doua, și obținem

$$\sin x\,(\sqrt{3}\cos x - \sqrt{2}\cos y) = 0.$$

Ecuația obținută se desface în

$$\sin x = 0 \quad \text{și} \quad \sqrt{3}\cos x - \sqrt{2}\cos y = 0.$$

Avem de rezolvat sistemele

$$\text{I)}\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin y = 0; \end{cases} \qquad \text{II)}\begin{cases} \sin y = \frac{\sin x}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{2}\cos y = \sqrt{3}\cos x. \end{cases}$$

Primul sistem admite soluția

$$x = k\pi;\ y = n\pi.$$

Pentru a-l rezolva pe cel de-al doilea, introducem expresiile lui $\sin y$ și $\cos y$ în relația $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$; obținem

$$\frac{\sin^2 x}{2} + \frac{3\cos^2 x}{2} = 1 \quad \text{sau} \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

de unde rezultă

$$\sin x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \quad \text{și} \quad \sin y = \frac{\pm 1}{2}.$$

Avem deci sistemele care dau pe x și y

$$\text{III)} \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin y = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \qquad \text{IV)} \begin{cases} \sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

cu soluțiile

$$1° \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{4}, \\ y = 2n\pi + \dfrac{\pi}{6}; \end{cases} \quad 2° \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{4}, \\ y = 2n\pi + \dfrac{5\pi}{6}; \end{cases} \quad 3° \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{3\pi}{4}, \\ y = 2n\pi + \dfrac{\pi}{6}; \end{cases}$$

$$4° \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{3\pi}{4}, \\ y = 2n\pi + \dfrac{5\pi}{6}; \end{cases} \quad 5° \begin{cases} x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{4}, \\ y = 2n\pi - \dfrac{\pi}{6}; \end{cases} \quad 6° \begin{cases} x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{4}, \\ y = 2n\pi - \dfrac{5\pi}{6}; \end{cases}$$

$$7° \begin{cases} x = 2k\pi - \dfrac{3\pi}{4}, \\ y = 2n\pi - \dfrac{\pi}{6}; \end{cases} \quad 8° \begin{cases} x = 2k\pi - \dfrac{3\pi}{4}, \\ y = 2n\pi - \dfrac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

Dintre aceste soluții, unele sînt străine; trebuie să reținem pe acelea pentru care avem $\dfrac{\cos y}{\cos x} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Soluții bune sînt numai cele de la numerele 1°; 4°; 5°; 8°.

301. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = n\pi \\ \dfrac{\sin x}{a} = \dfrac{\sin y}{b} = \dfrac{\sin z}{c}. \end{cases}$$

Institutul tehnic, Craiova, 1955.

R. Din prima ecuație deducem

$$x + y = n\pi - z. \qquad (1)$$

Aplicăm sinusul în ambii membri și obținem

$$\sin x \cos y + \sin y \cos x = (-1)^{n+1} \sin z. \qquad (2)$$

Avînd în vedere că din ecuația a doua rezultă că sin x, sin y și sin z sînt proporționale cu a, b, c, atunci ecuația (2) devine

$$a \cos y + b \cos x = (-1)^{n+1} c.$$

Procedînd la fel cu egalitățile $x + z = n\pi - y$ și $y + z = n\pi - x$, obținem ecuații analoge. Sistemul dat se înlocuiește astfel cu următorul sistem echivalent

$$\begin{cases} b \cos z + c \cos y = (-1)^{n+1} a \\ a \cos z + c \cos x = (-1)^{n+1} b \\ a \cos y + b \cos x = (-1)^{n+1} c. \end{cases} \qquad (3)$$

Înmulțind prima ecuație cu a, a doua cu b și a treia cu c, sistemul devine

$$\begin{cases} ab \cos z + ac \cos y = (-1)^{n+1} a^2 \\ ab \cos z + bc \cos x = (-1)^{n+1} b^2 \\ ac \cos y + bc \cos x = (-1)^{n+1} c^2. \end{cases} \qquad (3')$$

Din adunarea ecuațiilor sistemului (3'), deducem

$$bc \cos x + ac \cos y + ab \cos z = (-1)^{n+1} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}. \qquad (4)$$

Scăzînd din ecuația (4), pe rînd, fiecare ecuație a sistemului (3'), obținem

$$bc \cos x = (-1)^{n+1} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2};$$

$$ac \cos y = (-1)^{n+1} \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2};$$

$$ab \cos z = (-1)^{n+1} \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

De aici, deducem pe x, y, z

$$x = \operatorname{Arccos} \frac{(-1)^{n+1} (b^2 + c^2 - a^2)}{2bc},$$

$$y = \operatorname{Arccos} \frac{(-1)^{n+1} (a^2 + c^2 - b^2)}{2ac}$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$z = \operatorname{Arccos} \frac{(-1)^{n+1}(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}.$$

302. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin^2 (y - z) = a \\ \sin^2 y - \sin^2 (z - x) = b \\ \sin^2 z - \sin^2 (x - y) = c. \end{cases}$$

Institutul tehnic, Craiova, 1955.

R. Folosind formula $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, sistemul devine

$$\begin{cases} \cos 2(y - z) - \cos 2x = 2a \\ \cos 2(z - x) - \cos 2y = 2b \\ \cos 2(x - y) - \cos 2z = 2c. \end{cases}$$

După ce înlocuim diferențele de cosinusuri prin produse de sinusuri obținem

$$\begin{cases} \sin(x + z - y) \sin(x + y - z) = a \\ \sin(y + z - x) \sin(x + y - z) = b \\ \sin(y + z - x) \sin(x + z - y) = c. \end{cases} \quad (1)$$

Înmulțind ecuațiile membru cu membru, deducem

$$\sin(y + z - x) \sin(x + z - y) \sin(x + y - z) = \varepsilon \sqrt{abc} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Împărțind apoi cei doi membri ai acestei ecuații la membrii respectivi ai fiecărei ecuații din sistemul (1), deducem

$$\begin{cases} \sin(-x + y + z) = \dfrac{\varepsilon \sqrt{abc}}{a} \\ \sin(x - y + z) = \dfrac{\varepsilon \sqrt{abc}}{b} \\ \sin(x + y - z) = \dfrac{\varepsilon \sqrt{abc}}{c}. \end{cases} \quad (2)$$

Din sistemul obținut formăm noi ecuații

$$\begin{cases} -x + y + z = \operatorname{Arcsin} \dfrac{\varepsilon \sqrt{abc}}{a} \\ x - y + z = \operatorname{Arcsin} \dfrac{\varepsilon \sqrt{abc}}{b} \\ x + y - z = \operatorname{Arcsin} \dfrac{\varepsilon \sqrt{abc}}{c}. \end{cases} \quad (3)$$

Soluţiile noului sistem sînt

$$x = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arcsin} \frac{\varepsilon \sqrt{abc}}{b} + \operatorname{Arcsin} \frac{\varepsilon \sqrt{abc}}{c}\right),$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arcsin} \frac{\varepsilon \sqrt{abc}}{a} + \operatorname{Arcsin} \frac{\varepsilon \sqrt{abc}}{c}\right),$$

$$z = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arcsin} \frac{\varepsilon \sqrt{abc}}{a} + \operatorname{Arcsin} \frac{\varepsilon \sqrt{abc}}{b}\right).$$

303. Să se rezolve sistemul

$$\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 2x + \cos 2y = \frac{1}{2}.$$

Verificare.

Institutul de industrii alimentare, Galaţi, 1955.

R. Ecuaţia a doua se mai scrie

$$2\cos^2 x - 1 + 2\cos^2 y - 1 = \frac{1}{2},$$

de unde deducem

$$\cos^2 x + \cos^2 y = (\cos x + \cos y)^2 - 2\cos x \cos y = \frac{5}{4}.$$

Ţinînd seama de prima ecuaţie, obţinem

$$\cos x \cos y = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Astfel că sistemul dat se transformă în sistemul

$$\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \quad \text{şi} \quad \cos x \cos y = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Avînd suma şi produsul expresiilor $\cos x$ şi $\cos y$, formăm ecuaţia de gradul al doilea care ne dă valorile lor

$$Z^2 - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} Z + \frac{\sqrt{6}}{4} = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

ale cărei rădăcini sînt

$$Z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ și } Z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sistemul care dă pe x și y devine acum

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

și invers.

Deducem

$$\begin{cases} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ y = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \\ y = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Verificarea se face introducînd aceste valori în sistemul inițial

$$\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \text{ și } \cos 2x + \cos 2x = \frac{1}{2}.$$

Avem

$$\cos x = \cos\frac{\pm\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};\quad \cos y = \cos\frac{\pm\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 2x = \cos\frac{\pm\pi}{2} = 0 \text{ și } \cos 2y = \cos\frac{\pm\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

care satisfac sistemul dat.

304. a) Să se verifice identitatea

$$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}.$$

b) Să se rezolve triunghiul ABC în care se cunosc:

$$c = 2(\sqrt{3}+1),\ b - a = 2,\ \hat{B} - \hat{A} = 30°.$$

Institutul politehnic, Brașov, 1961.

R. a) Substituind în membrul întîi,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha = 8\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha;$$

$$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha;\ 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2};$$

$$1+\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{4},\ \text{obținem}$$

$$\frac{8\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{4}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}.$$

b) Din $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, deducem

$$\frac{b-a}{2\sin\frac{B-A}{2}\cos\frac{B+A}{2}} = \frac{c}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{c}{2\cos\frac{B+A}{2}\sin\frac{B+A}{2}}.$$

Luînd primul raport cu al treilea, rezultă

$$\sin\frac{B+A}{2} = \frac{2(\sqrt{3}+1)\sin 15^\circ}{2} = (\sqrt{3}+1)\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Deci $\frac{B+A}{2} = 45^\circ$ și prin urmare $B = 60^\circ$, iar $A = 30^\circ$.

Laturile a, b au valorile:

$$a = \frac{c\sin A}{\sin C} = \frac{2(\sqrt{3}+1)\sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} = \sqrt{3}+1,$$

$$b = \frac{c\sin B}{\sin C} = \frac{2(\sqrt{3}+1)\sin 60^\circ}{\sin 90^\circ} = 3+\sqrt{3}.$$

305. a) Să se verifice identitatea

$$(\cos\alpha+\cos\beta)^2 + (\sin\alpha+\sin\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

b) Dacă într-un triunghi dreptunghic în A există relația

$$a+b = 3c$$

să se calculeze $\sin 2B$ și $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

Institutul politehnic, Brașov, 1955.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Se substituie $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ și $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

b) Ridicînd la pătrat egalitatea $a = 3c - b$ și ținînd seama că $a^2 = b^2 + c^2$, deducem $b = \frac{4c}{3}$ și, prin urmare, $a = \frac{5c}{3}$.

Rezultă: $\sin 2B = 2\sin B\cos B = 2\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a} = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$,

iar $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{\sin C}{1+\cos C} = \frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}} = \frac{1}{3}$.

306. Să se demonstreze trigonometric că triunghiul ABC, în care avem

$$2a = b + c \quad \text{și} \quad 2\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$$

este echilateral.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1951.

R. Din relația

$$\hat{B} + \hat{C} = 2\hat{A} \text{ rezultă } \hat{A} = 60° \text{ și } \hat{B} + \hat{C} = 120°.$$

Din teorema sinusurilor obținem

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{2a}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}.$$

Reținem proporția formată din primul și ultimul raport. Simplificînd cu a și înlocuind $\hat{A} = \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} = 60°$, obținem

$$\frac{1}{\sin 60°} = \frac{2}{2\sin 60°\cos\frac{B-C}{2}},$$

de unde rezultă

$$\cos\frac{B-C}{2} = 1 \quad \text{sau} \quad \hat{B} = \hat{C} = 60°.$$

Triunghiul ABC este, deci, echilateral.

Scanned with OKEN Scanner

307. Fie a, b, c laturile unui triunghi oarecare, iar A, B, C unghiurile respectiv opuse acestor laturi. Fie x, y, z trei unghiuri definite în felul următor

$$\cos x = \frac{a}{b+c}; \quad \cos y = \frac{b}{c+a}; \quad \cos z = \frac{c}{a+b}.$$

Să se arate că sînt satisfăcute următoarele identităţi:

a) $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} = 1$;

b) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$.

Institutul politehnic, Bucureşti, 1951.

R. a) Din formula $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ deducem

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{b+c-a}{b+c+a}}, \quad \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{c+a-b}{a+b+c}}, \quad \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \sqrt{\frac{a+b-c}{a+b+c}},$$

deci

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} = \frac{2(a+b+c)-(a+b+c)}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1.$$

b) Punînd $a+b+c = 2p$ avem

$$b+c-a = 2(p-a); \; c+a-b = 2(p-b) \text{ şi}$$
$$a+b-c = 2(p-c),$$

deci

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}},$$

iar

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}},$$

deci

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

308. Se dă un triunghi isoscel ABC $(AB = AC)$ cu baza $BC = 2a$. Se cere să se determine unghiul B astfel încît aria

Scanned with OKEN Scanner

laterală a corpului obținut prin rotația triunghiului ABC în jurul bazei BC, să fie egală cu aria sferei de rază a.

Institutul politehnic, București, 1951.

R. Notăm $AB = g$ și $AE = r$ (fig. 112). Avem

$$4\pi a^2 = 2\pi rg, \quad \text{sau} \quad 2a^2 = rg. \quad (1)$$

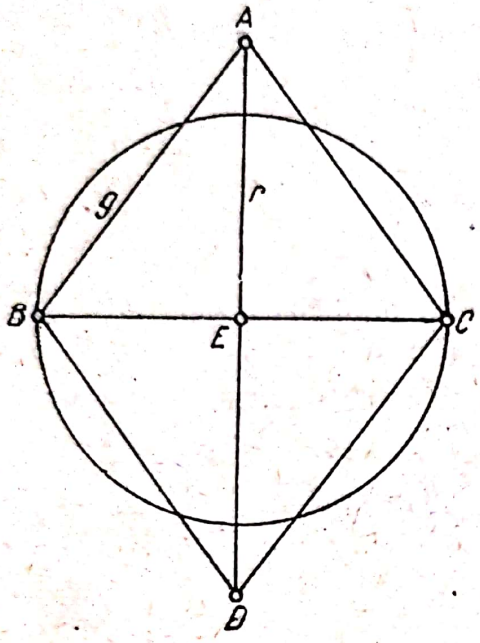


Fig. 112

În triunghiul ABE, avem

$$\operatorname{tg} B = \frac{r}{a}; \cos B = \frac{a}{g}.$$

Din relația (1) deducem valoarea lui r și g

$$r = \frac{2a^2}{g} = 2a\,\frac{a}{g} = 2a\cos B$$

și $$g = \frac{2a^2}{r} = 2a\,\frac{a}{r} = 2a\operatorname{cotg} B.$$

Revenind la relația (1), făcînd înlocuirile obținem

$$2a^2 = 2a\cos B \cdot 2a\operatorname{cotg} B, \text{ de unde } 2a^2 - 4a^2\cos B\operatorname{cotg} B = 0,$$

sau

$$\cos B\operatorname{cotg} B = \frac{1}{2},$$

de unde

$$2\cos B\,\frac{\cos B}{\sin B} = 1, \text{ deci } 2\cos^2 B - \sin B = 0.$$

Se mai poate scrie

$$2(1 - \sin^2 B) - \sin B = 0, \text{ de unde } \sin B = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Valoarea $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ nu poate conveni, deoarece este în afara variației sinusului. Rămîne să considerăm rădăcina

$$\sin B = \frac{-1+\sqrt{17}}{4} = \frac{3{,}12310}{4} = 0{,}78077;$$

sau

$$\lg \sin B = \bar{1}{,}89248, \text{ adică } \hat{B} = 51°19'42''.$$

Scanned with OKEN Scanner

309. Pe un coș de fabrică se află montat un paratrăsnet de lungime l dată. Un observator de înălțime h și așezat la distanța d de piciorul coșului, vede paratrăsnetul sub un unghi α; să se determine înălțimea vîrfului paratrăsnetului față de sol.

Institutul de construcții, București, 1951

R. Observăm că înălțimea căutată se compune din segmentele $\overline{AD} = h$ și $\overline{DV}$ (fig. 113). Să notăm $\widehat{DCV} = x$ și $\widehat{DCP} = y$; avem

$$x - y = \alpha.$$

Apoi $DV = d \operatorname{tg} x$ și $DP = d \operatorname{tg} y$, de unde

$$d(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y) = l,$$

sau

$$\frac{\sin \alpha}{\cos x \cos y} = \frac{l}{d}$$

sau $\dfrac{2 \sin \alpha}{\cos (x + y) + \cos \alpha} = \dfrac{l}{d}$;

de aici obținem

$$\cos (x + y) = \frac{2d}{l} \sin \alpha - \cos \alpha. \qquad (1)$$

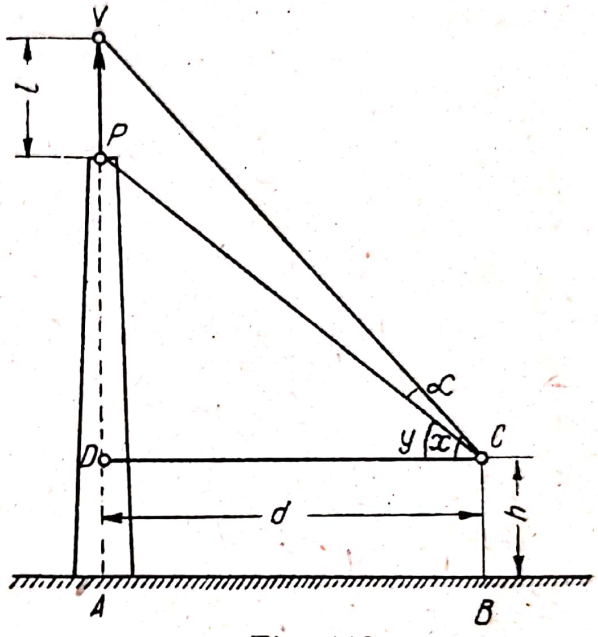


Fig. 113

Notînd $\dfrac{2d}{l} = \operatorname{ctg} \varphi$, relația (1) devine

$$\cos (x + y) = \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Cunoscînd acum suma și diferența unghiurilor x și y, adică $x + y$ și $x - y$, putem deduce valorile lui x și y și, în sfîrșit, înălțimea vîrfului paratrăsnetului față de sol

$$AV = h + d \operatorname{tg} x.$$

310. Pe un teren orizontal se află un turn și un stîlp, situați la depărtarea a unul de celălalt. Știind că de la piciorul stîlpului, turnul se vede sub unghiul 2α, de la piciorul turnului, stîlpul se vede sub unghiul α, iar de la mijlocul M al depărtării a, unghiurile sub care se văd cele două obiective sînt complementare, se cere să se calculeze înălțimea turnului și stîlpului.

Institutul de construcții, București, 1951.

R. Notăm înălțimea stîlpului cu x, $BS = x$, și înălțimea turnului cu y, $AT = y$; avem (fig. 114)

$$x = a \operatorname{tg} \alpha \text{ și } y = a \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Triunghiurile dreptunghice TAM și MBS fiind asemenea, avem

$$yx = \frac{a^2}{4} \qquad (1)$$

și înlocuind x și y prin valorile lor, relația (1) devine

$$a^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{a^2}{4} \quad \text{sau} \quad 4 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha = 1,$$

de unde

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{3}{4}$$

și, în sfîrșit, avem

$$x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{3}{4}a.$$

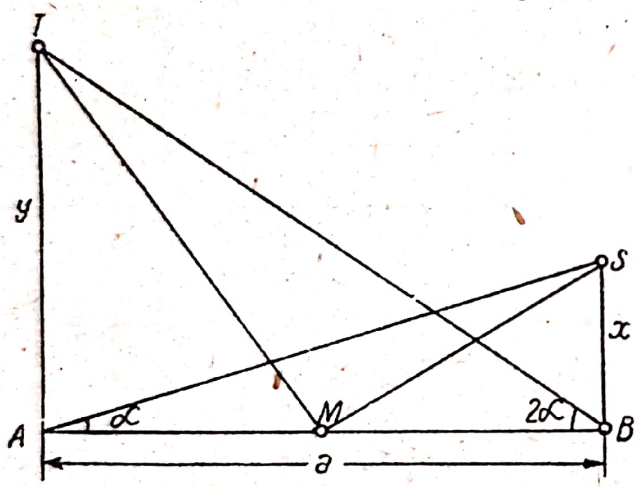


Fig. 114

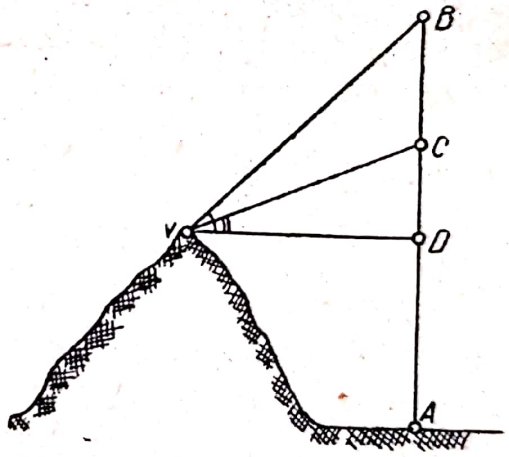


Fig. 115

311. Dintr-un balon B, staționar la înălțimea de 1 000 m, se vede vîrful V al unui deal sub un unghi de depresiune de 45° (unghiul format de direcția BV cu orizontul lui V).

Balonul coboară apoi, vertical, 300 m, pînă în C, de unde vîrful dealului se vede sub unghiul de depresiune de 22°30′. Se cere înălțimea dealului.

Institutul de construcții, București, 1952.

R. Avem $\overline{AB} = 1\,000$ m, $\overline{BC} = 300$ m. Din triunghiul BVD (fig. 115) obținem

$$\overline{VD} = \overline{BD} \operatorname{cotg} \alpha = (1\,000 - h) \operatorname{cotg} \alpha, \qquad (1)$$

iar din triunghiul CVD

$$\overline{VD} = \overline{CD} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = (700 - h) \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Comparînd (1) cu (2), avem

$$(1\,000 - h) \operatorname{cotg} \alpha = (700 - h) \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}. \qquad (3)$$

Pe de altă parte

$$\alpha = 45°; \quad \operatorname{cotg} \alpha = 1,$$

iar

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{cotg} \alpha \pm \sqrt{\operatorname{cotg}^2 \alpha + 1} = 1 \pm \sqrt{2};$$

în cazul nostru,

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Relația (3) devine

$$1\,000 - h = (700 - h)(1 + \sqrt{2}),$$

de unde

$$h = 700 - \frac{300}{\sqrt{2}} \approx 487 \text{ m}.$$

312. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia

$$E = \frac{a \cos A + b \cos B - c \cos C}{a \cos A + b \cos B + c \cos C},$$

a, b, c, A, B, C, fiind elementele unui triunghi.

Institutul de petrol și gaze, București, 1952.

R. Înlocuind $a = 2R \sin A$; $b = 2R \sin B$; $c = 2R \sin C$, expresia dată devine

$$E = \frac{\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C}{\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C} = \frac{2 \sin (A + B) \cos (A - B) - 2 \sin C \cos C}{2 \sin (A - B) \cos (A + B) + 2 \sin C \cos C}$$

sau

$$E = \frac{\sin C [\cos (A - B) - \cos C]}{\cos C [\sin C - \sin (A - B)]} = \frac{\sin C \cdot 2 \sin \frac{C - A + B}{2} \sin \frac{C + A - B}{2}}{\cos C \cdot 2 \sin \frac{C - A + B}{2} \cos \frac{C + A - B}{2}},$$

de unde

$$E = \frac{\sin C \cos A \cos B}{\cos C \cos A \sin B} = \operatorname{tg} C \operatorname{cotg} B.$$

313. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic există relaţia

$$\operatorname{cotg} \frac{B}{2} = \frac{a+c}{b},$$

şi reciproc, un triunghi în care există această relaţie este dreptunghic.

Institutul de petrol şi gaze, Bucureşti, 1952.

R. Înlocuind $\cos B = \frac{c}{a}$ în formula

$$\operatorname{cotg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos B}{1-\cos B}},$$

obţinem.

$$\operatorname{cotg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{c}{a}}{1-\frac{c}{a}}} = \sqrt{\frac{a+c}{a-c}} = \sqrt{\frac{(a+c)^2}{(a+c)(a-c)}} = \frac{a+c}{b}.$$

Reciproc, dacă într-un triunghi oarecare avem relaţia de mai sus, triunghiul este dreptunghic.

Presupunem că între elementele unui triunghi oarecare ABC avem relaţia

$$\operatorname{cotg} \frac{B}{2} = \frac{a+c}{b};$$

rezultă că vom avea şi

$$\operatorname{cotg} \frac{B}{2} = \frac{2R \sin A + 2R \sin C}{2R \sin B} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin B} = \frac{2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}}.$$

Simplificînd $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$ şi eliminînd numitorii, avem

$$\operatorname{cotg} \frac{B}{2} \sin \frac{B}{2} = \cos \frac{A-C}{2}$$

sau

$$\cos\frac{B}{2} = \cos\frac{A-C}{2},$$

de unde rezultă

$$\hat{B} = \hat{A} - \hat{C}, \text{ adică } \hat{A} = 90°.$$

314. Într-un trapez isoscel, baza mare este egală cu diagonala și baza mică cu laturile neparalele. Să se afle unghiurile trapezului și apoi baza mică, baza mare fiind dată egală cu a.

Institutul de petrol și gaze, București, 1952

R. Pentru că trapezul are diagonalele egale în lungime cu baza mare, rezultă că triunghiurile DBC și ACB sînt isoscele. Dacă notăm unghiul $C = \alpha$ (fig. 116), atunci latura DC este egală cu $2a\cos\alpha$. La fel avem $DC = AD = AB = 2a\cos\alpha$. Trapezul isoscel este inscriptibil și, prin urmare, i se poate aplica teorema lui Ptolemeu

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC} + \overline{AB}\cdot\overline{DC} = \overline{BD}\cdot\overline{AC}.$$

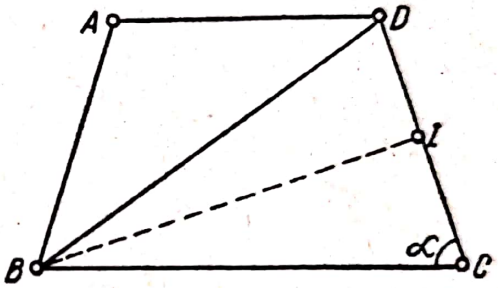


Fig. 116

Înlocuind $\overline{AD}$, $\overline{BC}$,... în funcție de a și α, obținem ecuația care permite să calculăm unghiurile trapezului

$$2a\cos\alpha\cdot a + 2a\cos\alpha\cdot 2a\cos\alpha = a\cdot a,$$

sau

$$4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0.$$

Valoarea lui α este dată de $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; rezultă

$$\hat{C} = \alpha = 72° \text{ și } \hat{D} = 180° - 72° = 108°,$$

iar baza mică este

$$\overline{AD} = \overline{AB} = \overline{DC} = 2a\cos\alpha = 2a\,\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

315. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia

$$E = \frac{a}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{b}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{c}{\sin^2\frac{C}{2}},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde a, b, c, A, B, C sînt elementele unui triunghi.

Institutul de petrol și gaze, București, 1952.

R. Scriem succesiv

$$E = \frac{a}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{b}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{c}{\sin^2\frac{C}{2}} = \frac{2R\sin A}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{2R\sin B}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{2R\sin C}{\sin^2\frac{C}{2}} =$$

$$= 2R\left(\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}}\right),$$

sau

$$E = 4R\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right) = 4R\left(\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right).$$

Înlocuim $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$, după care obținem

$$E = 4R\cos\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

Avînd în vedere că avem

$$\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} =$$

$$= \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2},$$

rezultă

$$E = 4R\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}.$$

316. Să se arate că un triunghi este isoscel dacă

$$a\operatorname{tg}A + b\operatorname{tg}B = (a+b)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C.$$

Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1954.

Scanned with OKEN Scanner

R. Înlocuind $\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$ și trecînd termenii cu factorul a în membrul întîi și pe cei cu factorul b în membrul al doilea, obținem

$$a\left[\operatorname{tg} A-\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right]=b\left[\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}-\operatorname{tg} B\right].$$

După ce înlocuim $a=2R\sin A$; $b=2R\sin B$ și diferențele din paranteze transformate în formule calculabile prin logaritmi, deducem

$$2R\sin A\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A\cos\frac{A+B}{2}}=2R\sin B\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}\cos B}.$$

După ce trecem totul în membrul întîi și facem unele simplificări, obținem

$$2R\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}(\operatorname{tg} A-\operatorname{tg} B)=0.$$

Egalitatea este adevărată numai dacă $\hat{A}=\hat{B}$, adică dacă triunghiul este isoscel.

317. În ce triunghi poate avea loc relația

$$b\sin B+c\sin C=\frac{a}{\sin A}.$$

Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1954.

R. Înlocuim în relația dată $a=2R\sin A$; $b=2R\sin B$ și $c=2R\sin C$. Obținem

$$\sin^2 B+\sin^2 C=1 \quad \text{sau} \quad \frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}=1.$$

După ce eliminăm numitorul, facem reducerile și transformăm suma de cosinusuri în produs, găsim condiția

$$\cos(B+C)\cos(B-C)=0.$$

Relația este adevărată în următoarele cazuri:

I) $B+C=90°$; atunci triunghiul este dreptunghic.

II) $B-C=90°$; triunghiul are diferența unghiurilor de la bază egală cu un unghi drept.

318. Să se rezolve un triunghi dreptunghic cunoscînd ipotenuza a și suma catetelor $b + c = s$. *Discuție.*

Institutul politehnic, Timișoara, 1954.

R. Înlocuim $b = a \sin B$ și $c = a \cos B$ în relația dată $b+c=s$ și obținem

$$a (\sin B + \cos B) = s$$

sau

$$\sin B + \sin (90° - B) = \frac{s}{a}.$$

Transformînd suma în produs, deducem

$$\cos (45° - B) = \frac{s}{a\sqrt{2}},$$

care ne dă unghiul $\hat{B}$ în funcție de elementele cunoscute a și s. O dată $\hat{B}$ cunoscut, obținem celelalte elemente

$$\hat{C} = 90° - \hat{B},\ b = a \sin B \text{ și } c = a \cos B.$$

Pentru ca problema să fie posibilă trebuie să avem

$$\frac{s}{a\sqrt{2}} \leqslant 1, \text{ adică } s \leqslant a\sqrt{2}.$$

Semnul egal corespunde cazului cînd triunghiul dreptunghic devine și isoscel.

319. Un alpinist face ascensiunea unui masiv. Drumul a fost parcurs în două etape egale ca lungime. Știind că prima etapă se face sub unghiul α, iar a doua etapă sub unghiul 2α, se cere unghiul α, cunoscînd înălțimea h a masivului și baza lui, b.

Institutul de construcții, București, 1955

R. Considerînd proiecțiile drumului pe bază și înălțime. (fig. 117) avem

$$\overline{AB} \cos \alpha + \overline{BC} \cos 2\alpha = \overline{AD} = b$$

și

$$\overline{AB} \sin \alpha + \overline{BC} \sin 2\alpha = \overline{CD} = h.$$

Scanned with OKEN Scanner

Împărțind membru cu membru aceste egalități și simplificînd cu $\overline{AB} = \overline{BC}$, obținem ecuația trigonometrică

$$\frac{\cos\alpha + \cos 2\alpha}{\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{b}{h},$$

sau

$$\frac{2\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{h},$$

de unde deducem

$$\operatorname{cotg}\frac{3\alpha}{2} = \frac{b}{h},$$

a cărei soluție este

$$\alpha = \frac{2}{3}\operatorname{arccotg}\frac{b}{h}.$$

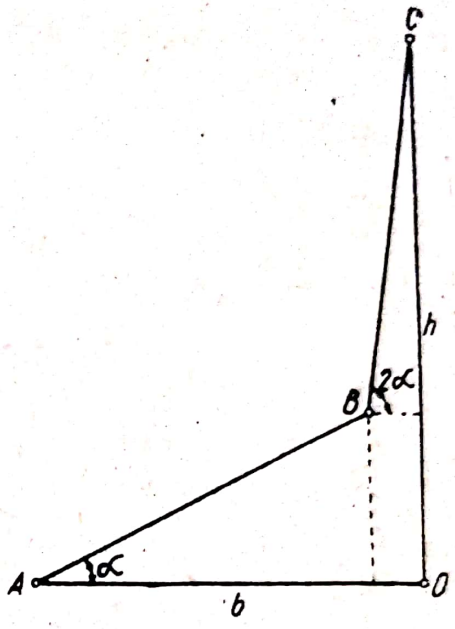


Fig. 117

320. Să se arate că dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi, atunci avem relația

$$\cos^2 A - \cos^2 B - \sin^2 C + 2\sin A \sin C \cos B = 0.$$

Institutul de transporturi și căi ferate, București, 1955.

R. Ținînd seama că $\sin(A + B) = \sin C$, expresia din membrul întîi se poate scrie succesiv

$$\frac{1+\cos 2A}{2} - \frac{1+\cos 2B}{2} + \sin C\,[2\sin A\cos B - \sin C] =$$

$$= \frac{\cos 2A - \cos 2B}{2} + \sin C\,[2\sin A\cos B - \sin(A+B)] =$$

$$= \sin(B-A)\sin(B+A) + \sin C\,[\sin A\cos B - \sin B\cos A] =$$

$$= \sin(B-A)\sin C - \sin C\sin(B-A) = 0.$$

321. Se dă un triunghi isoscel ABC $(\overline{AB} = \overline{AC})$. Să se rezolve triunghiul cunoscînd mediana $\overline{BB_1} = m$ și unghiul $B\hat{B}_1C = \alpha$.

Institutul de petrol și gaze, București, 1955.

R. Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul ABB_1 (fig. 118) avem

$$\frac{\overline{BB_1}}{\sin A} = \frac{\overline{AB}}{\sin (180° - \alpha)} = \frac{\overline{AB_1}}{\sin (\alpha - A)}. \qquad (1)$$

Avînd în vedere că $\overline{AB} = 2\overline{AB_1}$, din ultimele două rapoarte rezultă

$$2 \sin (\alpha - A) = \sin \alpha,$$

sau

$$\alpha - A = \arcsin \left(\frac{1}{2} \sin \alpha\right),$$

de unde

$$\hat{A} = \alpha - \arcsin \left(\frac{1}{2} \sin \alpha\right).$$

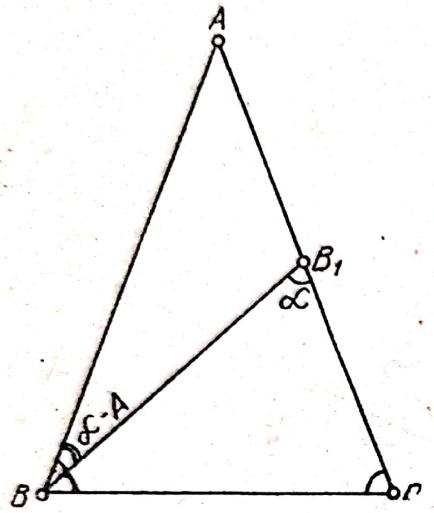


Fig. 118

Din primele două rapoarte (1) deducem

$$\overline{AB} = \frac{m \sin \alpha}{\sin A} = \frac{2m}{\sqrt{4 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha},$$

iar

$$\overline{BC} = 2\overline{AB} \sin \frac{A}{2}.$$

322. Dacă între unghiurile unui triunghi există relaţia

$$3 \sin^2 \frac{C}{2} = \sin A \cdot \sin B,$$

între laturile sale există atunci relaţia

$$2c = a + b.$$

Să se cerceteze dacă reciproca este adevărată.

Institutul de mine, Bucureşti, 1955.

R. Înlocuind $\sin^2 \frac{C}{2}$ prin $\frac{1 - \cos C}{2}$ şi $\sin A \sin B$ prin

$\frac{1}{2}[\cos (A - B) - \cos (A + B)]$ relaţia dată devine

$$1 + \cos (A - B) = 4 (1 - \cos C)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$4 \sin^2 \frac{C}{2} = \cos^2 \frac{A-B}{2}.$$

Dat fiind că $\sin \frac{C}{2}$ și $\cos \frac{A-B}{2}$ sînt pozitivi (A, B, C fiind unghiurile unui triunghi), rezultă, prin extragerea rădăcinii pătrate din ambii membrii, că

$$2 \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A-B}{2}.$$

Înmulțind ambii membri ai acestei egalități cu $\cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A+B}{2}$ deducem

$$2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

sau

$$2 \sin C = \sin A + \sin B.$$

Înlocuind

$$\sin A = \frac{a}{2R}; \quad \sin B = \frac{b}{2R} \text{ și } \sin C = \frac{c}{2R},$$

obținem relația

$$2c = a + b.$$

Modul cum a fost obținută ultima relație din cea dată ne arată că și reciproca este adevărată.

Într-adevăr, dacă avem $2c = a + b$, rezultă după înlocuirea lui a prin $2R \sin A$, b prin $2R \sin B$ și c prin $2R \sin C$, că

$$2 \sin C = \sin A + \sin B$$

sau

$$2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}.$$

Simplificăm ambii membri prin $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$ și obținem

$$2 \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A-B}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ridicînd ambii membri la pătrat, deducem

$$4 \sin^2 \frac{C}{2} = \cos^2 \frac{A-B}{2},$$

de unde rezultă

$$4 (1 - \cos C) = 1 + \cos (A - B).$$

Adăugînd în membrul întîi cos C și în membrul al doilea expresia echivalentă — cos $(A + B)$, obținem după unele simplificări

$$3 \sin^2 \frac{C}{2} = \sin A \sin B.$$

323. Să se demonstreze că orice triunghi în care există relația

$$\operatorname{tg} B = \frac{\cos (C - B)}{\sin A + \sin (C - B)}$$

este un triunghi dreptunghic.

Academia tehnică militară, 1955.

R. Numitorul membrului al doilea se transformă succesiv

$$\sin A + \sin (C - B) = 2 \sin \frac{A + C - B}{2} \cos \frac{A + B - C}{2} =$$

$$= 2 \sin (90° - B) \cos (90° - C) = 2 \cos B \sin C.$$

După înlocuire, egalitatea devine

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\cos (C - B)}{2 \cos B \sin C}.$$

Dezvoltînd, avem

$$\frac{2 \sin B \sin C - \cos B \cos C - \sin B \sin C}{2 \cos B \sin C} = \frac{-\cos (B + C)}{2 \cos B \sin C} =$$

$$= \frac{\cos A}{2 \cos B \sin C} = 0,$$

adică cos $A = 0$ de unde rezultă $\hat{A} = 90°$, adică triunghiul este dreptunghic.

324. Pentru a ajunge în vîrful muntelui AB se merge mai întîi pe cărarea CD egală cu 1 000 m și care face un unghi α cu orizontala apoi pe cărarea $\overline{DA} = \overline{CD} = 1\,000$ m, care face cu

orizontala un unghi 2α. Știind că $\overline{CB} = 500\ (1 + \sqrt{3})$ m, să se afle:

a) unghiul α;

b) înălțimea muntelui $\overline{AB}$

(unghiul ABC se află într-un plan vertical).

Academia tehnică militară, 1955.

R. Ducem DE paralelă la orizontala CB și DF paralelă la AB (fig. 119). Avem

$$\overline{CF} + \overline{DE} = \overline{CB},$$

ceea ce înseamnă că

$$1\,000 \cos \alpha + 1\,000 \cos 2\alpha = 500\ (1 + \sqrt{3})$$

sau

$$2 \cos 2\alpha + 2 \cos \alpha = 1 + \sqrt{3}.$$

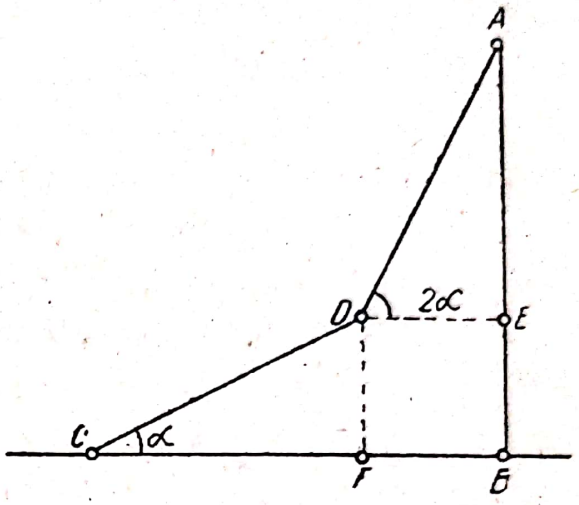


Fig. 119

Înlocuim $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ și obținem ecuația

$$4 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - (3 + \sqrt{3}) = 0$$

de unde

$$\cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2}}{4} = \frac{-1 \pm (2\sqrt{3}+1)}{4}$$

sau

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ și } \cos \alpha = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Soluția a doua este imposibilă pentru că avem $1 + \sqrt{3} > 2$. Rămîne $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pentru care avem $\alpha = 30°$, singura soluție convenabilă problemei. Pentru înălțimea muntelui avem

$$\overline{AB} = \overline{FD} + \overline{EA} = 1\,000 \sin \alpha + 1\,000 \sin 2\alpha = 500\,(1 + \sqrt{3}).$$

325. Un cerc cu raza unu se împarte în n părți egale ($n > 4$). Să notăm punctele de diviziune A_1, A_2, A_3,... Fie A_1' piciorul perpendicularei dusă din A_1 pe OA_2, A_1'' piciorul perpendicularei

dusă din A_1' pe OA_3 etc. Continuînd acest procedeu indefinit, să se calculeze lungimea liniei $A_1\ A_1'\ A_1''\ldots$ Caz particular $n = 6$.

Facultatea de chimie, Cluj, 1955.

R. Triunghiurile dreptunghice $A_1''OA_1'$ și $A_1'OA_1$ (fig. 120), avînd același unghi ascuțit egal cu $\frac{2\pi}{n}$, sînt asemenea. Rezultă

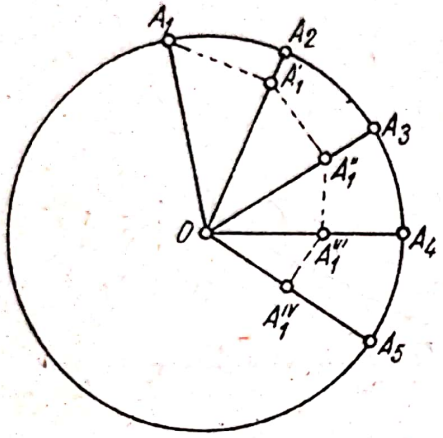


Fig. 120

$$\frac{\overline{A_1''A_1'}}{\overline{A_1'A_1}} = \frac{\overline{OA_1''}}{\overline{OA_1'}} = \frac{\overline{OA_1'}}{\overline{OA_1}} = \cos\frac{2\pi}{n}.$$

Laturile liniei frînte $A_1A_1'A_1''\ldots$ formează, așadar, o progresie geometrică descrescătoare cu rația $\cos\frac{2\pi}{n} < 1$.

Suma acestor laturi este deci

$$\overline{A_1A_1'} + \overline{A_1A_1'}\cos\frac{2\pi}{n} + \overline{A_1A_1'}\cos^2\frac{2\pi}{n} + \ldots$$

Aplicînd formula pentru suma progresiei geometrice infinită avem

$$L = \frac{\overline{A_1A_1'}}{1-\cos\frac{2\pi}{n}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{2\sin^2\frac{\pi}{n}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{2\sin^2\frac{\pi}{n}} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.$$

Pentru $n = 6$, obținem $L = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

326. Într-un triunghi ABC cele trei unghiuri așezate în ordinea $A < B < C$ sînt în progresie aritmetică de rație α, adică $A = B - \alpha$, $C = B + \alpha$, $\alpha > 0$. Se cere:

a) să se rezolve triunghiul, cunoscîndu-se perimetrul $2p$ și unghiul α. *Discuție*;

b) să se transforme expresiile obținute pentru laturi în formule calculabile prin logaritmi;

c) dîndu-se perimetrul $2p$ și aria S a triunghiului ABC să se arate că $\cos\alpha = \frac{p^2 + S\sqrt{3}}{2(p^2 - S\sqrt{3})}$.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1956

R. a) Avînd în vedere că $A + B + C = 180°$, rezultă $B = 60°$, astfel încît cele trei unghiuri ale triunghiului sînt $A = 60° - \alpha$; $B = 60°$ și $C = 60° + \alpha$.

Prin aplicarea teoremei sinusurilor, avem

$$\frac{a}{\sin(60° - \alpha)} = \frac{b}{\sin 60°} = \frac{c}{\sin(60° + \alpha)} = \frac{2p}{\sin 60° (1 + 2\cos\alpha)},$$

de unde deducem

$$a = \frac{2p \sin(60° - \alpha)}{\sin 60° (1 + 2\cos\alpha)}; \quad b = \frac{2p}{1 + 2\cos\alpha} \text{ și } c = \frac{2p \sin(60° + \alpha)}{\sin 60° (1 + 2\cos\alpha)},$$

formule care dau laturile triunghiului în funcție de $2p$ și unghiul α. Triunghiul poate fi rezolvat numai dacă $\alpha < 60°$. În cazul cînd se dă $\alpha \geqslant 60°$, un astfel de triunghi nu există.

b) Pentru a obține expresiile laturilor ca formule calculabile prin logaritmi, transformăm $1 + 2\cos\alpha = 2\left(\frac{1}{2} + \cos\alpha\right) =$

$= 2(\cos 60° + \cos\alpha) = 4\cos\frac{60° + \alpha}{2}\cos\frac{60° - \alpha}{2}$ și $\sin(60° - \alpha) =$

$= 2\sin\frac{60° - \alpha}{2}\cos\frac{60° - \alpha}{2}$.

Înlocuind mai sus, obținem

$$a = \frac{2p \sin\frac{60° - \alpha}{2}}{\sqrt{3}\cos\frac{60° + \alpha}{2}}; \quad b = \frac{p}{2\cos\frac{60° + \alpha}{2}\cos\frac{60° - \alpha}{2}}; \quad c = \frac{2p \sin\frac{60° + \alpha}{2}}{\sqrt{3}\cos\frac{60° - \alpha}{2}}.$$

c) După ce înlocuim în expresia $S = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2\sin(A + C)}$ pe b, A și C prin valorile obținute la a), obținem

$$S = \frac{4p^2}{2(1 + 2\cos\alpha)^2} \cdot \frac{\sin(60° + \alpha)\sin(60° - \alpha)}{\sin 120°} = \frac{4p^2(\sin^2 60° - \sin^2\alpha)}{\sqrt{3}(1 + 2\cos\alpha)^2}$$

sau

$$S = \frac{p^2(3 - 4\sin^2\alpha)}{\sqrt{3}(1 + 2\cos\alpha)^2} = \frac{p^2(4\cos^2\alpha - 1)}{\sqrt{3}(4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1)}.$$

Scriind sub o altă formă, avem

$$\frac{p^2}{4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1} = \frac{S\sqrt{3}}{4\cos^2\alpha - 1} = \frac{p^2 + S\sqrt{3}}{8\cos^2\alpha + 4\cos\alpha} = \frac{p^2 - S\sqrt{3}}{4\cos\alpha + 2}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\frac{8\cos^2\alpha + 4\cos\alpha}{4\cdot\cos\alpha + 2} = \frac{p^2 + S\sqrt{3}}{p^2 - S\sqrt{3}};$$

de unde rezultă

$$\frac{4\cos\alpha(2\cos\alpha + 1)}{2(2\cos\alpha + 1)} = \frac{p^2 + S\sqrt{3}}{p^2 - S\sqrt{3}}$$

$$2\cos\alpha = \frac{p^2 + S\sqrt{3}}{p^2 - S\sqrt{3}}$$

sau în sfîrşit

$$\cos\alpha = \frac{p^2 + S\sqrt{3}}{2(p^2 - S\sqrt{3})},$$

ceea ce trebuia dovedit.

B. Exerciţii şi probleme urmate de răspunsuri şi indicaţii

Şcoala de poduri şi şosele Bucureşti, Institutul Politehnic Timişoara, Institutul Politehnic Bucureşti, anii 1895—1945

327. Să se calculeze: sin 840°, cos 840°, tg 840°, cotg 840°.

R. $\sin 840° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 840° = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} 840° = -\sqrt{3}$; $\operatorname{cotg} 840° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

328. Se dă: $\sin a = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} b = \frac{3}{4}$. Să se calculeze $\sin(a + b)$.

R. $\sin(a + b) = \pm\frac{16}{25} \pm \frac{9}{25}$.

329. Cunoscîndu-se $\sin x = \sqrt{2} - 1$, să se afle $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$, $\operatorname{cotg} 2x$.

R. $\sin 2x = \pm 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2\sqrt{2} - 2}$; $\cos 2x = 4\sqrt{2} - 5$; $\operatorname{tg} 2x = \pm\frac{2(3 + \sqrt{2})\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{7}$; $\operatorname{cotg} 2x = \pm\frac{(3 - \sqrt{2})\sqrt{2\sqrt{2} + 2}}{4}$.

330. Se dă $\operatorname{tg} x = 1 - \sqrt{2}$. Să se calculeze $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$ şi să se deducă expresia generală a lui x.

R. $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg} 2x = -1$;

$$x = n \cdot 180° - 22°30'.$$

331. Se dă $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin y = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. Să se calculeze $\sin(x - y)$ şi să se dea expresia generală a arcului $x - y$.

R. Avem

$$\sin(x - y) = \frac{\pm(\sqrt{3}+1) \pm (\sqrt{3}-1)}{4}.$$

adică

$$\sin(x - y) = \pm\frac{1}{2} \text{ sau } \sin(x - y) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

care dau

$$x - y = n \cdot 360° \pm 30°$$

sau

$$x - y = (2n + 1)180° \mp 30° \text{ etc.}$$

332. Se dă

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}, \quad \cos 2y = \sqrt{\frac{a+b}{2a}}.$$

Să se găsească o relaţie între x şi y.

R. $x \pm 2y = n \cdot 180°$.

333. Se dă $\cos a = -1$. Să se calculeze valorile

$$\cos\frac{1}{6}a, \quad \sin\frac{1}{6}a, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{6}a.$$

R. Din relaţia dată găsim $a = k \cdot 360° + 180°$ şi prin urmare $\frac{a}{6} = k \cdot 60° + 30°$. Dînd lui k diferite valori, obţinem

$$\sin\frac{a}{6} = \pm\frac{1}{2} \text{ sau } \pm 1; \quad \cos\frac{a}{6} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ sau } 0;$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{6} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

334. Să se calculeze cea mai mică valoare a lui x din relația

$$\operatorname{ctg} x = \sqrt[3]{\frac{0{,}1 \sin 15°36'17''}{\cos^2 32°15'20''}}.$$

R. $x = 71°28'34''$.

335. Să se arate că expresia $y = A \sin x + B \cos x$ se poate pune sub forma $y = a \sin (x + u)$; să se calculeze a și u prin formule logaritmice.

Aplicație: $A = 535{,}34$ m; $B = 273{,}55$ m.

R. Se scrie

$$y = A\left(\sin x + \frac{B}{A} \cos x\right);$$

după ce punem $\frac{B}{A} = \operatorname{tg} u$ și $\frac{A}{\cos u} = a$, expresia devine

$$y = a \sin (x + u).$$

Pentru valorile numerice date lui A și B obținem

$$u = 27°3'58''$$ și $$a = 601.$$

336. Într-un triunghi ABC se dă

$$\sin B = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \sin C = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}};$$

să se calculeze $\sin (B + C)$, $\sin (B - C)$ și $\cos (B - C)$; să se deducă unghiurile triunghiului.

R. Sînt două cazuri

$$1)\ \sin (B+C) = 1;\ \sin (B-C) = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \cos (B-C) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$A = 90°;\ B = 67°30';\ C = 22°30';$$

și

$$\sin (B+C) = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \sin (B-C) = 1;\ \cos (B-C) = 0,$$

$$A = 45°;\ B = 112°30',\ C = 22°30'.$$

337. Să se calculeze cea mai mică valoare a unghiului x dat de relația

$$\cos^2 x = \frac{0{,}34 \operatorname{tg}^2 15°42'30''}{1 + \sin 27°}.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. $x = 82°11'$.

338. Plecînd de la $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ şi $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, să se calculeze din aproape în aproape $\cos \frac{\pi}{8}$; $\sin \frac{\pi}{8}$; $\cos \frac{\pi}{16}$; $\sin \frac{\pi}{16}$; $\cos \frac{\pi}{32}$ şi aşa mai departe.

R.

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \quad \cos \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2};$$

$$\cos \frac{\pi}{32} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}; \quad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$\sin \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}; \quad \sin \frac{\pi}{32} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}.$$

339. Să se elimine θ între ecuaţiile

$$x = a \cos \theta \cos 2\theta, \quad y = b \sin \theta \sin 2\theta.$$

R. Avem

$2x = a(\cos \theta + \cos 3\theta)$ şi $2y = b(\cos \theta - \cos 3\theta)$, care dau

$$\cos \theta = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \text{ şi } \cos 3\theta = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}.$$

Rezultatul eliminării se obţine înlocuind $\cos \theta$ şi $\cos 3\theta$ prin expresiile lor în formula cunoscută

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta.$$

340. Să se determine maximul funcţiei

$$y = 2 \sin x + 3 \cos x.$$

R. Dacă punem $\frac{3}{2} = \operatorname{tg} \varphi$, atunci

$$y = \frac{2}{\cos \varphi} \cdot \sin (x + \varphi),$$

iar valoarea maximă a lui y are loc cînd $\sin(x+\varphi)$ este maxim, adică 1. Maximul funcției este, deci,

$$y = \frac{2}{\cos\varphi} = \sqrt{13}.$$

341. Cunoscînd

$$\sin 216° = \sin 576° = \sin 684° = -\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

să se calculeze

$$x = \sin 108°,\ y = \sin 288°,\ z = \sin 342°,\ w = \sin 522°$$

R. $x = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$; $y = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$;

$$z = -\frac{\sqrt{5}-1}{4};\ w = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

342. Să se exprime în radiani arcul de 157°30′ și să i se calculeze funcțiile trigonometrice.

R. 157°30′=2,748894 rad; $\sin 157°30' = \sin 22°30' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$;

$$\cos 157°30' = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\ \operatorname{tg} 157°30' = 1-\sqrt{2}.$$

343. Să se facă calculabile prin logaritmi expresiile:

$$a)\ \frac{\sin a+\cos b}{\cos a-\sin b};\quad b)\ \frac{1+\sin a}{1-\operatorname{tg} a}.$$

R. a) $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a+b}{2}\right)$; b) $\frac{\sqrt{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\cos a}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}$.

344. Să se demonstreze identitățile:

a) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 2\frac{3+\cos 4x}{1-\cos 4x}$;

b) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}$.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Avem

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} =$$

$$= 2\,\frac{2 - \sin^2 2x}{\sin^2 2x} = 2\,\frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x};$$

b) $\dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \cdot \dfrac{\cos x}{1 + \cos x} = \dfrac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} \cdot \dfrac{\cos x}{2 \cos^2 \dfrac{x}{2}} = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

345. Să se arate că

$$\sin(2a + x) + \sin(2b + x) + \sin(2c + x) - \sin(2a + 2b + 2c + 3x) = 4 \sin(a + b + x) \sin(b + c + x) \sin(c + a + x)$$

R. Grupăm termenii din membrul întîi astfel

$$[\sin(2a + x) + \sin(2b + x)] - [\sin(2a + 2b + 2c + 3x) - \sin(2c + x)]$$

și înlocuim parantezele mari prin formule calculabile prin logaritmi.

346. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia

$$E = \sin A + \sin B - \sin C,$$

în care $A + B + C = 180°$.

R. Avem

$$E = 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} =$$

$$= 2 \cos \frac{C}{2} \left[\cos \frac{A - B}{2} - \cos \frac{A + B}{2}\right] = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

347. Să se verifice identitățile

$$\sin(a - b) \sin(a + b) + \sin(b - c) \sin(b + c) + \sin(c - a) \sin(c + a) = 0,$$

$$\sin(a - b) \cos(a + b) + \sin(b - c) \cos(b + c) + \sin(c - a) \cos(c + a) = 0.$$

R. Se înlocuiesc produsele de forma $\sin p \sin q$; $\sin p \cos q$, prin expresiile lor echivalente

$$\frac{\cos(p - q) - \cos(p + q)}{2}; \quad \frac{\sin(p + q) + \sin(p - q)}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

348. Știind că $\operatorname{tg} a$ și $\operatorname{tg} b$ sînt rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$, să se calculeze, în funcție de p și q, valoarea expresiei

$$E = \sin^2 (a+b) + p \sin (a + b) \cos (a + b) + q \cos^2 (a + b).$$

R. Înlocuim în E valoarea lui p prin $-(\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b)=-\frac{\sin (a+b)}{\cos a \cos b}$ și a lui q prin $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b$. Obținem

$$E = \sin^2 (a + b) \left[1 - \frac{\cos (a + b)}{\cos a \cos b}\right] + \frac{\sin a \sin b \cos^2 (a + b)}{\cos a \cos b} =$$

$$= \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b} = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = q.$$

349. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia

$$E = \sin 2(b - a) + \sin 2(c - b) + \sin 2 (a - c).$$

R. $E = 4 \sin (c - a) \sin (a - b) \sin (b - c)$.

350. Să se arate că expresia

$$E = \cos (a+b)\sin (b-a)+\cos (b+c) \sin (c-b)+\cos (c+a) \sin (a- c)$$

este identic nulă.

R. Se înlocuiesc produsele de sinusuri prin cosinusuri, pe baza formulei

$$\sin p \cos q = \frac{\sin (p + q) + \sin (p - q)}{2}.$$

351. Să se facă calculabile prin logaritmi expresiile

$$E_1 = 1 + \sin a; \quad E_2 = \frac{\sin a + \cos b}{\cos a + \cos b}.$$

R. $E_1 = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$; $E_2 = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b-a}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b+a}{2}\right)}{\cos\frac{b+a}{2} \cos\frac{b-a}{2}}$.

352. Să se transforme expresia $E = (4 \cos^2 a - 1) \sin a$ într-o expresie calculabilă prin logaritmi.

R. $E = 4 \sin a \sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + a\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

353. Să se arate că expresia

$$E = 2(\cos^6 x + \sin^6 x) - 3(\cos^4 x + \sin^4 x)$$

are o valoare constantă.

R. $E = 2[(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)] -$

$- 3[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x] = -1.$

354. Să se verifice identitatea $\dfrac{\cos a + \cos 3a}{\sin 3a - \sin a} = \operatorname{ctg} a.$

R. Avem

$$\frac{\cos a + \cos 3a}{\sin 3a - \sin a} = \frac{2\cos 2a \cos a}{2\sin a \cos 2a} = \operatorname{ctg} a.$$

355. Să se verifice identitatea

$$\sin 5a \sin a - \sin 7a \sin 3a = \sin^2 3a - \sin^2 5a.$$

R. Avem

$$\sin 5a \sin a - \sin 7a \sin 3a =$$

$$= \frac{\cos 4a - \cos 6a}{2} - \frac{\cos 4a - \cos 10a}{2} = \frac{\cos 10a - \cos 6a}{2} =$$

$$= \frac{1 - 2\sin^2 5a - 1 + 2\sin^2 3a}{2} = \sin^2 3a - \sin^2 5a.$$

356. Să se demonstreze identitatea

$$\sin 3a + \sin a = \frac{4 \sin a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}.$$

R. Avem

$$\sin 3a + \sin a = 4 \sin a (1 - \sin^2 a) = \frac{4 \sin a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}.$$

357. Să se facă calculabilă prin logaritmi și să se calculeze valoarea numerică a expresiei

$$E = \sin \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \frac{5\pi}{12}.$$

Să se determine arcul x în radiani pentru care $\operatorname{tg} x = E$.

R. Se observă că se poate scrie

$$E = \sin \frac{\pi}{12} + \sin \frac{2\pi}{12} + \sin \frac{3\pi}{12} + \sin \frac{4\pi}{12} + \sin \frac{5\pi}{12}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțind ambii membri cu $2 \sin \frac{\pi}{24}$, avem

$$2E \sin \frac{\pi}{24} = 2 \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{\pi}{12} + 2 \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{2\pi}{12} + 2 \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{3\pi}{12} +$$

$$+ 2 \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{4\pi}{12} + 2 \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{12}.$$

Transformăm produsele de sinusuri în diferențe de cosinusuri, și, după reduceri și simplificări, obținem

$$E = \frac{\sin \frac{5\pi}{24}}{\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{24}}.$$

358. Să se verifice identitățile

$$16 \cos^5 x = \cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x;$$

$$16 \sin^5 x = \sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x.$$

R. Se înlocuiesc, în membrul al doilea, $\sin 5x$, $\cos 5x$, $\sin 3x$, $\cos 3x$ exprimați în funcție de $\sin x$ și $\cos x$.

359. Fie

$$A' = A \cos^2 a + B \sin^2 a - C \sin 2a,$$

$$B' = A \sin^2 a + B \cos^2 a + C \sin 2a,$$

$$C' = (A - B) \sin a \cos a + C (\cos^2 a - \sin^2 a);$$

să se arate că dacă $C' = 0$, A' și B' sînt rădăcinile ecuației

$$X^2 - (A + B) X + (AB - C^2) = 0.$$

R. Avem

$$A' + B' = A + B,$$

iar

$$A'B' = (A - B)^2 \sin^2 a \cos^2 a + C (A - B) \sin 2a \cos 2a +$$

$$+ C^2 \cos^2 2a + (AB - C^2) = C'^2 + (AB - C^2).$$

În cazul cînd $C' = 0$, expresia $A'B'$ devine egală cu $AB - C^2$. Rezultă de aici că A' și B' sînt rădăcinile ecuației

$$X^2 - (A + B) X + (AB - C^2) = 0.$$

360. Să se demonstreze identitatea

$$y = \frac{\operatorname{tg}(x-a) + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x+a)}{\operatorname{tg}(x-a)\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)} = \frac{\cos 2a + 3\cos 2x + 2}{\cos 2a - \cos 2x}.$$

Să se determine a astfel ca y să fie independent de x.

$$y = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos(x-a)\cos(x+a)}}{\frac{\sin(x-a)\sin x \sin(x+a)}{\cos x \cos(x-a)\cos(x+a)}} = \frac{\cos(x-a)\cos(x+a) + 2\cos^2 x}{\sin(x-a)\sin(x+a)} =$$

$$\frac{\frac{\cos 2x + \cos 2a}{2} + 2\cos^2 x}{\sin(x-a)\sin(x+a)} = \frac{\cos 2x + \cos 2a + 4\cos^2 x}{2\sin(x-a)\sin(x+a)} = \frac{2 + \cos 2a + 3\cos 2x}{\cos 2a - \cos 2x}.$$

Pentru a găsi condiţia ca y să fie independent de x, ne bazăm pe proprietatea că fracţia $\frac{mx+n}{m'x+n'}$ nu depinde de x atunci cînd $\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$. De aceea, y nu depinde de x dacă avem

$$\frac{2 + \cos 2a}{\cos 2a} = \frac{+3}{-1},$$

adică pentru cazul cînd $\cos 2a = -\frac{1}{2}$.

361. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin x - \cos x - \operatorname{tg} x = -1.$$

R. Ecuaţia se scrie sub forma

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x} - (\cos x - \sin x) = 0.$$

Soluţiile ecuaţiei sînt date de $\cos x - \sin x = 0$ cu soluţia generală $x' = n\pi + \frac{\pi}{4}$ şi de $\cos x = 1$ cu soluţia generală $x'' = 2n\pi$.

362. Să se rezolve ecuaţia

$$2\sin x + 2\cos x = \frac{1}{\cos x}$$

şi să se determine toate arcele cuprinse între 0 şi π.

R. $x = \frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$.

363. Să se rezolve ecuația

$$9 \sin 4x - 4 \operatorname{tg} 2x + 9 \sin 2x - 4 \operatorname{tg} x = 0.$$

R. $x' = n \cdot 60°$; $x'' = n \cdot 180° \pm 35°15'47''$.

364. Să se determine arcele care satisfac relația

$$(1 - \sin x)\sqrt{3} = \cos x.$$

R. Ecuația se scrie $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{3}$. Dacă substituim $\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60°$, ecuația devine $\cos (x - 60°) = \cos 30°$, ale cărei soluții sînt

$$x' = n \cdot 360° + 90°, \quad x'' = m \cdot 360° + 30°$$

365. Să se rezolve ecuația

$$\sin 7x + \sin 5x + \sin 3x + \sin x = 0.$$

R. Se grupează termenii astfel

$$(\sin 7x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 3x) = 0,$$

după care se transformă sumele în produse. Soluțiile ecuației sînt

$$x' = \frac{n\pi}{4}; \quad x'' = n\pi \pm \frac{\pi}{4}; \quad x''' = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}.$$

366. Să se rezolve ecuația

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

R. Se pune $b = a \operatorname{tg} u$, după care ecuația devine

$$\sin (x + u) = \frac{\pm c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(se ia semnul plus cînd a și b sînt de același semn, și minus, în caz contrar). Obținem

$$x = \operatorname{Arcsin} \frac{\pm c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \operatorname{Arctg} \frac{b}{a}.$$

367. Să se rezolve ecuația

$$\sin 11x - 2\sqrt{2} \cos 5x \sin 6x + \sin x = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Ecuația se scrie

$$2(1-\sqrt{2})\sin 6x\cos 5x=0,$$

ale cărei soluții sînt

$$x'=\frac{n\pi}{6};\quad x''=\frac{(2n+1)\pi}{10}.$$

368. Să se discute rădăcinile ecuației trigonometrice

$$(p+1)\cos 2x+2p^2\sin x+1-3p=0$$

pentru diferitele valori ale parametrului p și să se calculeze valorile lui x cînd $p=1{,}5$.

R. Ecuația dată se desface în: $\sin x'=p-1$ și $\sin x''=\frac{1}{p+1}$. Pentru $p\leqslant -2$ arcele x' sînt imaginare și x'' reale; pentru $-2<p<0$, x' și x'' sînt imaginare; pentru $0\leqslant p\leqslant 2$, x' și x'' sînt reale; pentru $p>2$, arcele x' sînt imaginare, iar x'' reale.

Pentru $p=1{,}5$, avem $\sin x'=\frac{1}{2}$ și $\sin x''=\frac{2}{5}$ cu soluțiile

$$x_1'=n\cdot 360^\circ+30^\circ;\quad x_2'=n\cdot 360^\circ+150^\circ;$$

$$x_1''=m\cdot 360^\circ+23^\circ34'44'';\quad x_2''=n\cdot 360^\circ+156^\circ25'16''.$$

369. Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{cotg} x+\operatorname{cotg} 2x+\operatorname{cotg} 3x+\operatorname{cotg} 4x=0.$$

R. Ecuația se reduce la

$$\frac{\sin 5x\,(5-8\sin^2 x)}{\sin 3x\sin 4x}=0,$$

care se desface în $\sin 5x=0$ cu soluția $x'=\frac{n\pi}{5}$ (unde $n\neq \mathfrak{M}5$ pentru că altminteri x' ar fi un număr întreg de π care face ca și numitorul să fie nul) și în $\sin x=\pm\sqrt{\frac{5}{8}}$ cu soluția generală $x''=n\cdot 180^\circ\pm 38^\circ41'$.

370. Să se rezolve ecuația

$$\cos x-\sin x+2=2\cos^2 x+\sin 2x.$$

R. Ecuația dată se scrie succesiv

$$\cos x-\sin x+2\sin^2 x-2\sin x\cos x=0,$$

$$\cos x-\sin x+2\sin x(\sin x-\cos x)=0$$

sau

$$(\cos x - \sin x)(1 - 2\sin x) = 0,$$

ale cărei soluții sînt date de ecuațiile

I) $\cos x - \sin x = 0$, cu soluția $x' = k\pi + \frac{\pi}{4}$;

II) $1 - 2\sin x = 0$ cu soluțiile $x'' = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ și $x''' = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$.

371. Numărul m fiind un parametru variabil, să se discute ecuația

$$\operatorname{tg} x = 2m \sin \frac{1}{2} x.$$

R. Ecuația se desface în $\sin \frac{x}{2} = 0$ cu soluția $x' = 2n\pi$ și $2m\cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} - m = 0$, care se rezolvă ca o ecuație de gradul al doilea.

Pentru discuție, punem $\cos \frac{x}{2} = \frac{1 - z}{1 + z}$ și obținem ecuația

$$(m + 1) z^2 - 6mz + (m - 1) = 0.$$

Cînd z variază de la 0 la ∞, $\cos \frac{x}{2}$ are valoarea cuprinsă între $+1$ și -1. Discuția urmărește deci valorile lui m pentru care rădăcinile z sînt pozitive.

372. Se dă expresia

$$\sin^6 x + \cos^6 x + k(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

și se cere:

a) să se determine k astfel ca expresia dată să fie independentă de x;

b) să se găsească condiția pentru ca expresia să se anuleze pentru valorile reale ale lui x;

c) să se rezolve ecuația

$$\sin^6 x + \cos^6 x - 0{,}7(\sin^4 x + \cos^4 x) = 0.$$

R. a) Avem

$$E = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) +$$

$$+ k[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x] = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x +$$

$$+ k(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x + k(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) =$$

$$= (1 + k) - (2k + 3)\sin^2 x \cos^2 x.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca E să nu depindă de x, trebuie să avem $k = -\frac{3}{2}$.

b) Valorile lui x, pentru care E se anulează, sînt date de ecuaţia $\sin 2x = \pm 2\sqrt{\frac{1+k}{2k+3}}$. Pentru ca x să fie real, trebuie să avem simultan

$$\frac{1+k}{2k+3} \geqslant 0 \text{ şi } \frac{4(1+k)}{2k+3} \leqslant 1,$$

adică trebuie să avem $-1 \leqslant k \leqslant -\frac{1}{2}$.

c) Pentru $k = -0{,}7$, $\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = n \cdot 90° \pm 30°$.

373. Să se rezolve ecuaţia $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x = 2$.

R. Soluţiile sînt date de $\operatorname{tg} x_1 = 1$, $\operatorname{tg} x_2 = 1 - \sqrt{2}$ şi $\operatorname{tg} x_3 = 1 + \sqrt{2}$; $x_1 = k \cdot 180° + 45°$, $x_2 = k \cdot 180° - 22°30'$, $x_3 = k \cdot 180° + 67°30'$.

374. Se dă ecuaţia

$$2 \cos 2x + 2(m-2) \sin x - (m-1) = 0.$$

a) Să se transforme într-o ecuaţie de gradul al doilea în raport cu $\sin x$ şi să se calculeze cele două valori ale lui $\sin x$.

b) Să se determine pentru ce valori ale parametrului m ambele valori aflate pentru $\sin x$ sînt acceptabile.

c) Să se calculeze în grade, minute şi secunde valorile lui x, în cazul $m = \frac{11}{3}$.

R. a) $4 \sin^2 x - 2(m-2) \sin x + m - 3 = 0$;

$$\sin x' = \frac{m-3}{2}, \quad \sin x'' = \frac{1}{2}.$$

b) $1 \leqslant m \leqslant 5$.

c) $x_1' = n \cdot 360° + 19°28'17''$;
$x_2' = n \cdot 360° + 160°31'43''$;
$x_1'' = n \cdot 360° + 30°$;
$x_2'' = n \cdot 360° + 150°$.

375. Dacă x este necunoscuta, iar p un parametru, să se rezolve ecuaţia trigonometrică

$$2(p+1) \cos 2x + 4p \sin x - 3p - 1 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

adică

a) să se deducă ecuația de gradul al doilea în raport cu sin x și să se calculeze cele două valori ale lui sin x;

b) să se determine valorile parametrului p pentru care valorile corespunzătoare ale lui x sînt reale;

c) să se calculeze în grade, minute și secunde, valorile lui x în cazul particular $p = -\frac{1}{7}$.

R. a) $4(p+1)\sin^2 x - 4p \sin x + p - 1 = 0$, $\sin x_1 = \frac{1}{2}$; $\sin x_2 = \frac{p-1}{2(p+1)}$.

b) $p \leqslant -3$ sau $p \geqslant -\frac{1}{3}$.

c) $x_1' = k \cdot 360° + 30°$, $x_1'' = k \cdot 360° + 150°$

$x_2' = k \cdot 360° - 41°48'38''$, $x_2'' = k \cdot 360° + 221°48'38''$

376. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 2 \sin x = 0.$$

R. $x' = n\pi$; $x'' = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$.

377. Să se rezolve ecuația

$$\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0.$$

R. $x' = \frac{2n\pi}{7}$, $x'' = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, $x''' = (2n+1)\pi$.

378. Să se rezolve ecuația

$$\sin x \operatorname{tg} x = 2.$$

R. $x = n \cdot 360° \pm 65°31'51''$.

379. Se dă ecuația trigonometrică

$$(p-2)\cos 2x + 2(p^2-3)\sin x - 3p - 2 = 0,$$

în care x este necunoscuta, iar p un parametru.

a) Să se verifice că dacă $p = -\frac{3}{2}$ ecuația are rădăcinile reale; să se calculeze valorile lui x în acest caz particular.

b) Să se studieze cazul cînd ecuația are rădăcini reale, pentru diferitele valori ale parametrului p.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Pentru $p = -\frac{3}{2}$, avem $\sin x_1 = \frac{1}{2}$ și $\sin x_2 = -\frac{2}{7}$, de unde

$$x_1' = k \cdot 360° + 30° \text{ și } x_1'' = k \cdot 360° + 150°;$$

$$x_2' = k \cdot 360° - 16°36'6'' \text{ și } x_2'' = k \cdot 360° + 196°36'6''$$

b) Pentru $p < -3$, avem x_1 imaginar, x_2 real; pentru $-3 \leqslant p \leqslant -1$, ambele arce sînt reale; pentru $-1 < p \leqslant 1$, un singur arc este real; pentru $1 < p < 3$, ambele arce sînt imaginare; pentru $p \geqslant 3$ un singur arc este real.

380. Să se rezolve și discute sistemul de ecuații

$$\sin x + \sin y = a, \cos x + \cos y = b,$$

unde $a > 0$, $b > 0$.

R. Avem

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a \text{ și } 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = b.$$

Prin împărțire, obținem $\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{a}{b}$, care dă $x+y=2 \operatorname{Arc tg} \frac{a}{b}$.

Prin înlocuirea lui $x + y$ în una din celelalte două ecuații, obținem $x - y$. Condiția de posibilitate în cazul dat este

$$a \leqslant 2 \text{ și } b \leqslant 2.$$

381. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\sin x \cos y = a;$$
$$\operatorname{tg} x \operatorname{cotg} y = b.$$

R. Sistemul dat este echivalent cu următorul

$$\sin x \cos y = a,$$
$$\sin y \cos x = \frac{a}{b}.$$

Prin adunarea și scăderea ecuațiilor obținem

$$\sin (x + y) = a + \frac{a}{b} \text{ și } \sin (x - y) = a - \frac{a}{b},$$

care permit găsirea lui x și y.

382. Să se rezolve sistemul

$$x - y = 120°, \sin x - \sin y = \frac{3}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Ecuația a doua se scrie

$$2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = \frac{3}{2},$$

de unde deducem

$$\cos \frac{x+y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ și apoi } x + y = 2k \cdot 360° \pm 60°.$$

Se găsește

$$x = k \cdot 360° + 90°; \quad y = k \cdot 360° - 30°$$

sau

$$x = k \cdot 360° + 30°; \quad y = k \cdot 360° - 90°$$

383. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = a, \quad \cos(x + y) = b,$$

unde a și b sînt date. *Discuție.*

R. Prima ecuație se transformă, succesiv, astfel

$$\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = a,$$

sau

$$\frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{1+a}{1-a} = \frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)} = \frac{1+a}{1-a}.$$

Ținînd seama de ecuația a doua sistemul devine

$$\cos(x + y) = b; \quad \cos(x - y) = \frac{b(1+a)}{1-a}.$$

Pentru ca problema să fie posibilă, trebuie să avem

$$-1 \leqslant b \leqslant 1 \text{ și } -1 \leqslant b \cdot \frac{1+a}{1-a} \leqslant 1.$$

384. Să se rezolve sistemele

a) $\begin{cases} \sin x \sin y = m \\ \cos x \cos y = n \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x - \sin y = a \\ \cos x + \cos y = b. \end{cases}$

R. a) Formăm ecuațiile

$\cos x \cos y + \sin x \sin y = n + m$ și $\cos x \cos y - \sin x \sin y = n - m$ obținem sistemul

$$\cos(x - y) = n + m \text{ și } \cos(x + y) = n - m \text{ etc.}$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Împărțind ecuațiile, obținem $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{a}{b}$, care permite calcularea diferenței $x-y$. Se înlocuiește rezultatul obținut în ecuația

$$2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}=a,$$

de unde se obține și $x+y$.

385. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\frac{\sin x}{\sin y}=m;\ x+y=n.$$

R. Prima ecuație se scrie succesiv

$$\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{m+1}{m-1},\ \text{apoi}\ \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}\operatorname{cotg}\frac{x-y}{2}=\frac{m+1}{m-1},$$

de unde deducem

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{m-1}{m+1}\operatorname{tg}\frac{n}{2}\ \text{etc.}$$

386. Să se determine totalitatea arcelor care satisfac inecuația

$$\frac{\sin 2x\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x-\sin x-\frac{1}{2}}{\cos^3\frac{1}{3}x-4\cos^2\frac{1}{3}x+\cos\frac{1}{3}x-4}>0.$$

R. Inecuația devine

$$\frac{(\sin 2x-1)\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{3}-4\right)\left(\cos^2\frac{x}{3}+1\right)}>0.$$

Avînd în vedere că factorii $\sin 2x-1$; $\cos\frac{x}{3}-4$; $\cos^2\frac{x}{3}+1$ păstrează același semn pentru orice x, inecuația se reduce la următoarea

$$\sin x+\frac{1}{2}>0,$$

care este verificată pentru valorile

$$2n\pi-\frac{\pi}{6}<x<2n\pi+\frac{7\pi}{6}.$$

Scanned with OKEN Scanner

387. Să se determine arcele x care satisfac inecuația

$$4\cos^2 x + 2(\sqrt{3}-1)\sin x + \sqrt{3} > 4.$$

R. Inegalitatea se transformă în

$$4\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) < 0.$$

Se găsesc soluțiile

$$2n\pi - \frac{\pi}{6} < x < 2n\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{sau} \quad 2n\pi + \frac{2\pi}{3} < x < 2n\pi + \frac{7\pi}{6}.$$

388. Baza unui triunghi isoscel este egală cu 1 234,50 m și raza cercului înscris de 456,80 m. Să se calculeze latura și înălțimea triunghiului.

R. Obținem

$$\hat{B} = \hat{C} = 73°24'', \quad b = c = 2\,112 \text{ m}; \quad h = 2019{,}82 \text{ m}.$$

389. Să se găsească valoarea expresiei

$$E = (b-c)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A + (c-a)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B + (a-b)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C,$$

în care a, b, c, A, B, C sînt respectiv, laturile și unghiurile unui triunghi rectiliniu oarecare.

R. Avem

$$(b-c)\operatorname{cotg}\frac{A}{2} = 2R(\sin B - \sin C)\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} =$$

$$= 4R\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\times\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} = 4R\left(\sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2}\right),$$

de unde rezultă apoi $E = 0$.

390. a) Într-un triunghi, unghiurile sînt proporționale cu numerele 3, 4, 5; cu care numere sînt proporționale laturile triunghiului?

b) În alt triunghi, laturile sînt proporționale cu numerele 3, 4, 5; cu care numere sînt proporționale unghiurile triunghiului?

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Din ecuațiile $\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5}$ și $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$, deducem $\hat{A} = 45°$, $\hat{B}° = 60°$ și $\hat{C}° = 75°$. Avem

$$\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ și } \sin C = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

deci laturile sînt proporționale cu $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$; $\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

b) Calculăm unghiurile triunghiului $\hat{A} = 90°$; $\hat{B} = 53°7'48''$ și $\hat{C} = 36°52'12''$, care sînt proporționale cu 30 000; 1 771; 1 229.

391. Baza unui triunghi isoscel este egală cu 1 234,50 și raza cercului circumscris cu 890,70 m. Se cere să se calculeze celelalte elemente ale triunghiului.

R. Avem $\hat{A} = 43°52'10''$; $\hat{B} = \hat{C} = 68°3'35''$; $b = c = 1\,652{,}5$ m $S = 946\,157$ m².

392. Într-un triunghi ABC se dau: $\overline{AB} = 53{,}3$ m, $\overline{AC} = 41{,}1$ m, $BC = 38{,}4$ m.

Pe prelungirea lui AB se ia punctul E, astfel ca să avem $\widehat{BCE} = 48°14'$. Se cere să se calculeze lungimea $\overline{CE}$ și unghiul BEC.

R. $\overline{CE} = 80\,978$ m; $\widehat{BEC} = 1°51'28''$.

393. Într-un triunghi se dau $a = 450{,}25$ m, $\hat{B} = 56°20'18''$, $\hat{C} = 24°15'15''$.

Se cere să se calculeze bisectoarea unghiului A.

R. Bisectoarea unghiului A va fi

$$\frac{a \sin B \sin C}{\sin A \cos \frac{B-C}{2}} = 162{,}36 \text{ m}.$$

394. Să se verifice că dacă între unghiurile A, B, C ale unui triunghi există relația

$$\sin A = 2 \sin B \cos C,$$

triunghiul este isoscel.

R. Se mai scrie relația astfel

$\sin (B + C) - 2 \sin B \cos C = 0$ sau $\sin (B - C) = 0$, de unde rezultă $\hat{B} = \hat{C}$.

Scanned with OKEN Scanner

395. Baza unui triunghi isoscel este egală cu 1 128,50 m, iar raza cercului înscris de 325, 8 m. Să se calculeze latura și înălțimea triunghiului.

R. Din formula $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{2r}{a}$ scoatem $\hat{B}=\hat{C}=60°16''$, după care obținem $b=c=1\ 128{,}60$ și $h=977{,}5$.

396. Să se demonstreze că dacă într-un triunghi ABC avem relația

$$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B=\frac{a+c}{b}$$

triunghiul este dreptunghic.

R. Folosind teorema sinusurilor avem

$$\operatorname{cotg}\frac{B}{2}=\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}},$$

sau

$$\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{\cos\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{B}{2}},$$

de unde rezultă

$$\hat{B}=\hat{A}-\hat{C}\text{ și apoi }\hat{A}=90°.$$

397. Să se rezolve un triunghi dreptunghic, știind că ipotenuza este de 15 cm și diferența catetelor este de 3 m.

R. Avem

$$\hat{B}=53°7'47''\text{; }b=12\text{ cm; }c=9\text{ cm; }S=54\text{ cm}^2.$$

398. În triunghiul ABC, în care se duce înălțimea AD și mediana AE se cunosc: $\overline{BD}=6$ cm, $\overline{DE}=1{,}5$ cm, $\hat{B}=60°$.

Se cere să se calculeze laturile și unghiurile triunghiului ABC.

R. Obținem

$$a=15\text{; }b=3\sqrt{21}\text{; }c=12\text{ cm; }\hat{A}=70°53'36''\text{, }\hat{C}=49°6'24''$$

399. În triunghiul oarecare ABC, AA', BB', CC' sînt înălțimile și H punctul lor de întîlnire. Să se calculeze elementele triunghiului ABC, știind că:

a) triunghiurile BAB' și ACA' sînt asemenea;

b) $\sin A + \sin B + \sin C = \sqrt{\frac{27}{4}}$;

c) proiecția lui $C'H$ pe AH' este $C''H = 12{,}50$ m.

R. Triunghiul este echilateral

$$a = b = c = 50\sqrt{3},\ S = 1\,875\sqrt{3}\ \text{m}^2.$$

400. În triunghiul ABC se duce bisectoarea AD a unghiului A. Să se calculeze laturile și unghiurile triunghiului ABC, cunoscînd că $\overline{AD} = 10$ cm, $\overline{BD} = 5$ cm, $\hat{A} = 60°$.

R. Obținem $\hat{B} = 90°$, $\hat{C} = 30°$, $a = 15$, $b = 10\sqrt{3}$; $c = 5\sqrt{3}$.

401. Să se calculeze într-un triunghi oarecare distanțele ortocentrului la laturi în funcție de lungimile laturilor și tangentele trigonometrice ale unghiurilor.

R. Dacă A, B, C sînt vîrfurile triunghiului, A', B', C', picioarele înălțimilor și H ortocentrul, atunci avem

$$\overline{HA'} = \overline{BA'}\operatorname{ctg} C = c\cos B\operatorname{ctg} C = \frac{a}{\operatorname{tg} A}\cdot\frac{\cos B\cos C}{\cos A} =$$

$$= \frac{a}{\operatorname{tg} A}\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}^2 A}{(1+\operatorname{tg}^2 B)(1+\operatorname{tg}^2 C)}};$$

celelalte distanțe se obțin prin permutări circulare.

O altă expresie pentru $\overline{HA'}$, în funcție de laturi și tangentele unghiurilor, este următoarea

$$\overline{HA'} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C}.$$

402. Să se calculeze elementele unui triunghi în care se cunoaște baza, mediana și înălțimea corespunzătoare

$$a = 325{,}2;\ m = 311{,}7;\ h = 245{,}3.$$

R. Avem

$$b = 431{,}4;\ c = 247{,}1;\ \hat{B} = 96°54'13'',\ \hat{C} = 34°39'4'';$$

$$\hat{A} = 48°26'43'';\ S = 39\,886.$$

403. Să se rezolve un triunghi cînd cunoaștem latura c, mediana m și înălțimea h ce pleacă din A.

Aplicație: $c = 621{,}55$; $m = 362{,}30$; $h = 289{,}25$.

Să se examineze toate cazurile.

Scanned with OKEN Scanner

R. Obținem

$$a = 1\,536{,}50;\ b = 1\,038;\ \hat{A} = 135°55'25'';\ \hat{B} = 27°44'44'';$$

$$S = 222\,200.$$

404. În triunghiul ABC se unesc punctele D și E, mijloacele laturilor AB și AC, apoi se duce DF perpendiculară pe BC. Cunoscînd $\overline{DE} = 10$ cm, $\overline{DF} = 5$ cm, $\hat{B} = 30°$, se cere să se rezolve triunghiul.

R. $a = 20$ cm; $c = 20$ cm; $b = 10\,(\sqrt{6} - \sqrt{2})$; $\hat{A} = \hat{C} = 75°$; $S = 100$ cm^2.

405. În triunghiul ABC se duc: înălțimea AD a vîrfului A, mediana AE a triunghiului ADC și înălțimea DF în triunghiul ADE. Știind că avem

$$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC};\ \overline{AE} = 5 \text{ dm};\ \overline{DF} = 2{,}4 \text{ dm},$$

se cere să se rezolve triunghiul ABC.

R. Obținem

$$a = 9;\ b = 2\sqrt{13};\ c = 5 \text{ dm};\ \hat{B} = 53°7'47'';$$

$$\hat{C} = 33°41'25'';\ S = 18 \text{ dm}^2.$$

406. Notațiile fiind cele obișnuite într-un triunghi, să se stabilească identitatea

$$a^2 = b^2 \cos 2C + c^2 \cos 2B + 2bc \cos (B - C).$$

R. Membrul al doilea se transformă succesiv astfel:

$$E = b^2 (1 - 2 \sin^2 C) + c^2 (1 - 2 \sin^2 B) + 2bc \cos (B - C) =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A - 2 (b^2 \sin^2 C + c^2 \sin^2 B - 2bc \sin B \sin C) =$$
$$= a^2 - 2 (b \sin C - c \sin B)^2 = a^2.$$

407. Într-un triunghi dreptunghic se cunoaște perimetrul $2p$ și aria m^2. Se cere:

a) să se rezolve triunghiul;

b) discuție asupra lui p și m pentru ca problema să admită o soluție.

R. a) Dacă a, b, c sînt laturile necunoscute, avem de rezolvat sistemul

$$a + b + c = 2p;\ bc = 2m^2;\ b^2 + c^2 = a^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se obține

$$a = \frac{p^2 - m^2}{p}; \quad b + c = \frac{p^2 + m^2}{p}.$$

Înlocuind $b = a \sin B$ și $c = a \sin C$ în $b + c = \frac{p^2 + m^2}{p}$, obținem

$$\cos \frac{B - C}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{p^2 + m^2}{p^2 - m^2},$$

care ne dă $B - C$, deci și posibilitatea de a afla unghiurile și laturile b, c.

b) Ca să avem $a > 0$, trebuie ca $p > m$, și pentru a putea determina pe $B - C$, trebuie să avem $p^2 + m^2 \leqslant \sqrt{2}\,(p^2 - m^2)$, ceea ce dă $p \geqslant m\,(1 + \sqrt{2})$.

408. Dintr-un punct C, un segment de dreaptă $\overline{AB}$ se vede sub un unghi $\hat{C}$. Să se determine distanța de la punctul C la dreapta AB, știind că $\overline{AB} = c = 323$ m, $\hat{C} = 83°38'2''$, $a - b = 85$ m, unde $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$.

R. 168 m.

409 Să se rezolve un triunghi oarecare ABC cunoscînd unghiul $\hat{A}$, latura opusă a, precum și suma celorlalte două laturi $b + c = k$. *Discuție.*

Aplicație: $\hat{A} = 39°24'36''$, $a = 5{,}247$ m, $k = 8{,}359$ m

R. Din proporția $\frac{b + c}{\sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A}$ deducem

$$\frac{k}{2 \sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{B - C}{2}} = \frac{a}{\sin A}$$

și mai departe avem

$$\cos \frac{B - C}{2} = \frac{k}{a} \sin \frac{A}{2}.$$

Avem astfel posibilitatea de a calcula B—C, care împreună cu ecuația $\hat{B} + \hat{C} = 180° - \hat{A}$ ne va da unghiurile B și C etc.

Cazul numeric: $b = 6{,}53$ m; $c = 1{,}829$ m;

$$\hat{B} = 127°48'15'' \text{ și } \hat{C} = 12°47'9''.$$

Scanned with OKEN Scanner

410. Să se găsească triunghiurile pentru care avem satisfăcută relația

$$\operatorname{tg} B = \frac{\cos (C - B)}{\sin A + \sin (C - B)}.$$

R. Triunghiul dreptunghic.

411. Să se rezolve un triunghi dreptunghic cunoscînd semiperimetrul p și raza R a cercului circumscris.

R. Avem $a = 2R$ și $b + c = p - 2R$ Înlocuind $b = a \sin B$ și $c = a \sin C$ în $b + c = p - 2R$, obținem

$$\cos \frac{B - C}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{p}{2R} - 1 \right),$$

care permite calcularea unghiurilor B, C și, în consecință, și a laturilor b, c.

412. Să se rezolve un triunghi oarecare ABC, cunoscînd un unghi A, latura opusă a, precum și raportul celorlalte două laturi $\frac{b}{c} = k$ *Discuție.*

R. Avem de rezolvat sistemul

$$\hat{B} + \hat{C} = 180° - \hat{A} \text{ și } \frac{\sin B}{\sin C} = k.$$

Prin aplicarea proprietăților proporțiilor deducem

$$\frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C} = \frac{k + 1}{k - 1} \text{ sau } \operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \frac{k - 1}{k + 1} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

Această ultimă ecuație, împreună cu $\hat{B} + \hat{C} = 180° - \hat{A}$, ne dă unghiurile B și C. Problema este întotdeauna posibilă.

413. Să se demonstreze că triunghiul în care avem

$$\frac{\sin B + \cos C}{\cos B + \sin C} = \operatorname{tg} B$$

este dreptunghic.

R. Din relația dată deducem

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin B + \cos C - \sin B}{\cos B + \sin C - \cos B} = \frac{\cos C}{\sin C}$$

și apoi

$$\cos B \cos C - \sin B \sin C = 0 \text{ sau } \cos (B + C) = 0,$$

care dă $\hat{B} + \hat{C} = 90°$.

Scanned with OKEN Scanner

414. Să se rezolve triunghiul ABC cunoscînd latura $\overline{BC} = a$, înălțimea $\overline{AA'} = h$ precum și bisectoarea $\overline{AA''} = m$, exprimîndu-se, în prealabil, unghiul $A'AA''$ în funcție de unghiurile triunghiului ABC.

R. Avem

$$\widehat{A'AA''} = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}, \quad \text{iar} \quad \cos\frac{B-C}{2} = \frac{h}{m}.$$

Din formula care dă înălțimea

$$h = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A},$$

deducem

$$\frac{2h}{a}\sin(B+C) + \cos(B+C) = \cos(B-C) =$$

$$= 2\cos^2\frac{B-C}{2} - 1 = \frac{2h^2}{m^2} - 1.$$

Din această ecuație scoatem valoarea lui $B + C$ care împreună cu ecuația $\cos\frac{B-C}{2} = \frac{h}{m}$ formează sistemul ale cărui soluții sînt unghiurile B și C.

415. Să se rezolve un triunghi dreptunghic cunoscînd ipotenuza a și înălțimea corespunzătoare h.

R. Din formula care dă înălțimea într-un triunghi oarecare $h = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A}$, deducem $\cos(B - C) = \frac{2h}{a}$. Aceasta, împreună cu ecuația $\hat{B} + \hat{C} = 90°$ ne dă sistemul ale cărui soluții sînt unghiurile B și C etc.

416. Să se rezolve triunghiul ABC, cunoscînd latura $\overline{BC} = a$, înălțimea $\overline{BD} = h$, precum și raza cercului circumscris R. *Discuție.*

R. Din relația $\frac{a}{\sin A} = 2R$, deducem $\hat{A}$, iar din egalitatea $h = a \sin C$, obținem $\hat{C}$. Cu două unghiuri și o latură sîntem în unul din cazurile fundamentale de rezolvare. Condiția de posibilitate a problemei este $h < a < 2R$.

Problema poate admite cel mult trei soluții.

417. Să se demonstreze că în orice triunghi avem

$$a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Se înlocuiesc

$a=2R\sin A=2R\sin(B+C)$; $b=2R\sin(C+A)$; $c=2R\sin(A+B)$

și efectuăm calculele.

418. Să se demonstreze că dacă într-un triunghi avem relația

$$\sin C=\cos A+\cos B$$

triunghiul este dreptunghic.

R. Relația dată se mai scrie și astfel

$$2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

sau

$$\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)=0;$$

fiind exclus cazul $\hat{C}=0$, rămîne $\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C}{2}$, de unde rezultă $\hat{A}=\hat{B}+\hat{C}=90°$.

419. În orice patrulater avem relația

$$E=\sin A-\sin B+\sin C-\sin D=$$
$$=4\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}(C+A).$$

Să se caute o identitate analogă, înlocuind în prima parte sin prin cos.

R. Avem

$$E=\sin A-\sin B+\sin C-\sin D=$$
$$=2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}+2\sin\frac{C-D}{2}\cos\frac{C+D}{2}$$

și avînd în vedere că $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360°$, rezultă $\frac{\hat{C}+\hat{D}}{2}=180°-\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$ și prin urmare, $\cos\frac{C+D}{2}=-\cos\frac{A+B}{2}$.

Înlocuind mai sus, obținem

$$E=2\cos\frac{A+B}{2}\left[\sin\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C-D}{2}\right]=$$
$$=4\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B-C+D}{4}\cos\frac{A-B+C-D}{4}=$$
$$=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{A+C}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă înlocuim în membrul întîi sinusurile prin cosinusuri, obținem identitatea

$$\cos A - \cos B + \cos C - \cos D = 4 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{A+C}{2}.$$

420. În fig. 121 formată dintr-un cerc, o rază $\overline{OB}$, o coardă $\overline{BC}$ și segmentul $\overline{OA}$ (A pe CB), avem cunoscute elementele: $\overline{OB} = R$, unghiul $OAB = \theta$, $\overline{OA} = a$. Să se calculeze în funcție de acestea $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ și unghiul AOB. Să se determine θ în așa fel, încît să avem $\overline{AB} = \overline{2AC}$.

R. Avem

$$\overline{AB} = a \cos \theta + \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \theta}$$

$$\overline{AC} = a \cos \theta - \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \theta};$$

$$\widehat{AOB} = 90^0 - \theta + \arccos \frac{a \sin \theta}{R};$$ pentru ca $\overline{AB} = 2\overline{AC}$, trebuie să avem

$$\cos \theta = \frac{3\sqrt{a^2 - R^2}}{2a\sqrt{2}}.$$

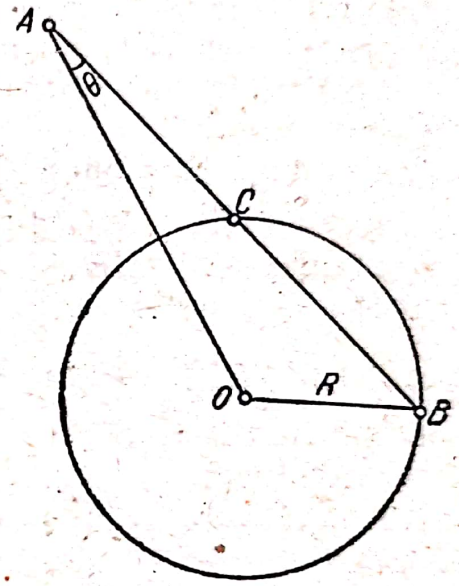


Fig. 121

421. Se consideră un poligon regulat convex cu n laturi înscris într-un cerc de rază R. Să se calculeze suma diagonalelor duse din același vîrf al poligonului.

R. Suma cerută este o sumă de coarde care subîntind arce de $\frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$; deci avem

$$S = 2r\left[\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \ldots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}\right] = 2r \frac{\cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}.$$

422. Se consideră octogonul regulat $ABCDEFGH$ și se trasează diagonalele $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ și $\overline{AG}$. Să se facă calculabilă prin logaritmi și să se calculeze cu trei zecimale exacte valoarea expresiei

$$E = \sin \widehat{BAC} + \sin \widehat{BAD} + \sin \widehat{BAE} + \sin \widehat{BAF} + \sin \widehat{BAG}.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Expresia este egală cu

$$E = \sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{2\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{4\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} =$$

$$= \sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{5\pi}{16} : \sin\frac{\pi}{16}.$$

După calcul, obținem

$$E \approx 3{,}937.$$

423. Fie $\widehat{BAB'}$ un ughi de 135°27′; în acest unghi se înscrie un arc de cerc cu raza $R = 240$ m și cu convexitatea către vîrful unghiului. Fie B și B' punctele de contact, C punctul unde bisectoarea interioară a unghiului A intersectează arcul de cerc, iar din C se duce perpendiculara CD pe AB Se cere să se calculeze în metri:

a) lungimea arcului $BC'B$;

b) lungimile tangentelor $\overline{AB}$ și $\overline{AB'}$;

c) lungimile $\overline{BD}$ și $\overline{CD}$.

R. Dacă notăm cu O centrul arcului BCB' se observă că patrulaterul $ABOB'$ este inscriptibil și, prin urmare, $\widehat{BOB'} = 44°33'$, deci arc $\overset{\frown}{BCB'} = 186{,}61$ m; $\overline{AB} = \overline{AB'} = 98{,}31$ m; $CD = 17{,}91$; $BD = 90{,}97$ m.

424. Turația unui motor este transmisă unei axe paralele cu axa sa de rotație cu ajutorul unui sistem de două roți solidare cîte una cu fiecare din axe și avînd respectiv razele $r = 16{,}5$ cm și $R = 17$ cm. Distanța a între axe este egală cu 2,50 m.

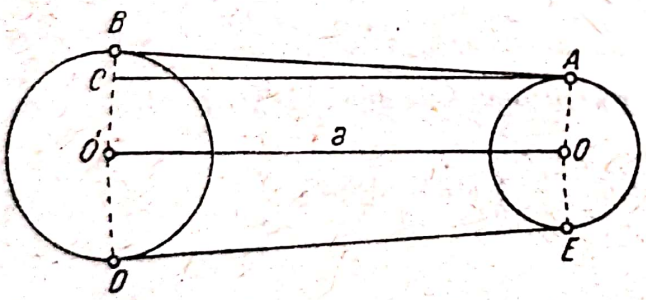


Fig. 122

Se cere să se calculeze lungimea teoretică a curelei (fig. 122) de transmisie necesară și să se compare rezultatul cu acela dat de următoarea formulă practică

$$L = \pi(R + r) + 2a\sqrt{1 - \left(\frac{R-r}{a}\right)^2}.$$

R. Lungimea teoretică este dată de formula

$$L = 2a\sqrt{1 - \left(\frac{R-r}{a}\right)^2} + \pi(R + r) + 2(R - r)\arcsin\frac{R-r}{a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza formulei din enunț, avem $L = 355$ cm. Formula teoretică are în plus termenul $2(R - r)\arcsin\frac{R-r}{a}$, care în cazul numeric este aproximativ egal cu 0,0002 cm.

425. Un balon sferic de rază $r = 5$ m este văzut de un observator așezat pe un plan orizontal sub un unghi $\alpha = 1°28'$, iar unghiul făcut de raza vizuală ce merge la centrul balonului cu planul orizontal este determinat de același observator ca fiind $\beta = 78°43'$. Se întreabă:

a) la ce înălțime h se găsește balonul?

b) presupunînd că balonul se înalță pe verticală cu 100 m, față de poziția precedentă, sub ce unghi va fi văzut de același observator în această poziție?

R. a) $h = 383{,}11$; b) sub unghiul de $1°10'17''$.

426. Pe o cîmpie, considerată ca un plan orizontal, se află o ridicătură de pămînt, a cărei înălțime deasupra planului cîmpiei este necunoscută, iar pe vîrful ridicăturii se află un copac, iarăși de înălțime necunoscută.

Se știe însă că, în momentul cînd înălțimea soarelui deasupra orizontului este $\alpha = 52°45'20''$, umbra copacului pe cîmpie are lungimea $l = 10{,}45$ m, iar copacul $\overline{AB}$ este văzut din punctul B', unde se proiectează umbra vîrfului său, sub unghiul $\beta = 2°2'40''$. Se cere:

a) să se determine înălțimea h a copacului $\overline{AB}$.

b) să se determine înălțimea H a ridicăturii de pămînt măsurată pe verticala copacului;

c) presupunînd că soarele are o mișcare ascendentă în planul figurii, peste cît timp, de la data observației precedente, umbra copacului se va reduce la jumătate?

R. a) $h = l \operatorname{tg}\alpha = 13{,}75$;

b) $H = \frac{l \sin\alpha \sin(\alpha - \beta)}{\sin\beta} = 180{,}48$; c) $t = 1^h 5^m 43^s$.

427. Se dă un con circular drept (fig. 123) de înălțime i, raza bazei r, vîrful V, O centrul bazei. În cercul de bază se duce coarda $\overline{AB} = a$; să se calculeze unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{AVB}$, precum și unghiul planelor AOB și VAB. Să se aplice în cazul cînd $i = 2a = 3r$.

R. Obținem

$$\widehat{AOB} = 2\arcsin\frac{a}{2r}; \qquad \widehat{AVB} = 2\arcsin\frac{a}{2\sqrt{i^2 + r^2}}.$$

Unghiul α al planelor AOB și VAB este dat de formula

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{2i}{\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

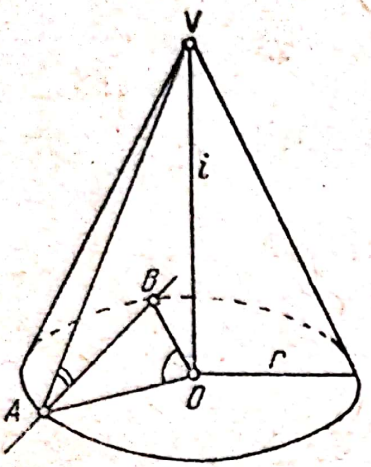


Fig. 123

În cazul $i = 2a = 3r$, avem

$$\widehat{AOB} = 97°10'50''; \quad \widehat{AVB} = 27°26'20''$$

și

$$\alpha = 77°33'59''.$$

428. Un turn înalt de 30 m se vede din punctul A sub un unghi. Apropiindu-ne cu 50 m de turn se vede sub un unghi dublu. Care este distanța de la A pînă la piciorul turnului?

R. $x = 90$ m.

429. În triunghiul BAC cunoaștem laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ și unghiul BAC cuprins între ele. Prin vîrful A trec două drepte AD și AE, care împart unghiul A în trei părți egale și întîlnesc latura opusă BC în D, respectiv în E. Să se calculeze:

a) $\overline{AD}$ și $\overline{AE}$;

b) lungimile segmentelor $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EC}$;

c) în ce caz segmentele $\overline{AD}$ și $\overline{AE}$ pot fi egale?

d) Există vreun triunghi ABC astfel ca să avem $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$?

R. a) $\overline{AD} = \dfrac{bc \sin A}{\sin \frac{A}{3}\left(c + 2b\cos\frac{A}{3}\right)}$; $\overline{AE} = \dfrac{bc \sin A}{\sin \frac{A}{3}\left(b + 2c\cos\frac{A}{3}\right)}$;

b) $\overline{BD} = \dfrac{ac}{c + 2b\cos\frac{A}{3}}$; $\quad \overline{EC} = \dfrac{ab}{b + 2c\cos\frac{A}{3}}$;

$$\overline{DE} = a - (\overline{BD} + \overline{EC}).$$

c) Cînd triunghiul ABC este isoscel, avem $\overline{AD} = \overline{AE}$.

d) Imposibil.

430. Să se stabilească formula care dă aria unui segment circular ADB, în care cunoaștem coarda $\overline{AB} = 2a$ și înălțimea segmentului $\overline{CD} = i$. Să se aplice această formulă la calculul volumului unui lăturoi (o scîndură tăiată din marginea unui buștean cilindric de lemn). Lăturoiul are ca secțiune segmentul precedent,

în care $2a = 28$ cm (lățimea scîndurii), $i = 3$ cm (grosimea scîndurii la mijloc), iar lungimea lăturoiului este de 4 m.

R. $S = \left(\frac{a^2 + i^2}{2i}\right)^2 \operatorname{arctg} \frac{2ai}{a^2 - i^2} - a^2 \cdot \frac{a^2 - i^2}{2ai}$; $V = 22{,}598$ dm^3.

431. Unui cerc de rază R i se duce tangenta AT într-un punct A. Se duce în acest cerc o coardă $\overline{BC}$, căreia să-i corespundă unghiul la centru $2a$.

a) Să se calculeze, în funcție de R și a, lungimea coardei $\overline{BC}$ și distanța ei $\overline{OM}$ de centrul cercului.

b) Să se calculeze, în funcție de R, a și unghiul $\widehat{AOM} = x$, aria trapezului $BB'CC'$, unde $B'M'C'$ sînt proiecțiile punctelor B, M, C pe tangenta $\overline{AT}$.

c) Să se determine unghiul x astfel ca aria trapezului $BB'CC'$ să fie egală cu o valoare dată S^2. *Discuție.*

d) Să se determine x astfel ca aria trapezului $BB'CC'$ să fie maximă sau minimă. *Discuție.*

R. a) $\overline{BC} = 2R \sin a$; $d = R \cos a$.

b) $S^2 = 2R^2 (1 - \cos a \cos x) \sin a \cos x$.

c) Dacă notăm $\frac{S^2}{2R^2} = p$ și $\cos x = z$, ecuația care dă pe z și, prin urmare, pe x, este $\sin a \cos a \cdot z^2 - \sin a \cdot z + p = 0$. Pentru discuție, se urmărește semnul discriminantului

$$\Delta = \sin^2 a - 4p \sin a \cos a,$$

precum și cazurile cînd rădăcinile z sînt cuprinse între -1 și $+1$.

d) Minimum pentru S are loc atunci cînd avem $\cos x = 0$, adică pentru $x = 90°$ și $x = 270°$. Pentru a găsi maximele, căutăm valoarea lui $\cos x$ care face ca trinomul

$$x = -\frac{1}{2} \sin 2a \, (\cos x)^2 + \sin a \cos x$$

să fie maxim, ceea ce se întîmplă cînd avem

$$\cos x = \frac{1}{a \cos a}.$$

Discuția privește diferitele cazuri pentru valorile lui a.

432. Un observator terestru O, urmărind un avion ce zboară constant la o înălțime h, observă că acesta este atins de un proiectil în momentul cînd se află în A iar $\overline{AO}$ face unghiul α cu verticala;

Scanned with OKEN Scanner

ulterior, observă că avionul mai străbate o distanță orizontală $\overline{AB}$ și se prăbușește din B, cînd $\overline{OB}$ face unghiul β cu verticala.

a) Să se determine lungimea $\overline{AB}$.

b) Să se facă expresia obținută calculabilă prin logaritmi.

c) Să se calculeze numeric lungimea $\overline{AB}$ pentru $h = 5\,000$ m, $\alpha = 44°27'30''$, $\beta = 59°14'10''$.

d) Să se rezolve problema pentru cazul cînd avionul, după lovire pierde din înălțime, iar dreapta AB este înclinată cu 45° pe orizontală.

(Avionul și observatorul se vor considera puncte geometrice situate în același plan vertical, iar terenul orizontal).

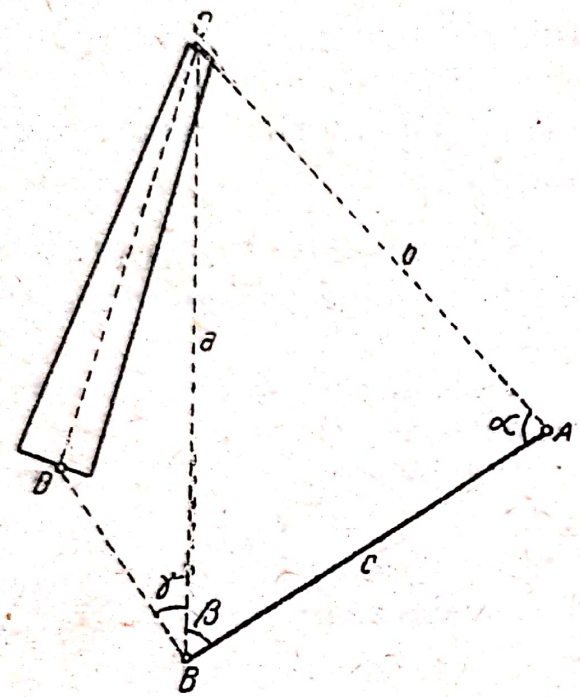


Fig. 124

R. a) $AB = h\,(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)$;

b) $\overline{AB} = \dfrac{h \sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha \cos\beta}$;

c) $\overline{AB} = 3\,483{,}40$ cm;

d) $\overline{AB} = 1\,843{,}50$ m.

433. Două roți de raze $R = 1{,}50$ m și $r = 0{,}50$ m se găsesc în același plan. Distanța între centrele lor este $d = 4$ m. Să se determine cu două zecimale exacte lungimea unei curele încrucișate care ar fi întinsă pe aceste roți.

R. $L = 15{,}29$ m.

434. Să se determine înălțimea I a unui coș de fabrică (fig. 124) făcîndu-se măsurătorile respective conform schiței

$\alpha = 22°37'12''$; $\beta = 30°30'37''$; $\gamma = 73°44'23''$; $c = 156$ m

(BD este orizontală).

R. $I = 72$ m.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

GEOMETRIE ANALITICĂ

A. Exerciții și probleme rezolvate

435. Se dau două axe dreptunghiulare Ox, Oy și un punct A așezat pe prima bisectoare a unghiului axelor. Fie A_1 și A_2 proiecțiile punctului A respectiv pe Ox și Oy, iar M și N punctele în care o dreaptă variabilă ce trece prin A întîlnește aceleași axe. Să se arate că dreptele MA_2, NA_1, și perpendiculara din O pe dreapta MN sînt concurente.

Facultatea de matematică-mecanică, Cluj, 1962.

R. Punînd $A\ (a,\ a)$, atunci o dreaptă variabilă care trece prin A (fig. 125) are ecuația

$$y - a = \lambda(x - a)$$

(λ este un parametru). Această dreaptă taie axele Ox, Oy în

$$M\left[a\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right),\ 0\right]$$

și

$$N\ [0,\ a\ (1 - \lambda)].$$

Ținînd seama că $A_1(a,0)$ și $A_2(0,a)$, ecuațiile dreptelor MA_2, NA_1 sînt

$$(MA_2)\quad \frac{\lambda x}{a\ (\lambda - 1)} + \frac{y}{a} = 1,$$

$$(NA_1)\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{a\ (1 - \lambda)} = 1.$$

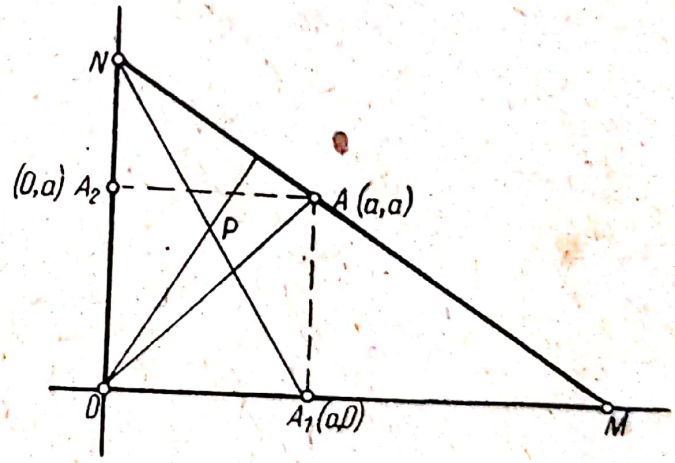


Fig. 125

Perpendiculara din O pe MN, care are ecuația $x + \lambda y = 0$, intersectează dreapta NA_1 în punctul $P\left(x = \frac{a\lambda\ (\lambda - 1)}{\lambda^2 - \lambda + 1},\right.$

$y = -\frac{a(\lambda-1)}{\lambda^2-\lambda+1}\Big)$, ale cărui coordonate verifică ecuația dreptei (MA_2), ceea ce demonstrează afirmația din enunț.

436. Se consideră un sistem de axe ortogonale xOy. Pe axa Ox se iau punctele $A(3,0)$ și $B(-2,0)$ iar prin origine se consideră dreapta de pantă $m = 1/2$. Pe această dreaptă se ia punctul C de ordonată 1.

a) Să se scrie ecuațiile laturilor triunghiului ABC.

b) Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului OAD, unde D este punctul de intersecție al laturii AC cu axa Oy.

Facultatea de chimie industrială, Iași, 1961.

R. a) $(AB)\ y = 0$; $(AC)\ x + y - 3 = 0$; $(BC)\ x - 4y + 2 = 0$;

b) $D(0,3)$; $(OAD)\ \ 2(x^2+y^2) - 3x - 3y = 0$

437. Se dau două axe ortogonale Ox și Oy și un punct $P(a,b)$. Prin acest punct se duc două drepte perpendiculare variabile; una întîlnește pe Ox în punctul A și cealaltă întîlnește pe Oy în punctul B. Să se arate că locul geometric al proiecției punctului P pe AB este o dreaptă.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1960.

R. Notăm (fig. 126) coordonatele punctelor A, B astfel: $A(\alpha, 0)$ și $B(0, \beta)$.

Ținînd seama de faptul că $AP \perp BP$, trebuie să avem

$$\frac{b}{a-\alpha} \cdot \frac{b-\beta}{a} = -1,$$

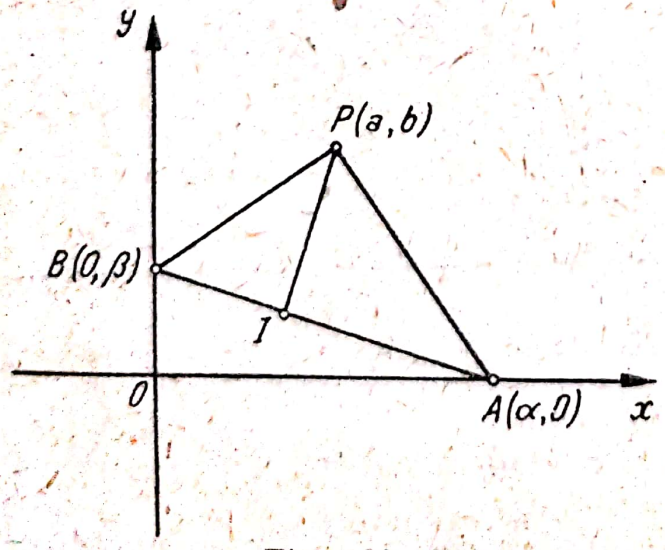


Fig. 126

sau

$$a\alpha + b\beta = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Locul geometric al proiecției I a punctului P pe dreapta AB se obține eliminînd α, β din relația (1) și ecuațiile dreptelor:

$$(AB)\ \ \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1, \quad (2)$$

$$(PI)\ \ y - b = \frac{\alpha}{\beta}(x-a). \quad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (2) și (3) scoatem

$$\alpha = x + \frac{y(y-b)}{x-a} \quad \text{și} \quad \beta = y + \frac{x(x-a)}{y-b}$$

ale căror expresii le introducem în (1), scrisă sub forma

$$a(\alpha - a) + b(\beta - b) = 0.$$

Obținem

$$a\left[x - a + \frac{y(y-b)}{x-a}\right] + b\left[y - b + \frac{x(x-a)}{y-b}\right] = 0,$$

care se pune sub forma

$$(x-a)\left(a + \frac{bx}{y-b}\right) + (y-b)\left(b + \frac{ay}{x-a}\right) = 0,$$

sau

$$(bx + ay - ab)\,\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{(x-a)(y-b)} = 0.$$

Aceasta demonstrează că locul căutat este dreapta $bx + ay = ab$, care trece prin proiecțiile punctului P pe axele Ox, Oy.

438. Se dau punctele: $A(1,0)$, $B(0,2)$, $C(3,1)$. Se cere:

a) să se scrie ecuațiile laturilor triunghiului ABC;

b) unghiurile acestui triunghi;

c) ecuația cercului circumscris triunghiului ABC;

d) ecuația tangentei la cercul găsit în punctul C.

Examenul de maturitate, 1961.

R. a) Ecuațiile laturilor sînt:

$$(AB)\ 2x + y - 2 = 0; \quad (AC)\ x - 2y - 1 = 0;$$
$$(BC)\ x + 3y - 6 = 0.$$

b) Ținînd seama de pantele dreptelor $m_{AB} = -2$, $m_{AC} = \frac{1}{2}$ și $m_{BC} = -\frac{1}{3}$, găsim $\operatorname{tg} A = \infty$ deci $\hat{A} = 90°$; $\operatorname{tg} \hat{B} = 1$, deci $\hat{B} = 45°$ și $\operatorname{tg} C = 1$, de unde $\hat{C} = 45°$.

c) Triunghiul fiind dreptunghic, centrul este mijlocul segmentului BC, adică $C\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, iar raza este egală cu jumătatea segmentului BC, deci $R = \frac{1}{2}\sqrt{10}$. Deducem ecuația cercului ABC;

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{10}{4},$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0.$$

d) Ecuația tangentei în C este

$$3x - y - 8 = 0.$$

439. Se dau două puncte situate pe axa absciselor și anume: $A(-1, 0)$ și $B(5, 0)$.

a) Să se scrie coordonatele vîrfului C al triunghiului isoscel ABC, știind că înălțimea corespunzătoare acestui vîrf este egală cu trei.

b) Să se scrie ecuația medianei corespunzătoare vîrfului A.

c) Să se scrie ecuația înălțimii corespunzătoare vîrfului B.

d) Să se calculeze perimetrul triunghiului ACM, în care M este punctul de intersecție dintre mediana corespunzătoare vîrfului A și înălțimea corespunzătoare vîrfului C.

e) Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului ABC.

Institutul politehnic, Iași, 1962.

R. a) Punctul C are coordonatele $(x, \pm 3)$. Pentru determinarea lui x scriem că două dintre laturile triunghiului ABC sînt egale.

În cazul $\overline{AB} = \overline{AC}$ avem $x = -1 \pm 3\sqrt{3}$, în cazul $\overline{BA} = \overline{BC}$ avem $x = 5 \pm 3\sqrt{3}$ și în cazul $\overline{CA} = \overline{CB}$ trebuie să avem $x = 2$.

Punctul C poate avea, deci, următoarele poziții

$$C_{1,2,3,4}(-1 \pm 3\sqrt{3}, \pm 3), \quad C_{5,6,7,8}(5 \pm 3\sqrt{3}, \pm 3), \quad C_{9,10}(2, \pm 3)$$

pentru ca triunghiul ABC să fie isoscel.

Pentru a răspunde întrebărilor următoare considerăm numai cazul cînd $C(2, 3)$.

b) Mediana vîrfului $A(-1, 0)$ unește acest punct cu mijlocul $A'\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ al segmentului BC, deci ecuația ei este $3y = x + 1$.

c) Deoarece panta dreptei AC este 1, ecuația înălțimii din B este $x + y - 5 = 0$.

d) Punctul M fiind la intersecția dreptelor $3y = x + 1$ și $x = 2$, rezultă $M(2, 1)$; prin urmare, perimetrul cerut este $2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{10}$.

e) $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$.

440. Se dau axele dreptunghiulare Ox, Oy și punctele $A(4, 0)$ și $B(0, 3)$.

a) Să se scrie ecuația dreptei AB și a bisectoarelor unghiurilor OAB și OBA.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se scrie ecuația cercului înscris în triunghiul CAB și ecuația cercului care trece prin mijloacele laturilor triunghiului OAB.

c) Să se demonstreze că aceste două cercuri sînt tangente și să se calculeze coordonatele punctului de contact.

Facultatea de matematică-mecanică, Cluj, 1962.

R. a) $(AB)\ 3x + 4y - 12 = 0$; (bisectoarea $\widehat{OAB}$) $x + 3y - 4 = 0$; (bisectoarea $\widehat{OBA}$) $2x + y - 3 = 0$.

b) Centrul cercului înscris, I, se află la intersecția bisectoarelor precedente și deci $I\ (1, 1)$, iar raza este depărtarea de la I la Ox (sau Oy) și deci este egală cu 1. Rezultă ecuația cercului înscris

$$(C_1)\quad x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Cercul care trece prin mijloacele laturilor triunghiului OAB are ecuația

$$(C_2)\quad x^2 + y^2 - 2x - \frac{3}{2}y = 0.$$

c) Se arată că distanța centrelor cercurilor (C_1), (C_2), care sînt respectiv $I\ (1, 1)$, $C\left(1, \frac{3}{4}\right)$, este egală cu diferența razelor $r_1 = 1$ și $r_2 = \frac{5}{4}$. Punctul T de contact are coordonatele $T\,(1, 2)$.

441. Se dă sistemul de axe ortogonale xOy, dreapta (D) care are ecuația $x = 2$, dreapta (D') de ecuație $x = -4$, punctele $A\,(8, 0)$, $A'\,(-8, 0)$ și punctul P variabil pe axa Oy. Se cere:

a) să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului PAA';

b) fie M intersecția dreptei AP cu dreapta (D) și M' intersecția dreptei PA' cu dreapta (D'). Să se arate că dreapta MM' trece printr-un punct fix și să se determine coordonatele acestui punct.

Examenul de maturitate, 1961.

R. a) Dacă notăm $P\,(0, \alpha)$ (fig. 127), ecuația cercului PAA' este $\alpha(x^2 + y^2) - (\alpha^2 - 64)y - 64\alpha = 0$.

b) Coordonatele punctelor M, M' sînt:

$$M\left(2, \frac{3\alpha}{4}\right) \text{ și } M'\left(-4, \frac{\alpha}{2}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă ecuaţia dreptei MM'

$$(MM')\ \alpha x - 24y + 16\alpha = 0,$$

sau

$$\alpha(x + 16) - 24y = 0.$$

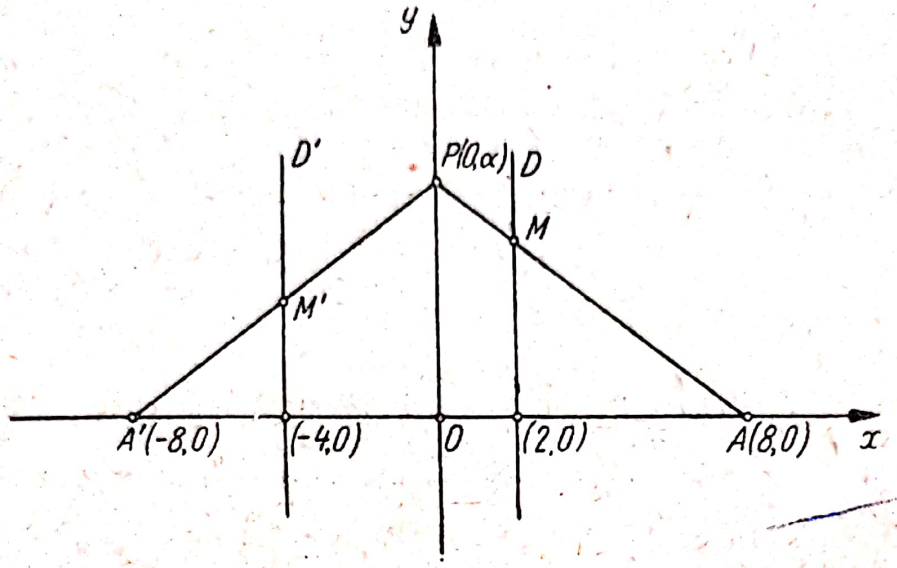


Fig. 127

Această ultimă formă a ecuaţiei dreptei MM' demonstrează că ea trece prin punctul fix $I(-16, 0)$.

442. Se dă un sistem de axe ortogonale Ox, Oy, punctul fix $A\,(5, 0)$ şi punctul mobil $B\,(0, \lambda)$. Se cere:

a) ecuaţia perpendicularei în A pe dreapta AB;

b) ecuaţia paralelei la axa Ox, dusă prin punctul B;

c) locul geometric al punctului C, punctul C fiind intersecţia dreptelor de la punctele a) şi b);

d) ecuaţia cercului circumscris triunghiului ABC.

Examenul de maturitate, 1960.

R. a) $\lambda y = 5(x - 5)$.

b) $y = \lambda$

c) $y^2 = 5(x - 5)$ o parabolă avînd axa Ox ca axă de simetrie, vîrful în punctul $A\,(5, 0)$ şi parametrul egal cu $\frac{5}{4}$

d) Punctul C are coordonatele $C\left(5 + \frac{\lambda^2}{5}, \lambda\right)$. Triunghiul ABC fiind dreptunghic, centrul I al cercului se află la mijlocul segmentului BC, astfel încît coordonatele sale sînt:

$$I\left[\frac{1}{2}\left(5 + \frac{\lambda^2}{5}\right), \lambda\right].$$

Raza cercului este egală cu $\frac{1}{2} BC = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{\lambda^2}{5}\right)$.

Rezultă că ecuația cercului ABC este

$$x^2 + y^2 - \left(5 + \frac{\lambda^2}{5}\right) x - 2\lambda y + \lambda^2 = 0.$$

443. Se dau cercurile $x^2 + y^2 - 4x = 0$ și $x^2 + y^2 + 2x = 0$ cu centrele C_1 și C_2. O secantă dusă prin origine taie curbele respectiv în M_1 și M_2; să se scrie ecuațiile dreptelor M_1C_2 și M_2C_1. Să se găsească locul geometric al intersecției acestor drepte cînd secanta se rotește în jurul originii.

Institutul politehnic, Brașov, 1961.

R. Ecuația secantei, dusă din origine, este $y = mx$, unde m este un parametru variabil. Secanta intersectează cercurile în afară de O $(0, 0)$, în punctele

$$M_1\left[\frac{4}{1+m^2}, \frac{4m}{1+m^2}\right]; \quad M_2\left[\frac{-2}{1+m^2}, \frac{-2m}{1+m^2}\right].$$

Ecuațiile dreptelor M_1C_2, M_2C_1 sînt respectiv:

$$(M_1C_2) \quad y = \frac{4m}{m^2+5}(x+1); \qquad (M_2C_1) \quad y = \frac{m}{m^2+2}(x-2).$$

Eliminînd parametrul m, obținem ecuația locului geometric, care este cercul $x^2 + y^2 + 8x + 12 = 0$ cu centrul $C(-4, 0)$ și raza 2.

În cazul cînd M_1M_2 este chiar linia centrelor, orice punct de pe $y = 0$ poate fi punct comun al dreptelor M_1C_2, M_2C_1.

444. Se consideră un sistem de coordonate în plan și un paralelogram variabil, ale cărui laturi trec respectiv prin cîte un punct fix; una, prin punctul $A(-2, 0)$; a doua, prin punctul $B(0, 0)$; a treia, prin $C(1, 0)$, iar a patra, prin $D(4, 0)$, astfel încît A, C să fie situate pe laturi opuse ale paralelogramului.

a) Să se arate că fiecare diagonală a acestui paralelogram trece printr-un punct fix: una printr-un punct fix M, iar cealaltă printr-un punct fix N.

b) Să se arate că M și N sînt situate pe dreapta $ABCD$ (axa Ox).

c) Se consideră cercurile care trec prin punctele fixe B, C și tangentele din M și N la aceste cercuri. Care este locul geometric al punctelor de contact al acestor cercuri și tangente?

Facultatea de Fizică, București, 1962.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Dacă notăm vîrfurile paralelogramului cu P, Q, R, S, ale cărui laturi PS, PQ, QR, RS trec respectiv prin A, B, C, D, atunci ecuațiile acestor laturi sînt:

$$(APS) \quad y = \alpha(x + 2), \qquad (PBQ) \quad y = \beta x$$

$$(QCR) \quad y = \alpha(x - 1), \qquad (DRS) \quad y = \beta(x - 4)$$

unde α, β sînt parametri variabili reprezentînd pantele laturilor paralelogramului $PQRS$.

Diagonala PR are ecuația $(4\beta - 3\alpha)\, y = \alpha\beta\,(x + 8)$, ceea ce demonstrează că această dreaptă trece prin punctul fix $M(-8, 0)$, iar diagonala QS are ecuația $(3\alpha + 4\beta)\, y = \alpha\beta\,(7x - 4)$, de unde rezultă că QS trece prin punctul fix $N\left(\frac{4}{7}, 0\right)$.

b) Deoarece M, N au ordonata 0, rezultă că aceste puncte sînt situate pe dreapta $ABCD$.

c) Cercurile care trec prin B, C au ecuația

$$(C_1) \quad x^2 + y^2 - x + \lambda y = 0.$$

Aflăm, în general, locul geometric al punctelor de contact al tangentelor duse din $L\,(a, 0)$ la cercul (C_1).

Locul geometric al contactelor este locul geometric al intersecției dintre (C_1) și polara (Δ) a lui L, care are ecuația

$$(\Delta) \quad \lambda y + (2a - 1)\, x - a = 0.$$

Eliminînd pe λ între ecuațiile (C_1) și (Δ), obținem locul căutat, cercul: $x^2 + y^2 + 16x - 8 = 0$.

În cazul $L \equiv M$, locul este cercul $x^2 + y^2 + 16x - 8 = 0$; dacă $L \equiv N$, nu există locul cerut, pentru că $0 < \frac{4}{7} < 1$.

445. Se dau două cercuri exterioare de raze neegale R' și R''. Se notează cu d distanța centrelor $O'O''$ și se raportează cele două cercuri la sistemul de axe de coordonate format de linia centrelor ca axă a absciselor și de axa lor radicală, ca axă a ordonatelor. Să se scrie în raport cu acest sistem de coordonate:

a) ecuațiile celor două cercuri;

b) ecuațiile tangentelor comune celor două cercuri;

c) rapoartele în care tangentele comune celor două cercuri împart segmentul $O'O''$.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1961.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Dacă luăm linia centrelor (fig. 128) ca Ox și axa radicală ca Oy atunci $O'(a', 0)$, $O''(a'', 0)$ iar O are aceeași putere c față de cele două cercuri; avem

$$c = a'^2 - R'^2 = a''^2 - R''^2.$$

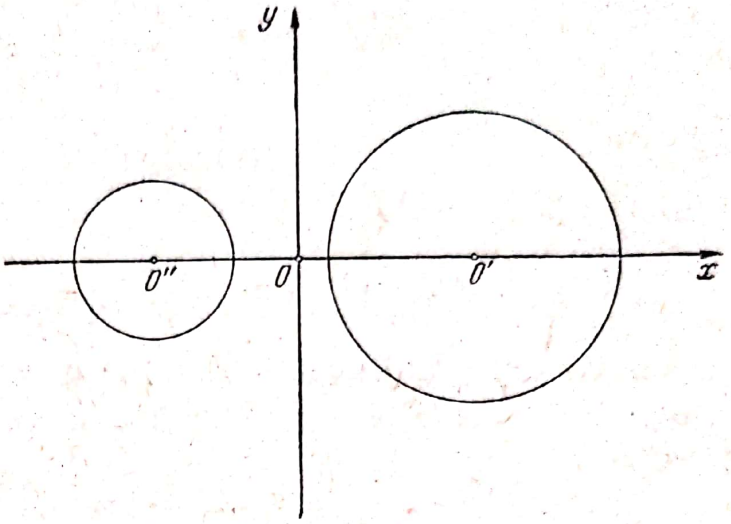


Fig. 123

Ecuațiile celor două cercuri sînt, deci,

$$(O') \quad x^2 + y^2 - 2a'x + c = 0,$$

$$(O'') \quad x^2 + y^2 - 2a''x + c = 0$$

b) O tangentă comună la cele două cercuri are aceeași pantă m; pentru a o afla scriem că tangentele, de pantă m, la cele două cercuri,

$$\begin{aligned} y &= m(x - a') \pm R'\sqrt{1 + m^2}; \\ y &= m(x - a'') \pm R''\sqrt{1 + m^2} \end{aligned} \tag{1}$$

reprezintă una și aceeași dreaptă, de unde obținem ecuația în m

$$m(a' - a'') = (\mp R' \pm R'')\sqrt{1 + m^2},$$

sau

$$m^2 = \frac{(R' + \varepsilon R'')^2}{2[c - (a'a'' + \varepsilon R'R'')]}, \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

care dă patru valori pentru m:

$$m_1 = -\frac{R' + R''}{\sqrt{2[c - (a'a'' + R'R'')]}}; \qquad m_2 = -m_1;$$

$$m_3 = -\frac{R' - R''}{\sqrt{2[c - (a'a'' - R'R'')]}} \quad \text{și} \quad m_4 = -m_3.$$

Cu ajutorul pantelor substituite în una dintre relațiile (1) se obțin ecuațiile tangentelor comune:

$$(T_1) \quad y = m_1(x - a') + R'\sqrt{1 + m_1^2},$$

$$(T_2) \quad y = -m_1(x - a') - R'\sqrt{1 + m_1^2},$$

$$(T_3) \quad y = m_3(x - a') + R'\sqrt{1 + m_3^2};$$

$$(T_4) \quad y = -m_3(x - a') - R'\sqrt{1 + m_3^2},$$

Scanned with OKEN Scanner

care se taie două cîte două, în același punct pe linia centrelor. Astfel, (T_1), (T_2) se intersectează în punctul

$$M\left[a' - \frac{R'}{m_1}\sqrt{1+m_1^2},\ 0\right],$$

iar (T_3), (T_4) în punctul

$$N\left[a' - \frac{R'}{m_3}\sqrt{1+m_3^2},\ 0\right].$$

c) Pentru a calcula rapoartele $\frac{\overline{MO'}}{\overline{MO''}}$, $\frac{\overline{NO'}}{\overline{NO''}}$, folosim formula care ne dă raportul în care o dreaptă de ecuație dată împarte segmentul dat $\overline{O'O''}$. Ținem seama că avem, pentru tangentele comune,

$$P(x,y) \equiv m(x-a') - y \pm R'\sqrt{1+m^2} \equiv m(x-a'') + \\ + R''\sqrt{1+m^2}$$

și substituim pe $(a', 0)$ sau $(a'', 0)$ în expresia mai convenabilă pentru calcul. Se găsește astfel:

$\frac{\overline{MO'}}{\overline{MO''}} = \frac{R'}{R''}$ (dacă M se află în exteriorul segmentului $\overline{O'O''}$)

și

$\frac{\overline{NO'}}{\overline{NO''}} = -\frac{R'}{R''}$ (dacă N se află în interiorul segmentului $\overline{O'O''}$).

Din rezultatele de mai sus se obțin coordonatele punctelor M, N:

$$M\left[\frac{a'R'' - a''R'}{R'' - R'},\ 0\right] \text{ și } N\left[\frac{a'R'' + a''R'}{R'' + R'},\ 0\right].$$

446. Se consideră un triunghi cu vîrfurile $A\ (0, 0)$, $B\ (2, 2)$, $C\ (-2, 2)$.

În același plan se mișcă un punct M astfel, încît suma pătratelor distanțelor de la acest punct la cele trei laturi ale triunghiului rămîne tot timpul constantă și egală cu 16. Să se găsească traiectoria punctului M.

Facultatea de fizică, Cluj, 1962.

R. Traiectoria căutată este locul geometric al punctului M. Notînd $M\ (\alpha, \beta)$ și știind că ecuațiile laturilor triunghiului ABC sînt

$$(AB)\quad x - y = 0;\ (AC)\quad x + y = 0;\ (BC)\quad y - 2 = 0,$$

atunci distanțele d_C, d_B, d_A de la punctul M pînă la laturile AB, AC, BC sînt

$$d_C = \frac{\alpha - \beta}{\pm\sqrt{2}}, \quad d_B = \frac{\alpha + \beta}{\pm\sqrt{2}}, \quad d_A = \pm(\beta - 2).$$

Scriind că suma pătratelor distanțelor este 16, obținem condiția

$$\alpha^2 + 2\beta^2 - 4\beta - 12 = 0,$$

de unde rezultă că M descrie elipsa a cărei ecuație este

$$\frac{x^2}{14} + \frac{(y-1)^2}{7} = 1.$$

447. Într-o elipsă se duce o coardă BC paralelă cu axa mare AA' și fie T proiecția vîrfului A pe dreapta BC.

a) Să se arate că

$$b^2 \cdot \overline{TB} \cdot \overline{TC} = a^2 \cdot \overline{TA}^2,$$

unde a, b sînt semiaxele elipsei.

b) Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor $A'B$, AM, unde M este mijlocul coardei BC.

Facultatea de matematică-mecanică, București, 1962.

R. a) Considerăm elipsa raportată la axele ei. În acest caz, ecuația ei este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Punînd $B(\alpha, \beta)$, rezultă $C(-\alpha, \beta)$ și $T(a, \beta)$, iar între α și β avem relația $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0$.

Pentru a demonstra relația, observăm că avem

$$b^2 \cdot \overline{TB} \cdot \overline{TC} = b^2 \cdot \overline{BT} \cdot \overline{CT} = b^2(a - \alpha)(a + \alpha) = b^2(a^2 - \alpha^2) =$$

$$= b^2 \cdot \frac{a^2\beta^2}{b^2} = a^2\beta^2$$

sau

$$b^2 \cdot \overline{TB} \cdot \overline{TC} = a^2 \cdot \overline{AT}^2.$$

b) Avem $M(0, \beta)$ și ecuațiile dreptelor

$$(A'B)\ y = \frac{\beta}{\alpha + a}(x + a), \qquad (AM)\ y = -\frac{\beta}{a}(x - a).$$

Din aceste ecuații deducem că $\alpha = \frac{2ax}{a-x}$ și $\beta = \frac{ay}{a-x}$ care, substituite în $b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0$, dau ecuația locului geometric

$$3b^2x^2 - 2ab^2x + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Această ecuație se mai scrie

$$\frac{\left(x - \frac{a}{3}\right)^2}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2b\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1,$$

de unde se vede că locul este o elipsă cu centrul în punctul $I\left(\frac{a}{3}, 0\right)$ și cu mărimea semiaxelor $\frac{2a}{3}$ și $\frac{2b\sqrt{3}}{3}$.

448. Se consideră un sistem de axe xOy în plan și două cercuri C_1, C_2 cu centrele în originea axelor de coordonate, de raze $R_1 = 2$ și $R_2 = 3$.

O semidreaptă cu originea O întîlnește cercul C_1 în P_1 și cercul C_2 în P_2. Se consideră perpendiculara din P_2 pe Ox și simetricul M al punctului P_1 față de această perpendiculară.

a) Să se scrie ecuația locului geometric (L), descris de punctul M cînd semidreapta se rotește în jurul punctului O.

b) Fie S un punct al locului (L) și T un punct care împarte segmentul OS într-un raport dat k; să se afle locul geometric descris de T cînd S descrie locul (L).

c) Să se scrie ecuațiile tangentelor la curba (L) în punctele sale de intersecție cu cercurile C_1 și C_2.

d) Fie A și B două puncte de pe curba (L), astfel încît OA și OB să fie perpendiculare; fie u unghiul pe care-l face OA cu Ox. Să se calculeze valoarea expresiei

$$\frac{1}{\overline{OA^2}} + \frac{1}{\overline{OB^2}}$$

(se va vedea că nu depinde de u).

Facultatea de fizică, București, 1962.

R. a) Dacă notăm cu θ unghiul format de OP_1P_2 cu axa Ox, atunci coordonatele punctelor P_1, P_2 sînt

$$P_1(x_1 = R_1\cos\theta,\ y_1 = R_1\sin\theta),\ P_2(x_2 = R_2\cos\theta,\ y_2 = R_2\sin\theta).$$

Punctul M, simetricul lui P_1 în raport cu perpendiculara dusă din P_2 pe Ox, are coordonatele

$$x = 2x_2 - x_1 = (2R_2 - R_1)\cos\theta, \quad y = y_1 = R_1\sin\theta.$$

Eliminînd pe θ între cele două relații precedente, obținem ecuația locului geometric cerut:

$(L)\ \dfrac{x^2}{(2R_2 - R_1)^2} + \dfrac{y^2}{R_1^2} = 1$ sau, în cazul numeric dat, $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ care este ecuația unei elipse.

b) Dacă presupunem $S(x, y)$ și $T(X, Y)$, atunci avînd în vedere că $OT/TS = k$, rezultă

$$X = \frac{kx}{1+k}, \qquad Y = \frac{ky}{1+k}.$$

Scriind că $S(x, y)$ verifică ecuația (L), obținem ecuația pe care o verifică coordonatele (X, Y) ale lui T

$$\frac{X^2}{\left[\dfrac{(2R_2 - R_1)\,k}{1+k}\right]^2} + \frac{Y^2}{\left[\dfrac{R_1 k}{1+k}\right]^2} = 1,$$

de unde rezultă că locul punctului T este, de asemenea, o elipsă.

c) În cazul numeric dat, cercurile și elipsa avînd ecuațiile

$$(C_1)\ x^2 + y^2 - 4 = 0,\ (C_2)\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \text{ și}$$

$$(L)\ x^2 + 4y^2 - 16 = 0,$$

se intersectează astfel

(C_1) cu (L) în punctele $T_1(0, 2)$, $T_2(0, -2)$,

iar (C_2) cu (L) în punctele $T_3\left(\dfrac{\sqrt{60}}{3}, \dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)$, $T_4\left(\dfrac{-\sqrt{60}}{3}, \dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)$, $T_5\left(\dfrac{\sqrt{60}}{3}, \dfrac{-\sqrt{21}}{3}\right)$, $T_6\left(\dfrac{-\sqrt{60}}{3}, \dfrac{-\sqrt{21}}{3}\right)$.

Aplicînd formula ecuației tangentei în punctul (x_0, y_0) de pe (L),

$$xx_0 + 4yy_0 - 16 = 0,$$

obținem ecuațiile tangentelor în punctele de intersecție indicate.

d) Un punct A de pe elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, astfel încît OA să facă cu axa Ox un unghi u, are coordonatele

$$A\left(\frac{\varepsilon\, ab\cos u}{\sqrt{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}}, \frac{\varepsilon\, ab\sin u}{\sqrt{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}}\right) \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Punctul B, astfel încît dreapta OB să fie perpendiculară pe dreapta OA, are coordonate care se obțin din cele precedente punînd în loc de u valoarea $90° + u$. Se găsește, astfel

$$B\left(\frac{-\varepsilon ab \sin u}{\sqrt{a^2\cos^2 u + b^2 \sin^2 u}}, \frac{\varepsilon ab \cos u}{\sqrt{a^2\cos^2 u + b^2 \sin^2 u}}\right)$$

și prin urmare

$$\frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} = \frac{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}{a^2b^2} + \frac{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

ceea ce trebuie demonstrat.

449. Se consideră o elipsă de centru O și de focare F și F'. Pentru fiecare punct M al elipsei se duce normala în M la elipsă, care intersectează axa y-ilor într-un punct P. Se cere:

a) Să se calculeze expresia $\dfrac{\overline{MP}^2}{\overline{FM}\cdot\overline{F'M}}$, cînd punctul M se mișcă pe elipsă.

b) Să se găsească locul geometric descris de centrul cercului înscris triunghiului MFF' cînd M descrie elipsa dată.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1961.

R. a) Considerînd elipsa raportată la axele ei, un punct M oarecare (fig. 129) de pe elipsă are coordonatele $M(a\cos t, b\sin t)$.

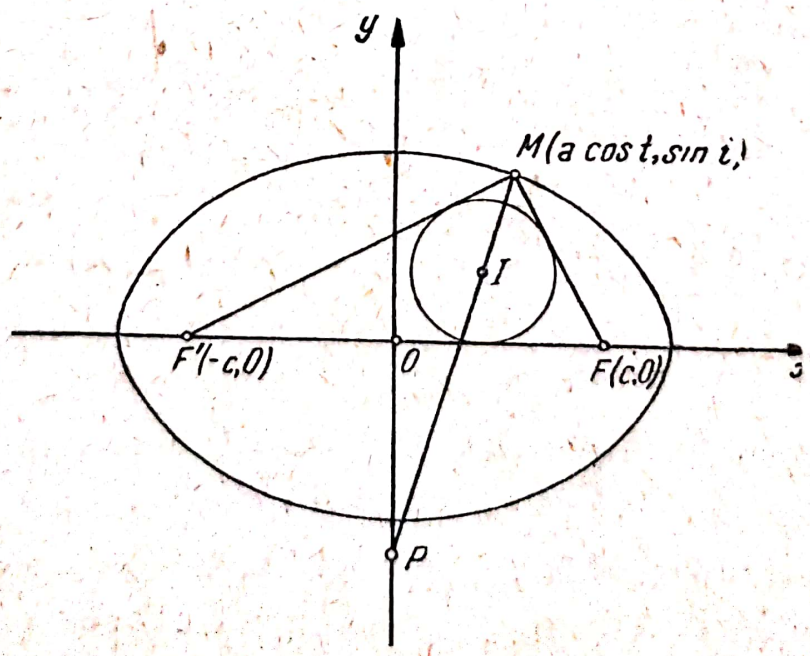


Fig. 129

Ecuația normalei în M este

$$y - b \sin t = \frac{a \sin t}{b \cos t}(x - a \cos t).$$

Ea taie axa Oy în punctul P, de coordonate $P\left(0, -\frac{c^2}{b} \sin t\right)$.

Rezultă $\overline{MP}^2 = \frac{a^2}{b^2}(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)$.

Știind că $\overline{FM} = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - a \cos t\right)$ și $\overline{F'M} = \frac{c}{a}\left(a \cos t + \frac{a^2}{c}\right)$, găsim

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{FM} \cdot \overline{F'M}} = \frac{a^2}{b^2}.$$

b) Centrul I al cercului înscris în triunghiul $MF'F$ se află pe bisectoarea din M, care este normala, la o distanță r de $F'F$ egală cu

$$r = \frac{\text{aria } (F'MF)}{\frac{1}{2}(\overline{F'F} + \overline{F'M} + \overline{FM})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot F'F \cdot b \sin t}{\frac{1}{2}(2c + 2a)} = \frac{bc \sin t}{a + c},$$

adică la intersecția dreptelor de ecuații

$$\begin{cases} y = \frac{bc \sin t}{a + c} \\ b(y - b \sin t) \cos t = a(x - a \cos t) \sin t. \end{cases}$$

Eliminînd pe t între cele două relații, aflăm ecuația locului geometric, care este

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bc}{a + c}\right)^2} = 1,$$

adică o elipsă raportată la aceleași axe, avînd ca axă mare pe $\overline{F'F} = 2c$ și mărimea semiaxei mici egală cu $\frac{bc}{a + c}$.

450. Fie P un punct exterior unei elipse, F unul dintre focare și (d) directoarea relativă la focarul F. Se duc din P tangentele la elipsă și se notează cu P', P'' punctele de tangență. Dreapta $P'P''$ intersectează directoarea (d) în punctul Q. Să se arate că dreptele FP și FQ sînt bisectoarele unghiului $P'FP''$.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1960.

Scanned with OKEN Scanner

R. Să demonstrăm că FP (fig. 130) este bisectoarea unghiului $P'FP''$. Construim simetricele M, M' ale focarelor F, F' față de cele două tangente PP', PP''. După cum se știe, dreptele $F'M$ și FM' trec prin punctele de contact P', P'' ale celor două tangente și avem totodată $\overline{MF'} = \overline{M'F} = 2a$ (mărimea axei mari). De aici rezultă egalitatea triunghiurilor PMF', PFM', întrucît $\overline{PM} = \overline{PF}$, $\overline{MF'} = \overline{FM'}$ și $\overline{PF'} = \overline{PM'}$.

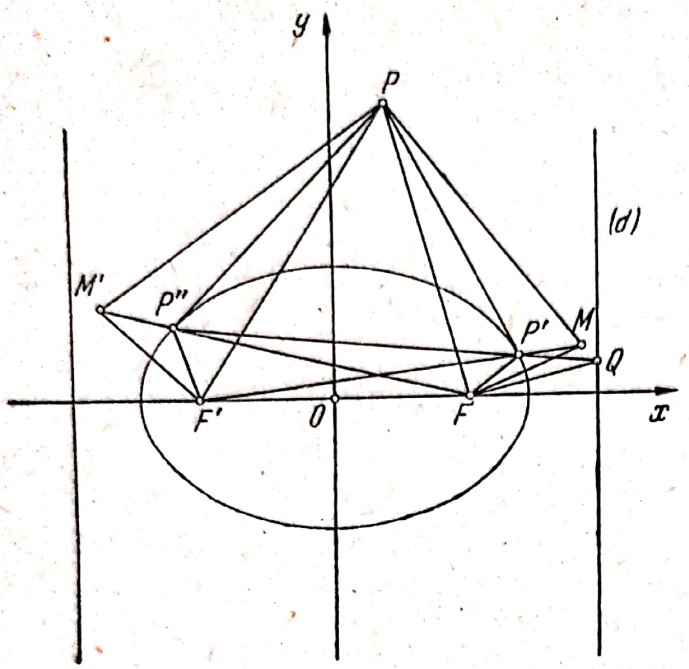


Fig. 130

Triunghiurile fiind egale, avem $\widehat{PMF'} = \widehat{PFM'}$.

Din faptul că M este simetricul lui F față de dreapta PP', deducem că $\widehat{PMF'} = \widehat{PFP'}$ și deci $\widehat{PFP'} = \widehat{PFM'} = \widehat{PFP''}$.

Pentru a demonstra că și FQ este bisectoare, considerăm elipsa raportată la axele ei și $P(x_0, y_0)$. Ecuația elipsei fiind $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, coordonatele punctului Q se obțin intersectînd polara lui P cu directoarea $x = \frac{a^2}{c}$ a focarului $F(c,0)$. Se găsește:

$Q\left[\frac{a^2}{c}\ ;\ \frac{b^2}{y}\left(1 - \frac{x_0}{c}\right)\right]$. Pantele dreptelor FP, FQ sînt respectiv

$$m_1 = \frac{y_0}{x_0 - c} \quad \text{și} \quad m_2 = \frac{c}{y_0}\left(1 - \frac{y_0}{c}\right).$$

Produsul acestor pante este egal cu -1, de unde deducem că $FQ \perp FP$ și cum FP este bisectoare, rezultă că și FQ este de asemenea o bisectoare a unghiului format de FP', FP''.

451. Tangenta într-un punct M al unei hiperbole echilatere, cu centrul în origine, taie axele Ox și Oy în punctele A și B. Să se arate că cercul de diametru $\overline{AB}$ este în tangent în origine dreptei OM.

Examenul de maturitate, 1961.

Scanned with OKEN Scanner

R. Hiperbola echilaterală cu centrul în origine, avînd ca axe de simetrie axele Ox, Oy, are ecuaţia de forma $x^2 - y^2 = a^2$. Notăm cu (α, β) coordonatele unui punct M oarecare de pe hiperbolă (deci $\alpha^2 - \beta^2 = a^2$); atunci tangenta în M la hiperbolă are ecuaţia

$$\alpha x - \beta y = a^2.$$

Această tangentă taie Ox în $A\left(\frac{a^2}{\alpha}, 0\right)$ şi pe Oy în $B\left(0, -\frac{a^2}{\beta}\right)$. Cercul de diametru AB are ecuaţia

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2}{\alpha} x + \frac{a^2}{\beta} y = 0.$$

Pentru a demonstra că acest cerc este tangent în origine dreptei OM, este suficient să arătăm că tangenta la cerc, în origine ($\alpha y - \beta x = 0$) are aceeaşi ecuaţie cu dreapta $OM\left(y = \frac{\beta}{\alpha} x\right)$, ceea ce este evident.

452. Se consideră cercurile care trec prin două puncte fixe A şi B.

a) Să se arate că locul geometric al extremităţilor diametrelor acestor cercuri, paraleli cu dreapta AB, este o hiperbolă.

b) Dintre cercurile considerate să se determine acelea care se văd sub unghiuri drepte din focarele hiperbolei.

c) Să se calculeze lungimile segmentelor determinate de asimptotele hiperbolei pe tangentele în fiecare din punctele de intersecţie ale ei cu unul oarecare dintre cercurile considerate.

Facultatea de matematică şi fizică, Bucureşti, 1960.

R. a) Luînd AB ca Ox şi mediatoarea segmentului ca Oy (fig. 131) avem $A(a, 0)$ şi $B(-a, 0)$.

Un cerc oarecare ce trece prin A, B are deci ecuaţia

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y - a^2 = 0, \quad (1)$$

unde λ este un parametru şi totodată ordonata centrului. Diametrul paralel cu AB are deci ecuaţia

$$y = \lambda. \quad (2)$$

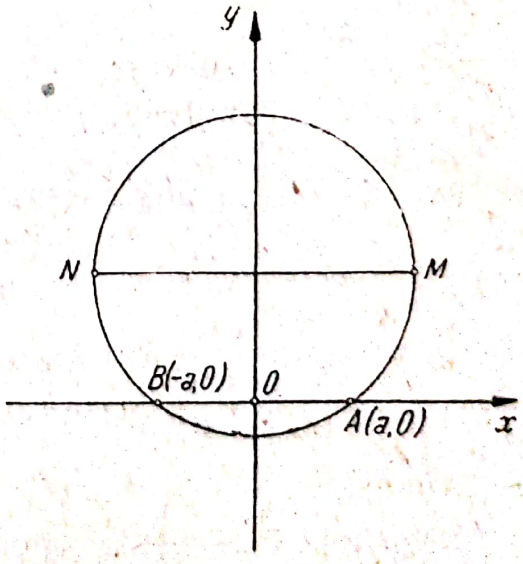


Fig. 131

Eliminînd λ între (1) şi (2), obţinem ecuaţia locului geometric al extremităţilor diametrilor paraleli cu AB. Acest loc are ecuaţia

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

care reprezintă o hiperbolă echilateră cu focarele $F\ (\varepsilon a\sqrt{2}, 0)$ unde $\varepsilon = \pm 1$.

b) Ecuaţiile tangentelor duse din F sînt de forma $y = m\ (x - \varepsilon a\sqrt{2})$, unde m este una dintre rădăcinile ecuaţiei:

$$(\lambda^2 - a^2)m^2 - 2\varepsilon\lambda a\sqrt{2}\ m + a^2 = 0.$$

Pentru ca cercul să fie văzut sub un unghi de 90°, trebuie să avem $m_1 m_2 = -1$, sau

$$\frac{a^2}{\lambda^2 - a^2} = -1.$$

Rezultă $\lambda = 0$. Aşadar, cercul $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ este singurul care se vede din focarele F', F sub unghiuri de 90°.

c) Asimptotele hiperbolei sînt dreptele $y = \pm x$, iar punctele de intersecţie a hiperbolei cu cercul (1) sînt $A\ (a, 0)$, $B\ (-a, 0)$, $M\ (\sqrt{a^2 + \lambda^2}, \lambda)$ şi $N\ (-\sqrt{a^2 + \lambda^2}, \lambda)$. Ecuaţiile tangentelor în A, B sînt $x = \varepsilon a$, iar în M, N sînt $\varepsilon\sqrt{a^2 + \lambda^2}\ x - \lambda y = a^2$, unde $\varepsilon = \pm 1$.

Mărimea segmentelor determinate de asimptote pe tangentele în A, B este aceeaşi, egală cu $2a$ iar pe fiecare tangentă din M, N asimptotele determină un segment de aceeaşi lungime egală cu $2\sqrt{2\lambda^2 + a^2}$.

453. Să se determine parametrul parabolei cu focarul în punctul $F(1, 0)$, a cărei ecuaţie este $y^2 = 2px$. Să se determine punctul M de pe parabolă pentru care tangenta şi normala formează cu axa Ox un triunghi isoscel.

Examenul de maturitate, 1960.

R. Deoarece focarul are coordonatele (1, 0), trebuie ca $\frac{p}{2} = 1$.

Fie $A\ (\alpha, \beta)$ un punct de pe parabolă. Ecuaţia tangentei în A este $\beta y = 2(x + \alpha)$, iar a normalei $y - \beta = -\frac{\beta}{2}(x - \alpha)$.

Rezultă că tangenta taie pe Ox în $T\ (-\alpha, 0)$, iar normala, în $N\ (\alpha + 2, 0)$.

Scanned with OKEN Scanner

Lungimile laturilor triunghiului sînt deci:

$$\overline{AT} = \sqrt{(\alpha + \alpha)^2 + \beta^2} = \sqrt{4\alpha^2 + 4\alpha} \quad (\beta^2 = 4\alpha)$$

$$\overline{AN} = \sqrt{(\alpha + 2 - \alpha)^2 + (-\beta)^2} = \sqrt{4 + 4\alpha}$$

$$\overline{TN} = (\alpha + 2) - (-\alpha) = 2\alpha + 2.$$

Pentru ca triunghiul ATN să fie isoscel, trebuie să avem

$$\overline{AT} = \overline{AN}.$$

Acestei condiții îi corespund două puncte de pe parabolă: $A_1(1, 2)$ și $A_2(1, -2)$.

454. Se dau punctele $A(-a, 0)$ și $B(a, 0)$. Prin A se duce o dreaptă de coeficient unghiular m variabil, iar din B se duce perpendiculara pe dreapta dusă din A.

a) Să se afle locul geometric al punctului M în care se taie dreptele de mai sus.

b) Dreapta AM taie pe Oy în punctul C. Să se scrie ecuația locului geometric al punctului P în care paralela dusă din C la Ox taie pe BM.

c) Fie T proiecția lui P pe Ox. Să se deducă geometric, folosind asemănarea triunghiurilor AOC și BTP, relația dintre coordonatele x și y ale punctului P,

Examenul de maturitate, 1961.

R. a) Locul geometric al punctului M (fig. 132) este cercul $x^2 + y^2 = a^2$, care are centrul în origine și raza a.

b) Dacă AM are ecuația $y = \lambda(x + a)$, atunci C are coordonatele $(0, a\lambda)$. Locul punctului P se obține eliminînd λ între ecuațiile:

$$y = a\lambda \text{ și}$$

$$y = -\frac{1}{\lambda}(x - a).$$

Ecuația locului geometric al punctului P este deci parabola $y^2 = -a(x - a)$ cu parametrul $-\frac{a}{2}$ și vîrful în punctul $B(a, 0)$.

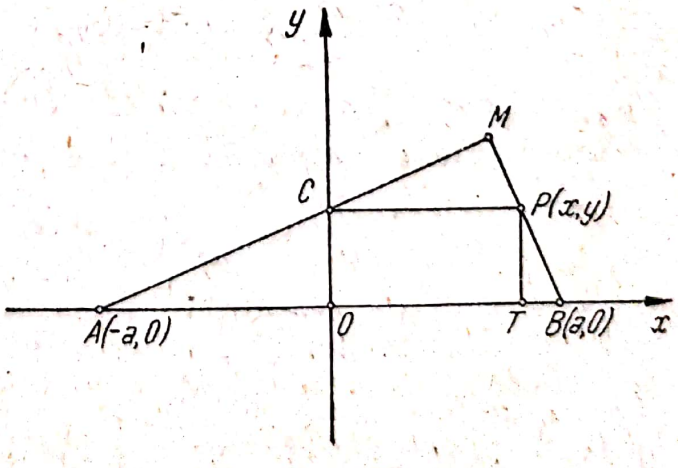


Fig. 132

c) Dacă notăm $P(x, y)$ și scriem că triunghiurile BPT și AOC sînt asemenea, avem

$$\frac{\overline{TB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{TB}}{\overline{AO}}$$

sau

$$\frac{a - x}{y} = \frac{y}{a},$$

adică

$$y^2 = a(a - x),$$

care este ecuația stabilită la pct. b).

455. Se dă un sistem de axe ortogonale. Fie $A(a, 0)$ un punct fix pe axa Ox și $B(0, n)$ un punct variabil pe axa Oy.

a) Să se scrie ecuația cercului de diametru AB.

b) În punctele O și B se duc tangentele la acest cerc, care se intersectează în punctul P. Să se afle aria triunghiului POB.

c) Să se găsească locul geometric al punctului P cînd punctul B variază.

Examenul de maturitate, iunie, 1962.

R. a) $x^2 + y^2 - ax - ny = 0$.

b) Ecuația tangentei în O este $ax + ny = 0$, iar aceea a tangentei în B, $ny = ax + n^2$. Aceste două tangente se intersectează în punctul P de coordonate $-\frac{n^2}{2a}, \frac{n}{2}$.

Rezultă că aria triunghiului POB este $A = \frac{n^3}{4a}$.

c) Locul geometric al punctului P se obține eliminînd parametrul n între ecuațiile

$$x = -\frac{n^2}{2a} \quad \text{și} \quad y = \frac{n}{2}.$$

Se găsește o parabolă, a cărei ecuație este

$$y^2 = -\frac{a}{2}x.$$

Focarul parabolei este în punctul $F\left(-\frac{a}{8}, 0\right)$.

456. Se dă o dreaptă (D) și un punct fix A pe această dreaptă. Fie B un punct variabil pe o dreaptă (D_1) fixă, perpendiculară pe (D).

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se afle locul geometric al intersecției perpendicularei pe mijlocul segmentului AB cu paralela dusă prin B la dreapta (D).

b) Să se arate că locul geometric este o parabolă tangentă la mediatoarea segmentului AB.

Examenul de maturitate, iunie, 1962.

R. a) Luînd (D) ca axă Ox și (D_1) ca axă Oy, avem $A(a, 0)$ și $B(0, \beta)$, a fiind o constantă și β un parametru.

Ecuația paralelei prin B la (D) este $y = \beta$, iar ecuația mediatoarei segmentului AB este

$$(\Delta)\ y - \frac{\beta}{2} = \frac{a}{\beta}\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

Locul intersecției dintre (D) și (Δ) se află eliminînd pe β între ecuațiile celor două drepte. Se găsește ecuația locului

$$y^2 = 2a\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

b) Dacă notăm cu M intersecția mediatoarei segmentului AB cu paralela dusă prin B la dreapta (D) și ținem seama că triunghiul MAB este isoscel, avem $\overline{MA} = \overline{MB}$, ceea ce demonstrează că locul geometric găsit este o parabolă cu focarul în A și directoare dreapta (D_1).

Intersectînd dreapta (Δ) cu parabola, obținem ecuația ordonatelor intersecției,

$$y^2 - 2\beta y + \beta^2 = 0,$$

care are o rădăcină dublă, ceea ce demonstrează afirmația din enunț.

457. Se dă sistemul de axe ortogonale xOy, dreapta (D) fixă, de ecuație $x = a$, și punctul fix $P(b, c)$.

a) Să se scrie ecuația cercului care trece prin punctul P și al cărui diametru este distanța de la punctul P la dreapta (D).

b) Prin P se duce o dreaptă variabilă care taie dreapta (D) în punctul R. Prin punctul R se duce o paralelă la axa Ox care intersectează perpendiculara dusă în P pe dreapta (RP) în punctul P'. Să se găsească locul geometric al punctului P' cînd dreapta (RP) variază.

Examenul de maturitate, iunie, 1962.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Ecuația cercului căutat este

$$x^2 + y^2 - (a+b)x - 2cy + ab + c^2 = 0.$$

[Dacă $b < a$, $R = \frac{1}{2}(a-b)$; în cazul $b > a$, $R = \frac{1}{2}(b-a)$].

b) Ecuația perpendicularei în P pe dreapta (RP) este

$$y - c = \frac{b-a}{\lambda - c}(x - b).$$

Eliminînd pe λ între ecuația precedentă și ecuația paralelei la Ox prin punctul R, $y = \lambda$, obținem ecuația locului geometric:

$$(y - c)^2 = (b - a)(x - b),$$

care este o parabolă cu vîrful în $P(b, c)$, avînd axa paralelă cu Ox, parametrul $p = \frac{1}{2}(b - a)$ și focarul în punctul $F\left(\frac{5b-a}{4}, c\right)$.

458. Se dă pătratul $OABC$ ale cărui vîrfuri au coordonatele $O(0, 0)$, $A(a, 0)$ $B(0, a)$ $C(a, a)$. Pe latura BC se consideră un punct variabil P. Perpendiculara dusă în P pe dreapta OP taie latura AC în punctul Q.

a) Să se afle locul geometric al punctului de intersecție a dreptei OQ cu paralela dusă prin P la dreapta OB.

b) Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului OPB și apoi ecuația tangentei la cerc în punctul P. Să se afle locul geometric al punctului de intersecție a acestei tangente cu paralela la axa Oy dusă prin mijlocul segmentului OP.

Examenul de maturitate, august, 1962.

R. a) Considerăm punctul $P(\lambda, a)$, λ fiind un parametru. În acest caz, perpendiculara în punctul P pe dreapta OP are ecuația

$$y - a = -\frac{\lambda}{a}(x - \lambda).$$

Această dreaptă intersectează dreapta AC de ecuație $x = a$ în punctul Q de coordonate $a, \frac{a^2 - a\lambda + \lambda^2}{a}$.

Locul cerut se obține eliminînd pe λ între ecuația dreptei (OQ)

$$(a^2 - a\lambda + \lambda^2)x - a^2 y = 0$$

și ecuația paralelei prin P la OB, $x = \lambda$.

Ecuația locului geometric este curba de gradul al treilea

$$a^2 y = x^3 - ax^2 + a^2 x.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Cercul OPB are segmentul OP ca diametru și prin urmare centrul $C\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{a}{2}\right)$; ecuația cercului este

$$x^2 + y^2 - \lambda x - ay = 0.$$

Tangenta (T) în P este chiar perpendiculara în P pe OP, a cărei ecuație s-a mai scris.

Ecuația paralelei la Oy, dusă prin mijlocul segmentului OP, are ecuația $x = \frac{\lambda}{2}$.

Eliminînd pe λ între ultima ecuație și ecuația tangentei, obținem ecuația locului geometric cerut

$$x^2 = \frac{a}{2}(y - a);$$

aceasta este o paralelă tangentă la BC cu vîrful în B. Parametrul parabolei este $p = \frac{a}{8}$.

459. Fie A și B două puncte situate pe o parabolă cu vîrful O; proiectăm punctele A, B în A', B' pe tangenta în vîrf la parabolă.

a) Fie I simetricul vîrfului O față de focarul F și C' mijlocul segmentului $A'B'$. Să se arate că dreptele AB, $C'I$ sînt perpendiculare.

b) Dacă punctele A, B sînt mobile pe parabolă, iar intersecția dreptei AB cu tangenta în vîrf, este un punct fix, să se arate că intersecția dreptelor AB', $A'B$ descrie o dreaptă care trece prin vîrful O.

Facultatea da matematică-mecanică, București, 1962.

R. a) Considerăm parabola raportată la axa ei și la tangenta în vîrf. În acest caz, ecuația parabolei este $y^2 = 2px$, iar I are coordonatele $I(p, 0)$. Două puncte de pe parabolă au coordonatele $A\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right)$, proiecțiile pe tangenta în vîrf, $A'(0, y_1)$, $B'(0, y_2)$ și mijlocul segmentului $A'B'$ are coordonatele $C'\left(0, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Pantele segmentelor AB, $C'I$ sînt respectiv:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2 - y_1^2}{2p}} = \frac{2p}{y_1 + y_2}, \quad m' = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2}}{-p} = -\frac{y_1 + y_2}{2p},$$

ceea ce demonstrează că $(C'I)$ și (AB) sînt perpendiculare.

b) Notăm punctul fix prin care trece dreapta AB cu $L\ (0, k)$; dreapta LAB are ecuația $y-k=\lambda x$. Ordonatele y_1, y_2 ale punctelor A, B sînt date de ecuația

$$\lambda y^2 - 2py + 2pk = 0.$$

Scriem ecuațiile dreptelor AB', $A'B$:

$$(AB')\ 2p\,(y_2 - y_1)x + y_1^2\, y = y_1^2\, y_2,$$
$$(A'B)\ 2p\,(y_2 - y_1)x - y_2^2\, y = -\,y_2^2\, y_1$$

Coordonatele intersecției dreptelor AB', $A'B$ sînt:

$$x = \frac{(y_1y_2)^2}{2p\,(y_1^2 + y_2^2)} = \frac{k^2}{2\,(p - k\lambda)},\quad y = \frac{y_1y_2(y_1 + y_2)}{y_1^2 + y_2^2} = \frac{pk}{p - k\lambda}.$$

Eliminînd pe λ între relațiile care dau pe x și y, obținem $y = \frac{2p}{k}\,x$, adică locul intersecției dreptelor AB', $A'B$ este o dreaptă care trece prin originea axelor de coordonate.

460. Se dă parabola $y^2 = 2px$ și un punct $A\ (a, b)$.

a) Să se scrie ecuația de gradul al doilea care dă coeficienții unghiulari m_1 și m_2 ai tangentelor duse din A la parabolă.

b) Să se afle locul geometric al punctului A, știind că între m_1 și m_2 avem relația

$$m_1m_2\,(m_1 + m_2) = 1.$$

c) Să se găsească punctele de intersecție ale parabolei date cu locul geometric aflat

Examenul de maturitate, 1961.

R. a) Ecuația tangentei la parabola $y^2 = 2px$, de pantă m, fiind

$$y = mx + \frac{p}{2m},$$

pantele tangentelor duse din $A\,(a, b)$ verifică ecuația

$$b = ma + \frac{p}{2m}$$

sau

$$2am^2 - 2\,bm + p = 0.$$

b) Avînd $m_1m_2 = \frac{p}{2a}$ și $m_1 + m_2 = \frac{b}{a}$, relația dată devine $pb = 2a^2$, de unde rezultă că locul punctului A este parabola

$$y = \frac{2}{p}\,x^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Punctele de intersecție au drept coordonate soluțiile reale ale sistemului

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = \dfrac{2}{p}\, x^2 \end{cases}$$

care sînt

$$M_1\,(0,\ 0) \text{ și } M_2\left(\frac{p\sqrt[3]{4}}{2},\ p\sqrt[3]{2}\right).$$

461. Se consideră o parabolă și un punct A situat pe axa parabolei în interiorul ei. Prin A pivotează un unghi drept ale cărui laturi taie parabola în punctele M și N. Tangentele la parabolă în punctele M și N se întîlnesc în punctul P.

a) Să se găsească locul geometric al punctului P atunci cînd unghiul drept pivotează în A și să se reprezinte grafic.

b) În ce caz asimptotele curbei găsite sînt perpendiculare?

Facultatea de matematică și fizică, București, 1960.

R. a) Luăm axa parabolei (fig. 133) ca Ox și tangenta în vîrf ca Oy; atunci ecuația parabolei este $y^2 = 2px$. Luăm $A\,(a,\ 0)$ și $P\,(\alpha,\ \beta)$. Pantele m_1, m_2 ale tangentelor duse din P la parabolă sînt date de ecuația

$$2\alpha\, m^2 - 2\,\beta m + p = 0. \qquad (1)$$

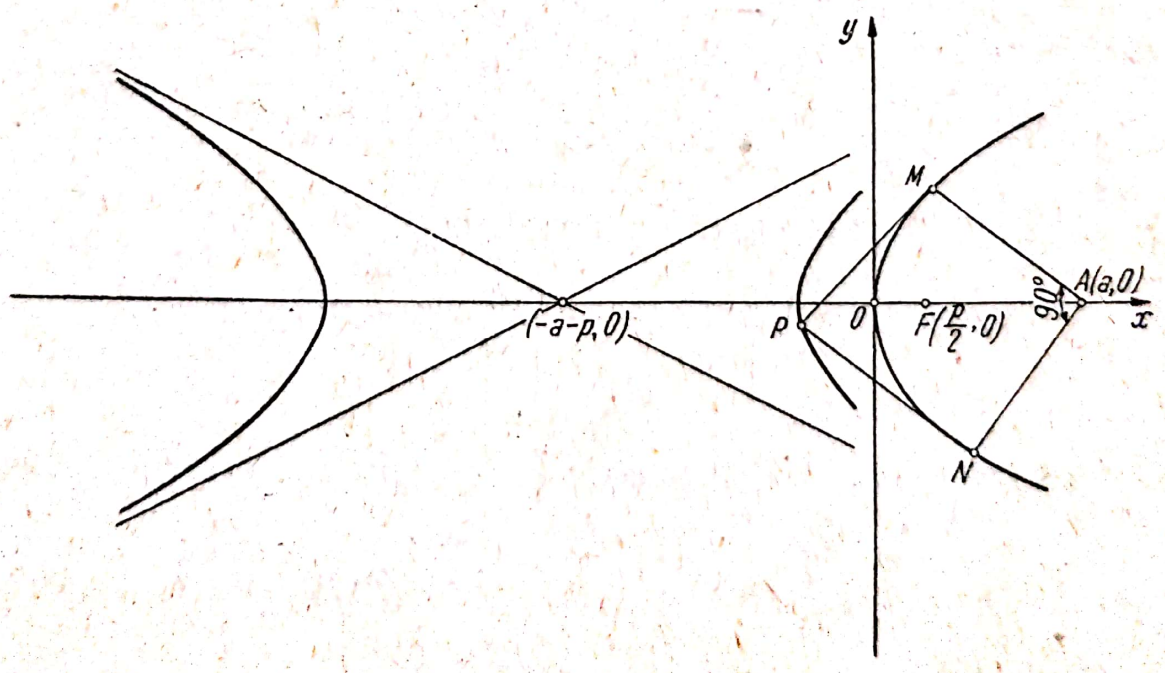


Fig. 133

Dacă ecuația unei tangente este $y = mx + \frac{p}{2m}$, punctul de contact are coordonatele $\left(\frac{p}{2m^2}, \frac{p}{m}\right)$.

Rezultă că punctele de contact ale tangentelor duse din P au coordonatele:

$$\left(\frac{p}{2m_1^2}, \frac{p}{m_1}\right), \quad \left(\frac{p}{2m_2^2}, \frac{p}{m_2}\right),$$

unde m_1, m_2 sînt rădăcinile ecuației (1).

Locul lui P îl aflăm scriind că $MA \perp NA$, adică

$$\frac{-\frac{p}{m_1}}{a - \frac{p}{2m_1^2}} \cdot \frac{-\frac{p}{m_2}}{a - \frac{p}{2m_2^2}} = -1;$$

sau $$\frac{4p^2 m_1 m_2}{p^2 - 2ap\,(m_1^2 + m_2^2) + 4a^2 m_1^2 m_2^2} = -1.$$

Știind că $m_1 m_2 = \frac{p}{2\alpha}$ și $m_1 + m_2 = \frac{p}{\alpha}$, ultima relație devine

$$\frac{2p^3\alpha}{p^2\alpha^2 - 2ap\,(\beta^2 - p\alpha) + a^2p^2} = -1.$$

Rezultă că punctul P se află pe o curbă loc geometric, a cărei ecuație în x, y este

$$y^2 = \frac{p}{2a}\,[x^2 + 2\,(a+p)\,x + a^2].$$

Această ultimă ecuație se poate pune sub forma

$$\frac{(x + a + p)^2}{p\,(p + 2a)} - \frac{y^2}{\frac{p^2\,(p + 2a)}{2a}} = 1,$$

de unde rezultă că locul geometric este o hiperbolă cu asimptotele

$$y = \pm \sqrt{\frac{p}{2a}}\,(x + a + p).$$

Graficul locului geometric este dat în figura 133.

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru ca asimptotele să fie perpendiculare, trebuie să avem

$$-\sqrt{\frac{p}{2a}} \cdot \sqrt{\frac{p}{2a}} = -1,$$

de unde rezultă că $a = \frac{p}{2}$, ceea ce înseamnă că A trebuie să coincidă cu focarul parabolei.

462. Se dă un sistem de axe ortogonale Ox și Oy, punctul A $(1, 0)$ și dreapta (D) de ecuație $x + 1 = 0$.

a) Să se scrie ecuația familiei de cercuri care trec prin punctul A și au centrul pe dreapta (D).

b) Fie P și Q. punctele de interesecție ale cercurilor cu dreapta (D), iar M și N punctele de intersecție ale tangentei dusă în A cu tangentele duse în P și Q. Se cere să se afle locul geometric al punctelor M și N.

Examenul de maturitate, septembrie, 1959.

R. a) Centrul unui cerc fiind situat pe D are coordonatele $C(-1, \lambda)$, unde λ este un parametru oarecare.

Ecuația cercului C este $(x + 1)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 4$, sau

$$x^2 + y^2 + 2x - 2\lambda y - 3 = 0.$$

b) Punctele P și Q vor avea coordonatele P $(-1, y_1)$ și Q $(-1, y_2)$, unde y_1 și y_2 sînt rădăcinile ecuației $y^2 - 2\lambda y - 4 = 0$. Unul din punctele M sau N se află la intersecția tangentei din A la cerc, a cărei ecuație este $2x - \lambda y - 2 = 0$ cu tangenta la cerc în P sau Q, a cărei ecuație este $y = y_i$ $(i = 1$ sau $2)$.

Așa fiind, locul punctelor M sau N se află eliminînd λ și y_i din ecuațiile

$$y = y_i; \quad 2x - \lambda y - 2 = 0 \quad \text{și} \quad y_i^2 - 2\lambda y_i - 4 = 0.$$

După eliminarea lui λ și y_i obținem ecuația

$$y^2 = 4x$$

care este o parabolă.

463. Se consideră cercul: $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ și punctul $M(R \cos \alpha, R \sin \alpha)$ situat pe acest cerc. Fie AA' și BB' diametrii situați pe axele Ox și Oy. Dreptele MA și MA' taie axa Oy în C și D, iar dreptele MB și MB' taie axa Ox în E și F.

a) Să se demonstreze că punctele C, D, E, F sînt așezate pe același cerc și să se scrie ecuația acestui cerc.

b) Să se găsească locul geometric al centrului acestui cerc, presupunînd că M se mişcă pe cercul dat.

Institutul de construcţii, Bucureşti, 1960.

R. a) Ecuaţiile dreptelor MA, MA', MB, MB' (fig. 134) sînt respectiv:

$(MA)\ y(1 - \cos\alpha) = -(x - R)\sin\alpha,$
$(MA')\ y(1 + \cos\alpha) = (x + R)\sin\alpha,$
$(MB)\ (y - R)\cos\alpha = -x(1 - \sin\alpha),$
$(MB')\ (y + R)\cos\alpha = x(1 + \sin\alpha).$

De aici deducem coordonatele punctelor C, D, E, F:

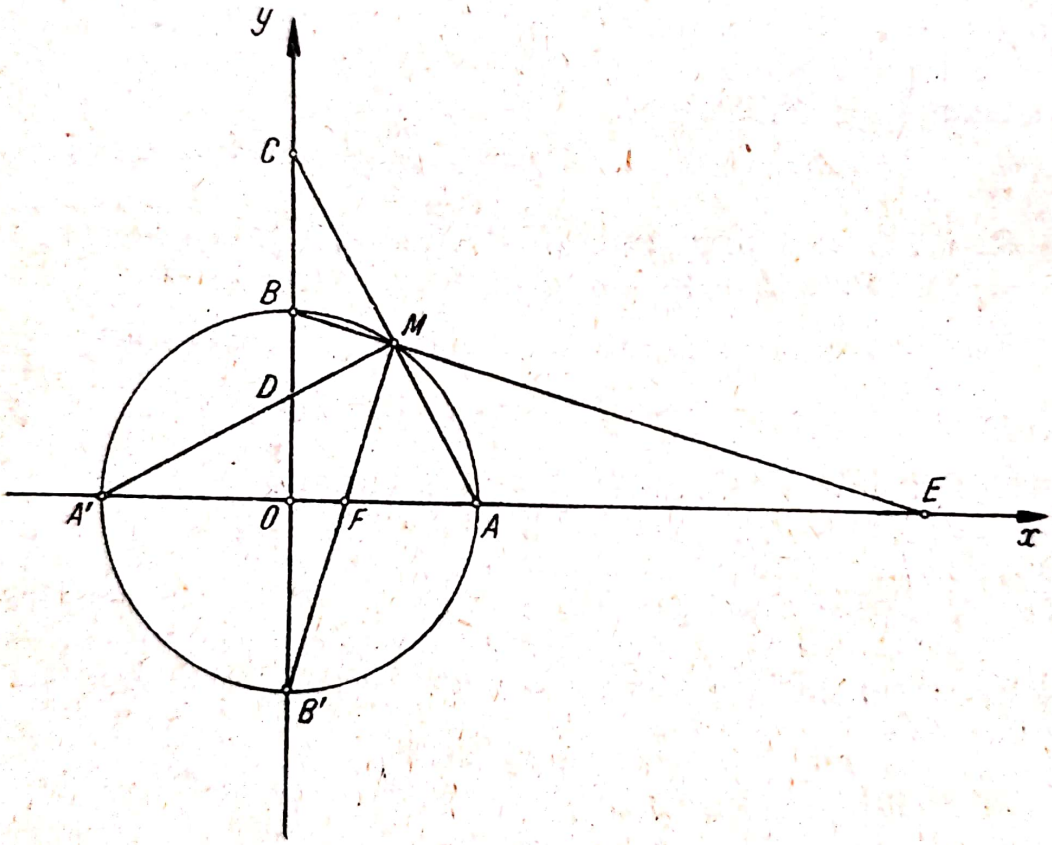


Fig. 134

$$C\left[0, \frac{R\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right],\ D\left[0, \frac{R\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right],\ E\left[\frac{R\cos\alpha}{1-\sin\alpha}, 0\right] \text{şi } F\left[\frac{R\cos\alpha}{1+\sin\alpha}, 0\right].$$

Pentru a arăta că C, D, E, F sînt conciclice, este suficient să demonstrăm că intersecţia I a mediatoarelor segmentelor CD şi EF se bucură de proprietatea

$$\overline{IC} = \overline{IE}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În acest scop, aflăm coordonatele punctului I care sînt:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{R\cos\alpha}{1-\sin\alpha} + \frac{R\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right) = \frac{R}{\cos\alpha} \text{ și}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{R\sin\alpha}{1-\cos\alpha} + \frac{R\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right) = \frac{R}{\sin\alpha}.$$

Din calcul rezultă

$$\overline{IC} = R\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} \quad \text{și} \quad \overline{IE} = R\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}$$

ceea ce demonstrează afirmația din enunț.

Ecuația cercului $CDEF$, după ce cunoaștem coordonatele $I\left(\frac{R}{\cos\alpha}, \frac{R}{\sin\alpha}\right)$ ale centrului și raza $R = \overline{IC} = \overline{IE}$, este

$$x^2 + y^2 - \frac{2R}{\cos\alpha}x - \frac{2R}{\sin\alpha}y + R^2 = 0.$$

b) Locul centrului cercului $CDEF$ se obține eliminînd α între ecuațiile $x\cos\alpha = R$ și $y\sin\alpha = R$. Se obține:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{R^2}, \tag{1}$$

care este o curbă de gradul al patrulea.

Pentru reprezentare, scoatem $y = \pm\frac{Rx}{\sqrt{x^2 - R^2}}$.

Ținînd seama că ecuația (1) este verificată de punctele $(x,-y)$ $(-x, y)$, $(-x, -y)$ odată cu (x, y), rezultă că graficul este o curbă care are pe Ox, Oy ca axe de simetrie, iar pe O ca centru de simetrie. De aceea, este suficient să reprezentăm porțiunea de curbă corespunzătoare valorilor lui x luate în intervalul

$$x \in (R, +\infty)$$

apoi prin simetrie față de Ox, Oy să obținem curba reprezentativă în întregime.

Cu ajutorul derivatei funcției $y = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 - R^2}}$,

$$y' = -\frac{R^3}{(x^2 - R^2)^{3/2}},$$

alcătuim tabloul variației funcției pentru $x \in (R, +\infty)$

x	R								$+\infty$
y'	—	—	—	—	—	—	—	—	—
y	∞	↘				↘			R

Curba respectivă a locului căutat este deci cea redată în fig. 135.

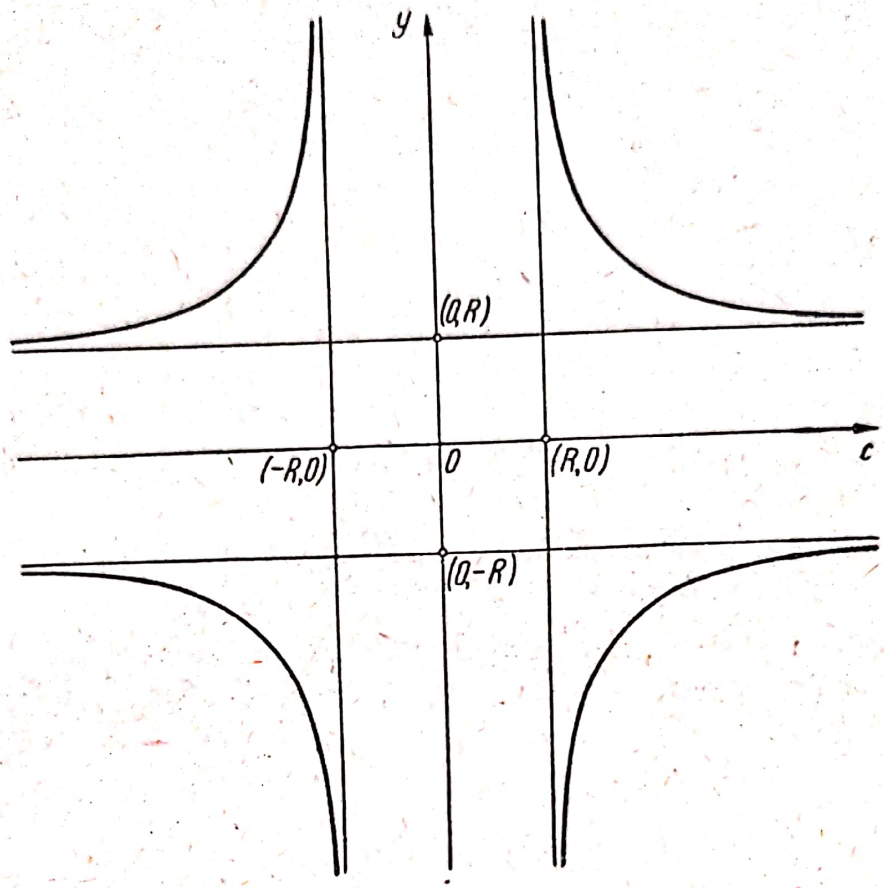


Fig. 135

B. Execiții și probleme urmate de răspunsuri și indicații. Examenele de bacalaureat și de admitere în învățământul superior înainte de reforma învățământului din 1948

464. Se dau punctele P și Q.

a) Să se găsească coordonatele punctului R, simetricul lui P față de Q.

b) Se dau A, B, C. Fie H simetricul lui A față de B; K simetricul lui H față de C; L simetricul lui K față de A; M mijlocul lui LA. Să se găsească coordonatele punctelor H, K, L. M.

c) Să se arate că A și B, M și C sînt vîrfurile opuse ale unui paralelogram.

R. a) Dacă $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ atunci $R(2x_2 - x_1, 2y_2 - y_1)$.

b) Pentru determinarea coordonatelor punctelor H, K, L se aplică rezultatul de la punctul (a).

c) Se constată că pantele dreptelor AC, MB sînt egale; de asemenea sînt egale și pantele dreptelor AM, BC.

Scanned with OKEN Scanner

465. Se dă un triunghi isoscel ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$) și un punct M variabil, pe BC. Din M se duc perpendiculare pe AB și AC pe care le taie, respectiv, în P și Q. Să se afle:

a) Coordonatele punctelor P și Q.

b) Să se arate, geometric sau analitic, că suma $\overline{MP} + \overline{MQ} = k$ egală cu mărimea înălțimii duse din B (sau C).

c) Locul geometric al lui N, mijlocul lui $\overline{PQ}$.

R. a) Notînd $A\,(0, h)$, $B\,(-a, 0)$, $C\,(a;\ 0)$ și $M\,(\lambda, 0)$, se găsește

$$P\left[\frac{a(\lambda a - h^2)}{a^2+h^2}, \frac{ah(\lambda + a)}{a^2+h^2}\right], Q\left[\frac{a(a\lambda + h^2)}{a^2+h^2}, \frac{ah(a-\lambda)}{a^2+h^2}\right].$$

b) Se calculează $|\overline{MP}| + |\overline{MQ}|$ prin formula distanței de la un punct pînă la o dreaptă dată prin ecuația ei. Se găsește pentru cazul $\lambda \in [-a, a]$, $k = \frac{2ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

c) Locul geometric este dreapta $y = \frac{ha^2}{a^2+h^2}$.

466. Se consideră două axe de coordonate perpendiculare Oxy și punctele $A\,(a, 0)$, $B\,(0, b)$ unde a și b sînt numere pozitive. Se construiește dreptunghiul $OACB$ și se cere:

a) Să se determine coordonatele punctului C.

b) Să se scrie ecuația dreptei (D), perpendiculară pe AB și care trece prin punctul C.

c) Să se arate că, dacă a și b variază astfel încît perimetrul dreptunghiului $OACB$ să rămînă constant și egal cu $2p$, dreapta (D) trece printr-un punct fix M. Să se determine coordonatele punctului M.

R. a) $C\,(a, b)$.

b) $ax - by - a^2 + b^2 = 0$.

c) Punînd $a + b = k$, ecuația dreptei devine

$$a(x + y - 2k) + k(k - y) = 0,$$

care trece prin punctul fix $I\,(k, k)$.

467. Se dă un cerc al cărui centru are coordonatele $(2, -2)$ și care trece prin O.

a) Să se scrie ecuația tangentei în O la acest cerc.

b) Să se găsească punctele A și B unde acest cerc întîlnește axele.

c) Să se arate că AB este un diametru al cercului.

d) Pe fiecare dintre corzile AO și OB ca diametru, se descrie cîte un cerc. Să se găsească analitic centrul radical al celor trei cercuri

Scanned with OKEN Scanner

Să se explice geometric toate rezultatele obținute.

R. a) Cercul are ecuația $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$ și prin urmare tangenta în O este $y = x$.

b) A (4, 0), B (0,—4).

c) Mijlocul segmentului AB are coordonatele (2, —2) adică pe acelea ale centrului cercului.

d) $(OA)\ x^2 + y^2 - 4x = 0$; $(OB)\ x^2 + y^2 - 4y = 0$,

deci axele radicale ale celor trei cercuri, luate două cîte două, sînt: $y = 0$; $x = 0$ și $y = x$, care se întretaie în O (0, 0).

468. Se consideră sistemul

$$D_1 \equiv (\lambda + 1)\, x - 3y + 3 = 0$$
$$D_2 \equiv 2x + (\lambda - 3)\, y - 2 = 0$$
$$D_3 \equiv x - 2y + \lambda + 3 = 0.$$

a) Să se determine valorile lui λ, astfel încît sistemul să fie compatibil.

b) Să se interpreteze analitic rezultatul.

c) Să se afle locul geometric al intersecției perpendicularei din origine pe dreapta D_1, presupunînd că λ variază.

R. a) λ poate avea una din valorile: 1; 2; —4.

b) Pentru fiecare valoare a lui λ de la pct. (a) corespund trei drepte (D_1, D_2, D_3) concurente.

c) Locul geometric căutat este cercul $x^2 + y^2 - y = 0$.

469. Se dau două drepte variabile depinzînd de un parametru arbitrar

$$mx - y + 2m = 1, \quad x + my - m = 9.$$

a) Să se determine poziția relativă a acestor două drepte și să se arate că fiecare dintre ele trece prin cîte un punct fix.

b) Se cere locul geometric al punctului lor de intersecție.

c) Să se scrie ecuația tangentei la acest loc geometric în punctul de abscisă șase și ordonată pozitivă și să se calculeze aria triunghiului format de ea cu axele de coordonate.

R. a) Dreptele sînt concurente pentru orice valoare a lui m, Prima trece prin punctul fix L (—2; —1), iar a doua prin M (9;1)

b) Cercul $x^2 + y^2 = 7x + 19$.

c) Ecuația tangentei este $x + 2y = 16$ și aria căutată, 64.

470. Se dă un cerc de rază R cu centrul în origine și care taie direcția pozitivă a axei absciselor în punctul A. Cu vîrful în acest punct, se înscrie în cerc un triunghi echilateral ABC.

a) Să se găsească coordonatele vîrfurilor acestui triunghi.

Scanned with OKEN Scanner

b) Fie M intersecția lui AB cu axa ordonatelor; în M se duce o perpendiculară pe AB. R variind, să se găsească locurile geometrice ale intersecțiilor acestei perpendiculare cu celelalte două laturi ale triunghiului.

c) În ipoteza $R = 1$, punctele A, B, C fiind considerate afixele cantităților complexe z_1, z_2, z_3, să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sînt z_1, z_2, z_3 și să se arate că $z_2 = z_3^2$ și $z_3 = z_2^2$.

R. a) $A\,(R, 0)$, $B\left(-\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{R}{2}, -\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) Locurile geometrice sînt dreptele: $x - y\sqrt{3} = 0$ și $2x - y\sqrt{3} = 0$.

c) $(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$.

Presupunînd z_2, z_3 cele două rădăcini diferite de 1, se calculează z_2^2, z_3^2 de unde se constată $z_2^2 = z_3$ și $z_3^2 = z_2$.

471. În triunghiul isoscel ABC $(\overline{AB} = \overline{AC})$, fie D piciorul înălțimii din A pe BC.

a) Să se arate că perpendiculara din D pe AC este tangentă în D la cercul ABD.

b) Dacă M este un punct variabil pe cercul ABD, să se găsească locul geometric al centrului G de greutate al triunghiului ABM.

c) Să se explice geometric aceste rezultate.

R. a) Luînd $D\,(0, 0)$, $B\,(-a, 0)$, $C\,(a, 0)$ și $A\,(0, p)$, ecuația cercului ABD este $x^2 + y^2 + ax - py = 0$, iar ecuația tangentei în D este $ax - py = 0$. Scriind ecuația perpendicularei DE din D pe AC, găsim tot $ax - py = 0$.

b) Locul căutat este cercul de ecuație

$$9\,(x^2 + y^2 + ax - py) + 2\,(a^2 + p^2) = 0.$$

c) Se arată că DE este perpendiculară pe dreapta care unește mijlocul segmentului AB cu D.

Pentru determinarea locului geometric se observă că una din pozițiile centrului G de greutate se află la distanța $\frac{1}{3}$ din mediana vîrfului D, de mijlocul segmentului AB.

472. a) Fiind dată o dreaptă de pantă m, să se calculeze panta unei drepte care face cu prima dreaptă un unghi de 45°. Cîte soluții se obțin?

b) Vîrfurile opuse A și C ale unui pătrat au, respectiv, coordonatele $(a, 0)$ și $(0, 1)$ Să se calculeze coordonatele celorlalte două valori, B și D, folosindu-se rezultatul de la primul punct

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se explice geometric rezultatul obținut, prin considerarea cercului circumscris pătratului $ABCD$.

R. a) $m_1 = \frac{m-1}{m+1}$ și $m_2 = \frac{1+m}{1-m}$.

b) $B\left(\frac{1+a}{2}, \frac{1+a}{2}\right)$, $D\left(\frac{a-1}{2}, \frac{1-a}{2}\right)$.

c) Se arată că OB este prima bisectoare a axelor, iar OD bisectoarea a doua și că $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ sînt diametri ai cercului $ABCD$.

473. Se dă cercul $x^2 + y^2 - x - y + 2 = 0$ și dreapta $2x + y - 1 = 0$.

a) Să se scrie ecuația familiei de cercuri care, împreună cu cercul dat, au ca axă radicală dreapta dată.

b) Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor de la punctul (a).

c) Locul geometric va fi o dreaptă. Această dreaptă este tangentă la un cerc în punctul $A\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, care mai trece și prin punctul B (1, 2). Să se scrie ecuația acestui cerc.

R. a) $x^2 + y^2 + (2\lambda - 1)x + (\lambda - 1)y - \lambda + 2 = 0$.

b) Dreapta de ecuație $2x - 4y + 1 = 0$.

c) $2x^2 + 2y^2 - 5x - 6y + 7 = 0$.

474. a) Să se construiască curbele:

(C) $\quad x^2 + y^2 - 2ax = 0 \quad (a > 0)$

(C') $\quad x^2 + y^2 + 2bx = 0 \quad (b > 0)$

b) O dreaptă dusă prin origine, de coeficient unghiular m, mai taie curba (C) în punctul M. Perpendiculara pe această dreaptă, dusă tot prin origine, mai taie curba (C') în punctul N. Să se arate că tangenta la curba (C) în punctul M este paralelă cu tangenta la curba (C') în punctul N.

c) Să se găsească locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului OMN cînd m variază și să se construiască curba aflată.

R. a) Primul cerc are centrul C $(a, 0)$ și raza a, iar al doilea centrul C' $(-b, 0)$ și raza b.

b) Se arată că cele două tangente în M, respectiv N, au aceeași pantă $\frac{m^2-1}{2m}$.

c) Locul geometric este cercul

$$x^2 + y^2 + (b - a)\, x - ab = 0$$

care are centrul în $I\left(\frac{a-b}{2}, 0\right)$ și raza $R = \frac{a+b}{2}$.

475. a) Să se scrie ecuația generală a cercurilor care sînt tangente în origine dreptei (D) $y = 2x$.

b) Să se determine, dintre cercurile precedente, acelea care mai sînt tangente și dreptei (D') de ecuație

$$2x + y - 1 = 0.$$

Să se afle coordonatele punctelor de contact ale acestor cercuri cu dreapta.

c) Un cerc oarecare al familiei de cercuri date intersectează axele de coordonate Ox, Oy, respectiv, în punctele A, B, diferite de origine. Cercurile cu centrele în A, B și trecînd prin origine se mai taie într-un alt punct M diferit de origine. Să se afle locul geometric al acestui punct M.

R. a) $x^2 + y^2 - 2\lambda x + \lambda y = 0$, unde λ este un parametru.

b) Două cercuri: unul care corespunde valorii $\lambda = -1$ cu punctul de tangență $T(0, 1)$ și altul, valorii $\lambda = \frac{1}{4}$ cu punctul de tangență $T'\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

c) Dreapta $y = -2x$.

476. În planul a două axe ortogonale xOy, se dă o dreaptă fixă Oz. Se dau două puncte variabile, A pe Ox și B pe Oz, așa fel ca distanța AB să fie egală cu o constantă a, $\overline{AB} = a$.

a) Să se afle ecuația cercului circumscris triunghiului OAB.

b) Să se afle locul geometric al centrelor acestor cercuri.

c) Perpendicularele în A pe Ox și în B pe Oz se întîlnesc în M. Să se afle locul geometric al punctului M.

d) Perpendiculara în A pe Ox taie Oz în C, iar perpendiculara în B pe Oz taie Ox în D. Să se arate că distanța CD este constantă, atunci cînd punctele A și B variază astfel încît distanța să fie constantă.

R. a) Dacă Oz are ecuația $y = mx$, atunci cercul OAB are ecuația

$m(x^2 + y^2 - \lambda x) + [\lambda - \mu(1 + m^2)]\, y = 0$; λ, μ sînt parametri.

b) Cercul $4m^2(x^2 + y^2) = a^2(1 + m^2)$.

c) Cercul $m^2(x^2 + y^2) = a^2(1 + m^2)$

d) Se arată că $\overline{CD} = a\sqrt{1 + m^2}$.

477. Raportul dintre axa mică și cea mare a unei elipse (E) este x. Se cere:

a) Să se calculeze raportul S dintre aria elipsei (E) și aria cercului (C) care are ca diametru distanța focală a elipsei (E).

b) Să se arate că $x < S$.

c) Ce condiție trebuie satisfăcută pentru ca cercul (C) să taie elipsa (E)?

R. *a)* $S = \frac{x}{1 - x^2}$.

b) Aceasta rezultă din faptul că $\frac{x}{S} = 1 - x^2$ și că $0 < x < 1$.

c) $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

478. Un segment de dreaptă de lungime constantă alunecă pe două axe dreptunghiulare Ox, Oy. Se consideră un punct M situat pe acest segment, la depărtările de $\frac{5}{3}$ și $\frac{10}{3}$ de punctele unde segmentul se reazimă pe axe. Se cere:

a) Ecuația locului geometric al punctului M, reprezentarea lui și elementele lui principale.

b) Ce coordonate are punctul M, dacă unghiul α făcut de segment cu axa Ox verifică relația $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

c) Fiind cunoscute coordonatele lui M, să se scrie ecuația unei drepte variabile care trece prin acest punct și să se afle locul geometric al piciorului perpendicularei din origine pe această dreaptă.

d) Punctul M aparține ambelor locuri: să se afle unghiul u al tangentelor la cele două curbe în punctul M.

R. a) Locul este elipsa $9x^2 + 36y^2 - 100 = 0$ cu $a = \frac{10}{3}$, $b = \frac{5}{3}$ și $c = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

b) M poate avea coordonatele $\left(\pm 2, \pm \frac{4}{3}\right)$.

c) Presupunînd $M\left(2, \frac{4}{3}\right)$, locul geometric căutat este cercul $3(x^2 + y^2 - 2x) - 4y = 0$.

d) $\operatorname{tg} u = \frac{18}{25}$.

Scanned with OKEN Scanner

479. Se dă elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

și dreapta

$$ux + vy + w = 0.$$

Să se afle condiția ca dreapta să fie tangentă elipsei.

Ca aplicație, să se rezolve problema următoare:

Știind că dreptele

$$5x + 16y + 52 = 0, \quad 9x + 16y + 60 = 0$$

sînt tangente elipsei, să se afle ecuația elipsei. Să se afle apoi coordonatele punctelor de contact al tangentelor.

R. $a^2u^2 + b^2v^2 = w^2$.

Aplicație. Ecuația elipsei este $9x^2 + 16y^2 = 144$.

Prima dreaptă are punctul de contact $T\left(-\frac{20}{13}, -\frac{36}{13}\right)$ iar a doua $T'\left(-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}\right)$.

480. Se consideră o elipsă și cercul principal al ei (descris pe axa mare ca diametru). Fie M un punct variabil pe curbă; perpendiculara din M pe axa mare taie cercul principal în P și Q.

a) Normala în M la elipsă taie dreptele OP și OQ în P' și Q' respectiv. Să se arate că M este mijlocul lui $\overline{P'Q'}$.

b) Să se afle locurile geometrice ale punctelor P' și Q'.

c) Tangenta în M la elipsă taie axa mare în T. Să se arate că patrulaterul $OQ'TP'$ este inscriptibil.

R. a) Dacă $M(x_0, y_0)$, atunci $P'\left[\left(1 + \frac{b}{a}\right)x_0, \left(1 + \frac{a}{b}\right)y_0\right]$ $Q'\left[\left(1 - \frac{b}{a}\right)x_0, \left(1 - \frac{a}{b}\right)y_0\right]$ ceea ce demonstrează afirmația.

b) Locul lui P' este un cerc cu centrul O și raza $a + b$ iar al lui Q' un cerc cu același centru și raza $a - b$.

c) Se găsește $T\left(\frac{a^2}{x_0}, 0\right)$ și se arată că $\sphericalangle OQ'P' = \sphericalangle OTP'$.

481. Se dau curbele $x^2 - y^2 = 5$ și $xy = 6$.

a) Să se specifice natura lor și să se reprezinte grafic.

b) Să se găsească coordonatele punctelor de intersecție.

c) Să se verifice că ele se taie ortogonal.

d) Tangentele în punctul lor de intersecție din primul cadran taie asimptotele respective în cîte două puncte.

Să se arate că cele patru puncte formează un pătrat.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Hiperbole echilatere cu același centru și asimptote bisectoarele axelor, respectiv axele Ox, Oy.

b) M (3; 2) și M' (—3, —2);

c) Se arată că tangentele din M, respectiv cele din M' sînt perpendiculare.

d) Cele patru puncte sînt: I (1 ,—1), J (5, 5), K (0, 4), L (6, 0) care formează un pătrat.

482. Se consideră două axe ortogonale, Ox și Oy. Pe axa Ox se iau două puncte variabile P $(u, 0)$, Q $(v, 0)$, ale căror abscise au produsul 25. Prin P se duce o paralelă la prima bisectoare a axelor, iar prin Q, o paralelă la cea de a doua bisectoare.

a) Se cere locul geometric al punctului M, intersecția acestor două drepte variabile. Să se traseze curba găsită.

b) Să se găsească punctele de intersecție a curbei cu dreapta de ecuație $x = 13$, calculîndu-li-se coordonatele.

c) Să se scrie ecuațiile tangentelor la curbă în punctele găsite la (b) și să se calculeze aria triunghiului format de ele cu coarda contactelor.

R. a) Hiperbola echilateră $x^2 - y^2 = 25$.

b) L (13, 12) și M (13, —12).

c) Ecuațiile tangentelor sînt $13x \pm 12y = 25$, iar aria căutată $A = \frac{1728}{13}$.

483. Se dă un punct M (α, β) raportat la axele ortogonale Ox și Oy. Pe dreapta OM, se alege un punct N situat între O și M așa ca să avem $\overline{ON} = \frac{a^2}{OM}$. Se cere:

a) Să se găsească coordonatele punctului N și acelea ale punctului P, simetricul lui N față de axa Ox.

b) Să se calculeze coordonatele punctului Q mijlocul segmentului MP.

c) Care este locul geometric descris de Q dacă punctul M descrie prima bisectoare a axelor.

d) Generalizare pentru cazul cînd M descrie o dreaptă oarecare trecînd prin origine.

R. a) $N\left(\frac{a^2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \frac{a^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)$; $P\left(\frac{a^2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, -\frac{a^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)$.

b) $Q\left[\frac{\alpha^3+\alpha\beta^2+\alpha a^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}; \frac{\alpha^2\beta+\beta^3-a^2\beta}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right]$.

c) Hiperbola echilateră $2(x^2 - y^2) = a^2$.

d) Dacă dreapta descrisă de M este $y = mx$, atunci locul este hiperbola

$$(1 + m^2)(m^2x^2 - y^2) = m^2a^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

484. Se dă hiperbola $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ și un punct $M(\alpha, \beta)$ pe ea. Se cere:

a) Ecuația tangentei la hiperbolă în punctul M, ecuația perpendicularei pe Ox dusă prin punctul unde tangenta taie axa Ox și ecuația dreptei OM.

b) Locul geometric al punctului de intersecție a perpendicularei cu OM, cînd punctul M se mișcă pe hiperbolă.

c) Rezolvînd ecuația locului geometric în raport cu y și luînd rezultatul cu semnul plus, să se studieze variația funcției obținute și să se facă reprezentarea grafică. Prin simetrie se va completa reprezentarea grafică a locului geometric de la punctul (b).

R. a) Ecuația tangentei: $\alpha x - 4\beta y - 4 = 0$; ecuația perpendicularei: $\alpha x = 4$ și a dreptei OM: $\beta x - \alpha y = 0$.

b) Curba de gradul al patrulea: $4x^2 - 16y^2 - x^4 = 0$.

d) Graficul variației este curba din fig. 136 (o lemniscată).

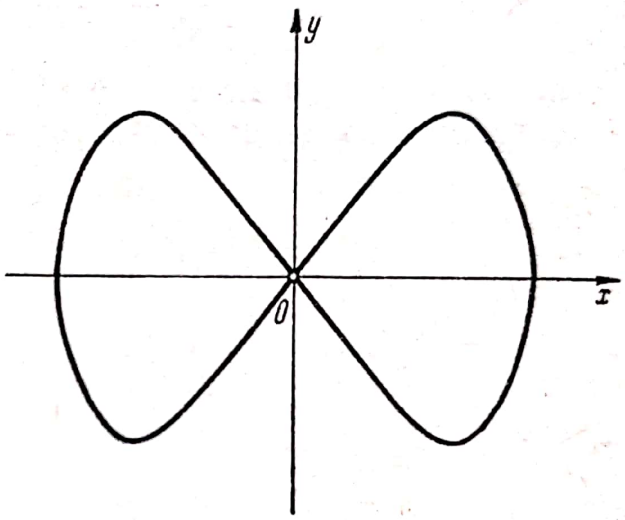


Fig. 136

485. Se dă o hiperbolă echilateră $x^2 - y^2 = 4$ și se duce o dreaptă variabilă, paralelă cu Ox, care întîlnește hiperbola în două puncte, E și D. Se unește E cu A, A fiind un vîrf al hiperbolei, și D cu O. Aceste drepte se întîlnesc în M.

a) Să se arate că locul geometric al punctului M este o elipsă cu axele paralele cu axele de coordonate.

b) Să se construiască elipsa, determinîndu-se centrul și vîrfurile și să se arate că ea este tangentă interior cercului cu centrul în origine și cu raza 2.

c) Să se calculeze derivata lui $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

R. a) Locul geometric este elipsa $3x^2 + y^2 - 8x + 4 = 0$.

b) Punînd ecuația de la punctul (a) sub forma

$$3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{3},$$

se constată că centrul elipsei este în $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, iar semiaxele sînt $a = \frac{2}{3}$; $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

c) Se găsește

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

486. Se consideră funcția

$$y = \frac{bx}{\pm\sqrt{a^2-x^2}}, \qquad (1)$$

a) Să se arate că, proiectînd un punct de pe curba reprezentativă a acestei funcții pe axele de coordonate, dreapta care unește proiecțiile este tangentă la hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

b) Să se determine a și b din funcția (1) astfel, încît curba ei reprezentativă să fie tangentă la dreapta $5x - 2y - 8 = 0$, în punctul de abscisă 2.

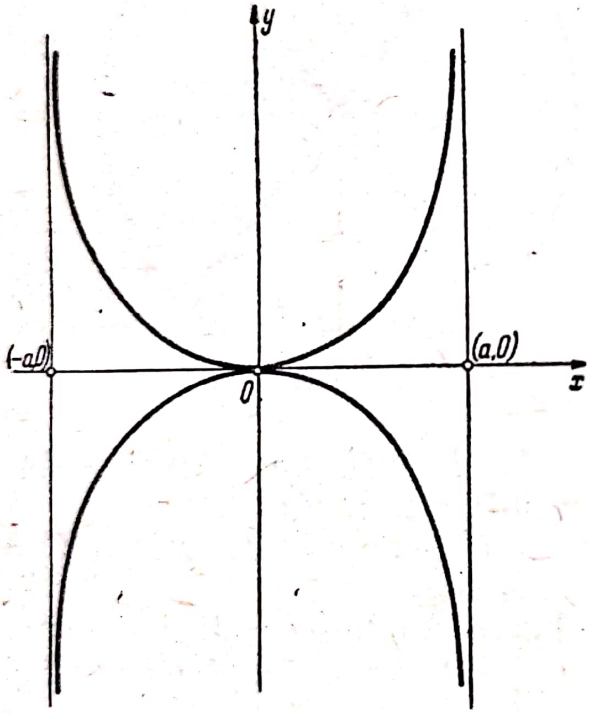


Fig. 137

c) Să se construiască curba în acest caz.

R. a) Dacă $M(\alpha, \beta)$ este un punct de pe curbă, se arată că dreapta PQ, de ecuație $\beta x + \alpha x - \alpha\beta = 0$, taie hiperbola în puncte confundate.

b) $a = \pm\sqrt{5}$; $\quad b = \pm\frac{1}{2}$.

c) Curba este arătată în fig. 137.

487. Se dă o dreaptă fixă (D), un punct fix O și punctul M mobil pe dreapta (D). Perpendiculara în M pe (D) și perpendiculara în O pe dreapta OM se întîlnesc în P. Să se găsească locul geometric al punctului P.

R. Se iau ca axe o paralelă prin O la (D) și perpendiculara din O pe D. Dacă $x = -a$ este ecuația dreptei D, se găsește ecuația locului geometric, $y^2 = ax$, care este o parabolă cu vîrful în origine și cu focarul $F\left(\frac{a}{4}, 0\right)$.

488. Se consideră punctul M variabil pe parabola $y^2 = 2px$. Tangenta și normala în M la parabolă intersectează axa Ox, respectiv în T și N. Se cere:

a) Să se arate că punctele T și N sînt simetrice față de focarul F al parabolei.

b) Dreapta MF paralelă prin N la MT și paralela prin T la MN sînt concurente.

c) Locul geometric al punctului de intersecție a perpendicularei din F pe MT cu dreapta care unește vîrful O al parabolei cu punctul M.

R. a) Dacă $M(x_0, y_0)$, atunci $T(-x_0, 0)$ și $N(x_0 + p, 0)$, ceea ce justifică afirmația.

b) (MF) are ecuația $y_0(2x - p) = y(2x_0 - p)$,
(NP) ecuația $yy_0 = p(x - x_0 - p)$ și
(TP) $py + y_0(x + x_0) = 0$, care formează un sistem compatibil.

c) Locul geometric este elipsa $2x^2 + y^2 - px = 0$.

489. Prin originea O a axelor de coordonate, se duce o dreaptă variabilă (D). Din $A(a, 0)$ se lasă o perpendiculară pe (D), care întîlnește axa Oy în B. Prin B se duce o paralelă la Ox, care întîlnește pe (D) în M. Se cere:

a) Locul geometric al punctului M, cînd dreapta (D) se rotește în jurul originii.

b) Locul geometric căutat fiind o conică și M un punct pe ea, se cere să se arate că distanța de la focarul F al curbei la tangenta în M este $\sqrt{\overline{OF} \times \overline{MD}}$, D fiind piciorul perpendicularei dusă din M pe directoare.

c) Locul geometric al punctului de intersecție a normalei în M cu perpendiculara dusă din focar pe coarda OM.

R. a) Parabola $y^2 = ax$ cu focarul $F\left(\frac{a}{4}, 0\right)$.

b) Notînd ordonata lui M cu λ, atunci avem distanța FI pînă la tangentă egală cu $\frac{1}{4}\sqrt{a^2 + 4\lambda^2}$, $\overline{OF} = \frac{a}{4}$ și $\overline{MD} = \frac{a^2 + 4\lambda^2}{4a}$, ceea ce dovedește că $\overline{FI} = \sqrt{\overline{OF} \times \overline{MD}}$.

c) Locul geometric este curba de ecuație

$$64x^3 - 80ax^2 + 28a^2x - 3a^3 = 128ay^2.$$

490 Se dă dreapta $4x - y - 4 = 0$ și o curbă

$$y^2 = (a + 5)x + a - 3$$

a) Să se determine a astfel, încît dreapta să taie curba în punctul de abscisă 2.

b) Fie D punctul unde directoarea curbei taie axa Ox. Să se arate că tangenta la curbă în punctul de abscisă 2 trece prin D.

c) Fie P punctul unde tangenta într-un punct M, variabil pe parabolă, taie axa Oy. Din P ducem o paralelă la Ox, care taie dreapta OM în N. Să se afle locul geometric al punctului N cînd punctul M descrie parabola.

R. a) $a = 3$.

b) $D(-2, 0)$ verifică ecuaţia tangentelor în punctele de abscisă 2: $y = \pm(x + 2)$.

c) Locul geometric este parabola $y^2 = 4x$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V

ANALIZA MATEMATICĂ

A. Exerciții și probleme rezolvate

491. Se consideră funcția $f(x) = 2\,\mathrm{tg}^4 x + 4\,\mathrm{tg}^2 x - \dfrac{2}{\cos^4 x}$ și se cere:

a) să se arate că $f(x)$ are o valoare independentă de x;

b) considerînd pe $f(x)$ sub forma dată, se cere derivata $f'(x)$

Institutul de mine, Petroșeni 1961.

R. a) Avem, succesiv

$$f(x) = \frac{2(\sin^4 x - 1)}{\cos^4 x} + \frac{4\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{-2(1+\sin^2 x)}{\cos^2 x} + \frac{4\sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{-2(1-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = -2.$$

b) Derivata funcției $f(x)$ considerată sub forma dată este

$$f'(x) = \frac{8\,\mathrm{tg}^3 x}{\cos^2 x} + \frac{8\,\mathrm{tg}\, x}{\cos^2 x} - \frac{8\sin x}{\cos^5 x} = \frac{8\,\mathrm{tg}\, x(1+\mathrm{tg}^2 x)}{\cos^2 x} - \frac{8\sin x}{\cos^5 x},$$

sau:

$$f'(x) = \frac{8\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{8\sin x}{\cos^5 x} = 0.$$

492. Fie funcția

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}.$$

a) Să se calculeze $f'(x)$.

b) Să se găsească punctele de extrem ale funcției $f(x)$.

Institutul politehnic, Iași, 1961.

R. a) $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Maximele și minimele funcției au loc pentru $x = \pm 1$. Pentru $x = -1$. avem un maxim egal cu 2, iar pentru $x = 1$, un minim egal cu $\frac{2}{3}$.

493. Pentru ce valoare a lui x, cuprinsă între 1 și 64, funcția $f(x) = (\log_2 x)^4 + 12 (\log_2 x)^2 \log_2 \left(\frac{8}{x}\right)$ are valoarea maximă?

Facultatea de matematică și fizică, București, 1961.

R. Ținînd seama că $\log_b a = \frac{\lg a}{\lg b}$ (unde $\lg N$ este logaritmul zecimal al lui N), putem scrie

$$f(x) = \left(\frac{\lg x}{\lg 2}\right)^4 + 12 \left(\frac{\lg x}{\lg 2}\right)^2 \cdot \frac{3 \lg 2 - \lg x}{\lg 2}.$$

Notînd $\lg x = X$ și $\lg 2 = a$, expresia de mai sus devine

$$f(x) = \left[\frac{X (6a - X)}{a^2}\right]^2.$$

Întrucît $X = \lg x > 0$ pentru că $x > 1$ și $X = \lg x < 6a = 6 \lg 2 = \lg 64$ (s-a dat x cuprins între 1 și 64), rezultă că $X(6a - X)$ este un produs de doi factori variabili, pozitivi, a căror sumă este constantă și egală cu $6a$. Deducem astfel că $f(x)$ are o valoare maximă atunci cînd $X = 6a - X$, sau $\lg x = 3a = \lg 2^3$; deci $f(x)$ are o valoare maximă, în condițiile date, atunci cînd $x = 8$.

494. Să se găsească maximele și minimele funcției $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1961

R. Funcția $f(x)$ se poate simplifica. Ținînd seama că $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, avem

$$f(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x),$$

sau

$$f(x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x.$$

Avînd în vedere că $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, $f(x)$ capătă o formă și mai simplificată

$$f(x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a afla maximele și minimele funcției $f(x)$, calculăm derivatele $f'(x) = -3 \sin 2x \cos 2x = -\frac{3}{2} \sin 4x$ și $f''(x) = -6 \cos 4x$.

Maximele și minimele funcției $f(x)$ au loc pentru acele valori pentru care avem $f'(x) = 0$, sau $\sin 4x = 0$, adică pentru $x = \frac{k\pi}{4}$.

Calculăm $f''\left(\frac{k\pi}{4}\right) = -6 \cos k\pi = 6(-1)^{k+1}$

Rezultă: dacă numărul $k = 2p$, atunci $f''\left(\frac{k\pi}{4}\right) = f''\left(\frac{p\pi}{2}\right) < 0$ astfel că pentru $\frac{p\pi}{2} = \frac{k\pi}{4}$ funcția $f(x)$ are maxime egale cu

$$f\left(\frac{k\pi}{4}\right) = f\left(\frac{p\pi}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 p\pi = 1,$$

iar dacă avem $k = 2p - 1$, atunci $f''\left(\frac{k\pi}{4}\right) > 0$ și prin urmare pentru $x = \frac{(2p-1)\pi}{4}$ funcția $f(x)$ are minime egale cu

$$f\left[\frac{(2p-1)\pi}{4}\right] = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 \frac{(2p-1)\pi}{2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

495. Să se găsească valorile maxime și minime ale funcției

$$f(x) = \sin^2 x + p \sin x + q$$

pe segmentul $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1961.

R. Valorile maxime și minime ale funcției le obținem pentru acele valori ale lui x pentru care derivata

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + p \cos x = \cos x (2 \sin x + p)$$

se anulează. Aceste valori, de pe segmentul dat, sînt

$$x_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} \text{ și } x_3 = -\arcsin \frac{p}{2}, \quad (-2 \leqslant p \leqslant 2)$$

$\left(\arcsin \frac{p}{2}\right.$, determinarea principală$\left.\right)$.

Valorile x_1, x_2 fiind extremitățile intervalului, expresiile $f(x_1)$, $f(x_2)$ nu sînt nici maxime, nici minime. Singura valoare

pentru care $f(x)$ este maximă sau minimă este x_3. Pentru a stabili ce avem pentru x_3, calculăm $f''(x_3)$. Avem

$$f''(x) = 2\cos 2x - p\sin x = -4\sin^2 x - p\sin x + 2.$$

Rezultă

$$f''(x_3) = \frac{1}{2}(4 - p^2).$$

Pentru $p \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, x_3 nu există, astfel încît $f(x)$ nu are nici maxim, nici minim.

Dacă $p = \pm 2$ atunci $x_3 = \mp\frac{\pi}{2}$ coincide cu una dintre extremitățile intervalului, de unde rezultă că și în acest caz funcția $f(x)$ nu admite vreun maxim sau minim.

Atunci cînd $p \in (-2, +2)$, valoarea x_3, pentru care $f'(x) = 0$, există și cum $f''(x_3) = \frac{1}{2}(4 - p^2) > 0$, rezultă că pentru x_3 funcția $f(x)$ are o valoare minimă, egală cu

$$f(x_3) = q - \frac{p^2}{4}.$$

Pentru a stabili cum se comportă $f(x)$ în cazul cînd x variază de la $-\frac{\pi}{2}$ la $\frac{\pi}{2}$, să formăm următoarele tablouri de variație a funcției $f(x)$:

I. $p \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$:

$p \leqslant -2$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$		
$f(x)$	$q - p + 1$		$q + p + 1$

$p \geqslant 2$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$+\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$		
$f(x)$	$q - p + 1$	$\nearrow$ $\nearrow$	$q + p + 1$

II. $p \in (-2, 2)$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\arcsin\frac{p}{2}$		$+\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$		0		$+\ +\ +\ +\ +$
$f(x)$	$q - p + 1$	$\searrow$	$q - \frac{p^2}{4}$	$\nearrow$	$q + p + 1$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă:

I. $p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$,

a) $p \leqslant -2$:

$q - p + 1$ este cea mai mare valoare a funcției $f(x)$, fără a avea caracter maxim, iar $q + p + 1$ cea mai mică valoare a lui $f(x)$.

b) $p \geqslant 2$:

$q - p + 1$ este cea mai mică valoare, iar $q + p + 1$ cea mai mare valoare.

II. $p \in (-2, 2)$.

Atît $q - p + 1$ cît și $q + p + 1$ sînt mai mari decît $q - \frac{p^2}{2}$ care este un minim. În cazul $p < 0$, $q + p + 1 < q - p + 1$, iar atunci cînd $p > 0$ avem $q + p + 1 > q - p + 1$.

496. Se dă ecuația

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0.$$

Se cere:

a) să se rezolve ecuația știind că o rădăcină este egală cu suma celorlalte două rădăcini.

b) să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

Examenul de maturitate, 1961.

R. a) Între rădăcinile ecuației date avem relațiile:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4.$$

$$x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 = 1,$$

$$x_1x_2x_3 = -6.$$

Ținînd seama că s-a dat $x_1 = x_2 + x_3$, rezultă $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ și $x_3 = 3$.

b) Funcția $f(x)$ este definită pentru orice $x \in (-\infty, +\infty)$. Derivata $f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$ se anulează pentru $x = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{3}$, iar funcția $f(x)$, după cum s-a constatat, se anulează pentru -1, 2 sau 3.

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de cele spuse mai sus, tabloul de variaţie, este

x	$-\infty$		-1		$\frac{4-\sqrt{13}}{3}$		0		2		$\frac{4+\sqrt{13}}{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{70+26\sqrt{13}}{27}$	$\searrow$	6	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{70-26\sqrt{13}}{27}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul este arătat în fig. 138.

Observaţie. Calculul expresiilor $f\left(\frac{4\pm\sqrt{13}}{3}\right)$ s-a efectuat pe baza faptului că, pentru $x=\frac{4\pm\sqrt{13}}{3}$, avem $x^2=\frac{8x-1}{3}$; deducem

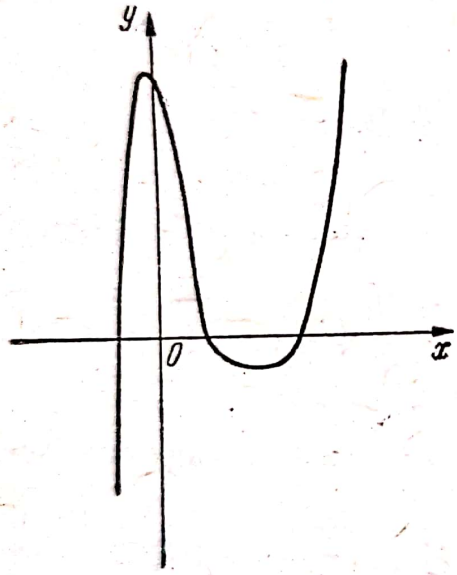


Fig. 138

$$f(x)=x^2(x-4)+x+6=$$

$$=\frac{8x-1}{3}(x-4)+x+6=\frac{8x^2-30x+22}{3}.$$

În această ultimă expresie se substituie din nou $x^2=\frac{8x-1}{3}$ şi se obţine

$$f(x)=-\frac{26}{9}x+\frac{58}{9},$$

unde se introduce în sfîrşit $x=\frac{4\pm\sqrt{13}}{3}$.

497. Să se reprezinte grafic funcţia

$$y=x^3+x.$$

Institutul politehnic, Braşov, 1961

R. Domeniul de definiţie este dat de $x\in(-\infty,+\infty)$; derivata $y'=3x^2+1$ nu se anulează pentru valori reale; derivata a doua $y''=6x$ ne arată că, în origine, graficul funcţiei admite un punct de inflexiune în care tangenta este chiar bisectoarea $y=x$. Pe baza tabloului de variaţie.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Scanned with OKEN Scanner

schițăm graficul indicat în fig. 139.

498. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = x^3 + \frac{x^4}{4}.$$

Examenul de maturitate, 1961

R. $f(x)$ este definită pe tot intervalul $x \in (-\infty, +\infty)$. Derivata funcției, $f'(x) = x^2(x+3)$, se anulează pentru $x = 0$ și $x = -3$, iar funcția se anulează pentru $x = 0$ și $x = -4$. Graficul funcției are un punct de inflexiune în origine.

Tabloul de variație a funcției este

x	$-\infty$		-4		-3		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-6\frac{3}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul funcției $f(x)$ este cel din fig. 140.

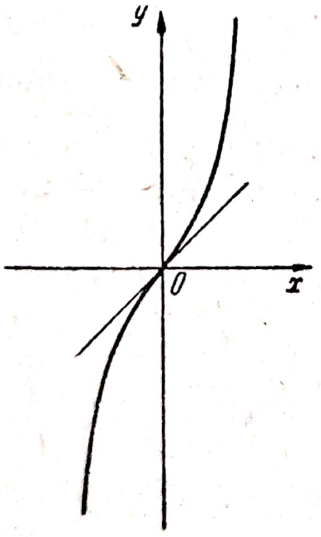


Fig 139

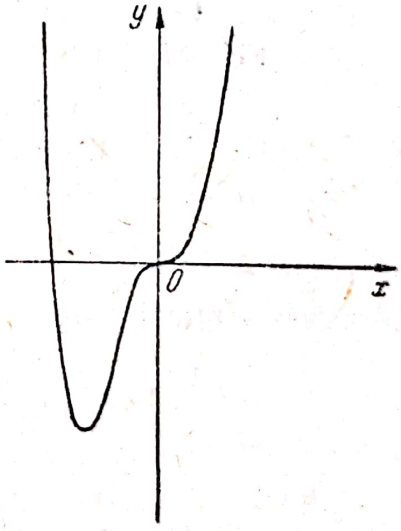


Fig. 140

499. Să se reprezinte grafic funcția

$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

Institutul politehnic, Brașov, 1961

R. Domeniul de definiție a funcției este dat de $x \in (-\infty, +\infty)$. Derivata funcției, $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, se anulează pentru $x = \pm 1$, iar derivata a doua, $y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$, se anulează pentru $x = 0$ și $x = \pm\sqrt{3}$.

Alcătuim următorul tablou de variație

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

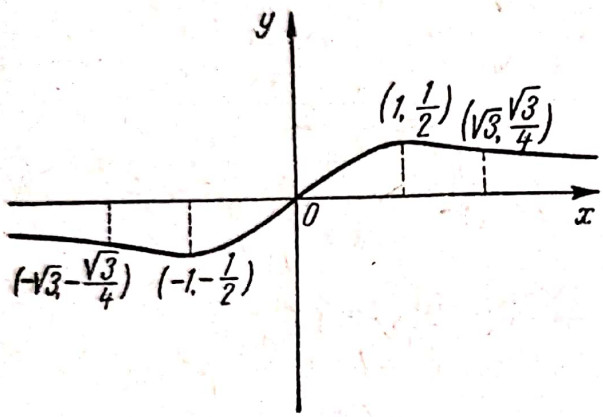


Fig. 141

Pe baza celor arătate mai sus, schițăm graficul indicat în fig. 141.

500. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3}$$

(pentru ușurința calculului derivatei nu se aduce la același numitor)

Examenul de maturitate, 1961.

R. Funcția $f(x)$ nu este definită pentru valorile $x = 1$ și $x = 3$; de aceea x trebuie să aparțină reuniunii de intervale:

$$x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, \infty).$$

Derivata funcției este

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-3)^2}$$

care este mereu negativă, pentru orice valoare a lui x situată în domeniul de definiție.

Funcția se anulează pentru $x = 2$. Avînd în vedere cele stabilite mai sus, se formează următorul tablou de variație:

x	$-\infty$		0		1	2		3		$+\infty$
$f'(y)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{3}$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ $\searrow$ 0

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza tabloului de mai sus construim graficul funcţiei din fig. 142.

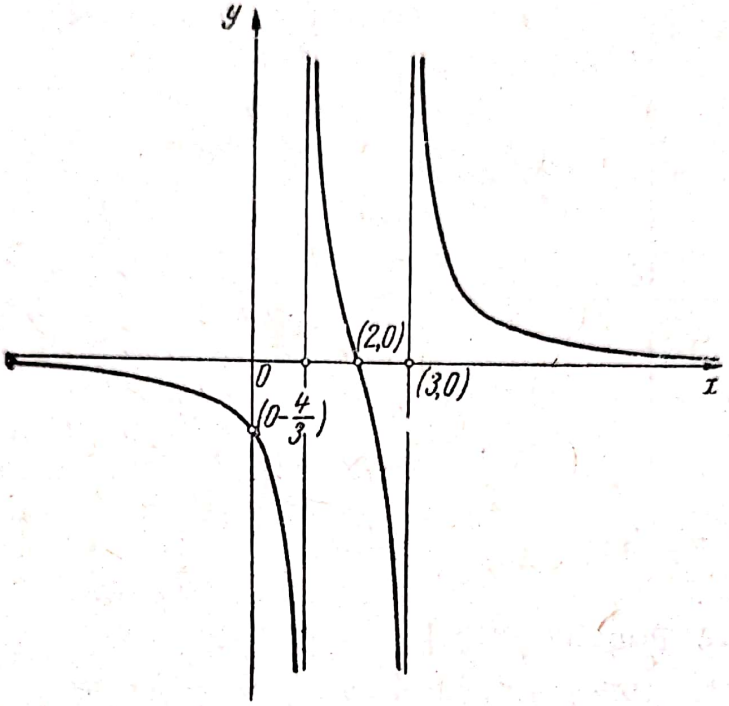


Fig. 142

501. a) Să se construiască graficul funcţiei

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

b) Să se găsească locul geometric al mijloacelor coardelor duse la curbă, paralele cu axa Ox.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la curbă în punctul A de abscisă a. Să se determine abscisa b a punctului B, unde această tangentă întîlneşte din nou curba.

Examenul de maturitate, 1960.

R. a) Avînd $y = \frac{2x}{1+x^2}$, rezultă $y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ şi $y'' = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$. Întrucît $x \in (-\infty, +\infty)$, tabloul de variaţie a funcţiei y este

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		$+1$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
y	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

Graficul variației este redat în fig. 143.

O coardă variabilă, paralelă cu Ox, are ecuația $y = \lambda$. Această coardă taie curba în punctele ale căror abscise x_1, x_2 sînt date de ecuația

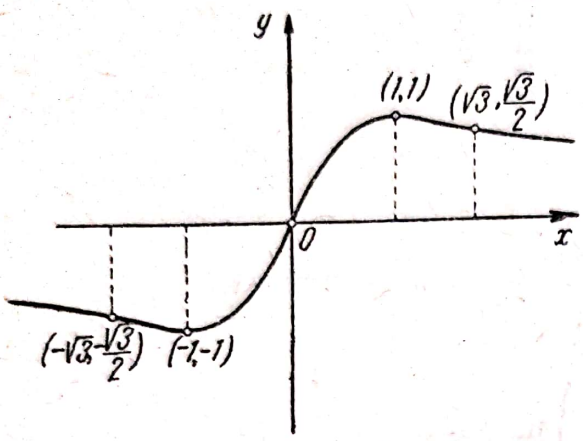


Fig. 143

$$\frac{2x}{1+x^2} = \lambda \quad \text{sau} \quad \lambda x^2 - 2x + \lambda = 0.$$

Mijlocul coardei de intersecție are deci coordonatele $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{\lambda}$ și $y = \lambda$.

Eliminînd λ, obținem ecuația locului geometric, $xy = 1$, care este o hiperbolă echilateră. Pe această hiperbolă sînt așezate punctele locului, dar nu toate punctele hiperbolei sînt puncte ale locului căutat.

c) Ecuația tangentei în A este $y - \frac{2a}{1+a^2} = \frac{2(1-a^2)}{(1+a^2)^2}(x-a)$. tangenta intersectează curba în puncte, ale căror abscise sînt date de ecuația

$$\frac{2(1-a^2)}{(1+a^2)^2}x^3 + \left[\frac{2a}{1+a^2} - \frac{2a(1-a^2)}{(1+a^2)^2}\right]x^2 + \left[\frac{2(1-a^2)}{(1+a^2)^2} - 2\right]x + \frac{2a}{1+a^2} - \frac{2a(1-a^2)}{(1+a^2)^2} = 0.$$

Dat fiind că această ecuație are o rădăcină dublă egală cu a, rezultă că abscisa b a punctului B este dată de relația $a \cdot a \cdot b = a - \frac{a(1+a^2)}{1-a^2}$. Deducem

$$b = \frac{-2a}{1-a^2}.$$

502. Planul de dezvoltare a economiei naționale pe anii 1960—65 prevede, referitor la consolidarea și dezvoltarea mai departe a industriei petrolului ca sarcină principală, creșterea rezervelor de țiței. Între alte măsuri luate de unul dintre trusturile petrolifere din țara noastră este și aceea de a construi noi rezervoare cilindrice, fiecare rezervor avînd suprafața totală de 54π m^2. Se cere:

Scanned with OKEN Scanner

a) să se exprime volumul rezervorului în funcţie de raza bazei;
b) să se studieze variaţia volumului şi să se construiască graficul;
c) cum trebuie dimensionat rezervorul pentru a avea capacitatea maximă ?

Examenul de maturitate, 1960.

R. a) Dacă notăm cu x raza bazei cilindrului şi cu h înălţimea sa, trebuie să avem $2\pi x^2 + 2\pi xh = 54\pi$, de unde rezultă

$$h = \frac{27 - x^2}{x}.$$

Volumul V al cilindrului este, deci, $V = \pi x (27 - x^2)$.
b) Modul cum variază V este exprimat de variaţia funcţiei

$$y = x (27 - x^2).$$

Ţinînd seama că x este raza cilindrului, iar $hx = 27 - x^2$, rezultă că $x \in [0, 3\sqrt{3}]$.

În acest interval, derivata $y' = 3(9 - x^2)$ se anulează pentru $x = 3$. Deoarece $y' > 0$ pentru $x < 3$ şi $y' < 0$ pentru $x > 3$, rezultă că y, respectiv V, are o valoare maximă atunci cînd raza este egală cu 3 m. Maximul volumului este $V = 54\ \pi$.

Graficul variaţiei este redat în figura 144.

c) Raza trebuie să fie egală cu 3 m, iar înălţimea 6 m.

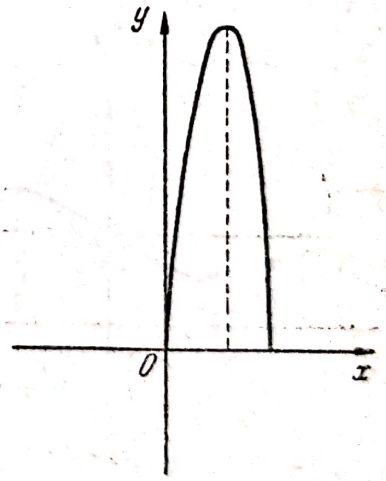


Fig. 144

503. Să se reprezinte graficul funcţiei $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 - x + 1}$, a fiind un parametru real. Pentru ce valori ale lui a, valorile lui $f(x)$ sînt situate, oricare ar fi x, între -3 şi 2?

Facultatea de matematică şi fizică, Bucureşti, 1961.

R. Deoarece $x^2 - x + 1 = 0$ are rădăcini imaginare, domeniul de definiţie este dat de $x \in (-\infty, +\infty)$. Derivata funcţiei este:

$$f'(x) = \frac{-(a + 1)(x^2 - 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

care se anulează pentru $x = \pm 1$, dacă $a \neq -1$.

Tabloul de variație poate fi unul din următoarele:

1) în cazul $a < -1$

x	$-\infty$		-1	0	1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\ +$	$+\ +$	0	$-\ -\ -$	0	$+\ +$	$+\ +$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{2-a}{3}$	$\searrow 1 \searrow$	$2+a$	$\nearrow$	1

2) în cazul $a = -1$, $f(x) = 1$ pentru orice $x \in (-\infty, +\infty)$;

3) în cazul $a > -1$

x	$-\infty$		-1	0	1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -$	$-\ -$	0	$+\ +$	$+\ 0$	$-\ -$	$-$
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{2-a}{3}$	$\nearrow 1 \nearrow$	$2+a$	$\searrow$	1

Celor trei cazuri de mai sus, le corespund graficele din fig.145.

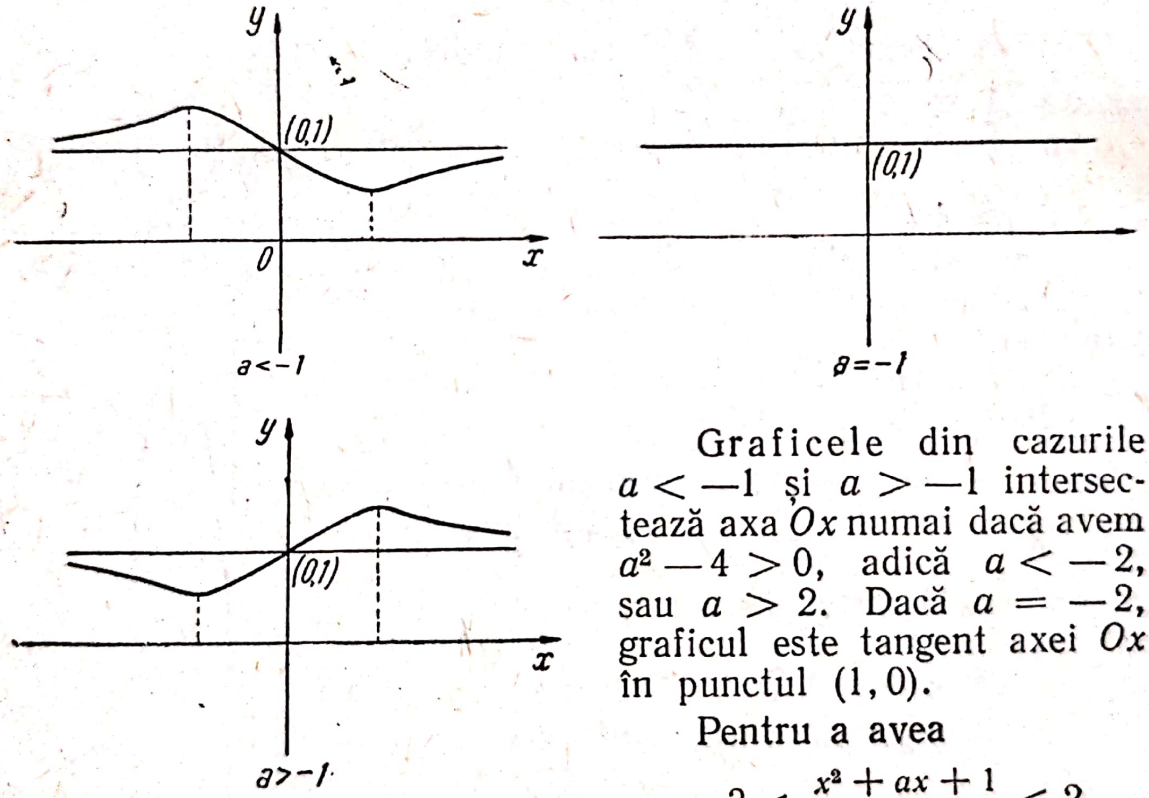


Fig. 145

Graficele din cazurile $a < -1$ și $a > -1$ intersectează axa Ox numai dacă avem $a^2 - 4 > 0$, adică $a < -2$, sau $a > 2$. Dacă $a = -2$, graficul este tangent axei Ox în punctul $(1, 0)$.

Pentru a avea

$$-3 < \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 - x + 1} < 2$$

pentru orice x, eliminăm numitorul $x^2 - x + 1$ care este pozitiv, oricare ar fi valoarea lui x, după care obținem neegalitățile simultane

$$\begin{cases} x^2 - (2 + a)x + 1 > 0, \\ 4x^2 + (a - 3)x + 4 > 0. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca neegalităţile de mai sus să fie valabile oricare ar fi valoarea lui x, trebuie să avem:

$$(a+2)^2 - 4 \leqslant 0 \text{ şi } (a-3)^2 - 64 \leqslant 0.$$

Rezultă

$$-4 \leqslant a \leqslant 0.$$

504. Să se reprezinte grafic funcţia

$$f(x) = \sqrt{x-2}.$$

Examenul de maturitate, 1961.

R. Funcţia este definită dacă $x - 2 \geqslant 0$, de aceea x aparţine intervalului $x \in [2, +\infty)$.

Derivata funcţiei este $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$ care este mereu pozitivă. Funcţia se anulează pentru $x = 2$. Pe baza celor de mai sus alcătuim următorul tablou de variaţie:

x	2		3		6			$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	0	↗	1	↗	2	↗	↗	∞

Graficul funcţiei este redat în fig. 146.

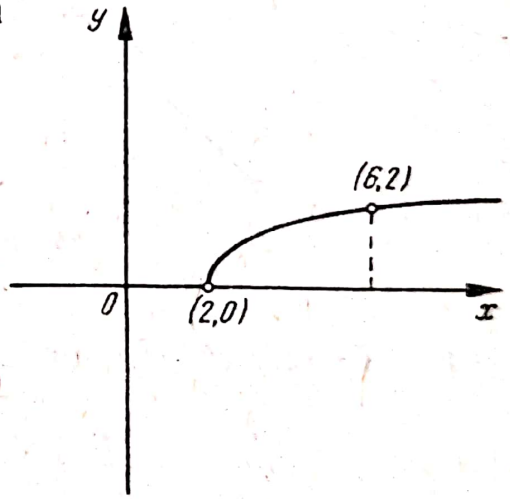


Fig. 146

505. Să se reprezinte grafic funcţia

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}.$$

Examenul de maturitate, 1961.

R. Funcţia $f(x)$ este definită dacă $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$; prin urmare x trebuie să aparţină reuniunii de intervale

$$x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty).$$

Derivata funcţiei $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ se anulează pentru $x = 2$ unde funcţia nu este definită. Deoarece

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm 1 \text{ şi } \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2-4x+3} - x) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}+x} = -2,$$

graficul funcţiei are asimptotele oblice $y = \pm x - 2$.

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul de variație a funcției este

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\|\|$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	0	$\|\|$	0	$\nearrow$	$+\infty$

iar graficul funcției este redat în figura 147.

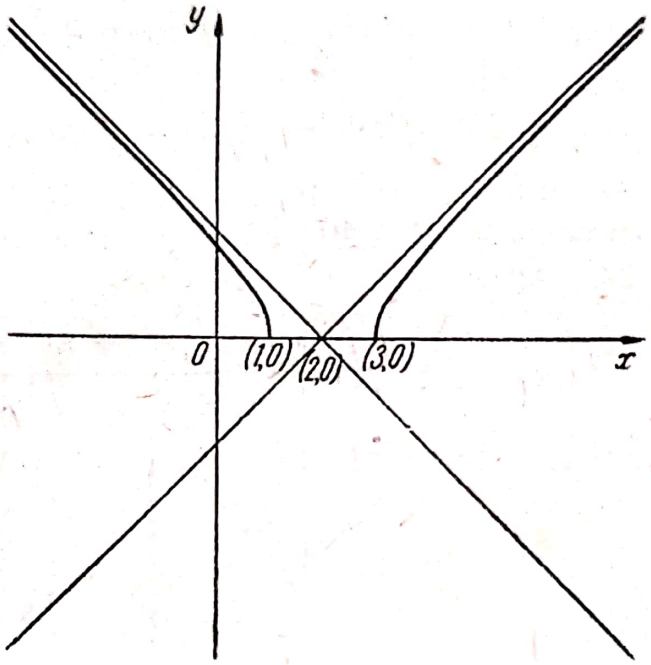


Fig. 147

506 Să se facă graficul funcției

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2}.$$

Examenul de maturitate, iunie, 1962

R. Domeniul de definiție a funcției $f(x)$ este

$$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$$

În acest domeniu, derivata funcției este

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 3}{(x^2 + x - 2)^2}.$$

Pe baza rezultatelor precedente se alcătuiește următorul tablou de variație a funcției

x	$-\infty$		-2		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$\|\|$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\|\|$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Graficul funcției este dat în fig. 148.

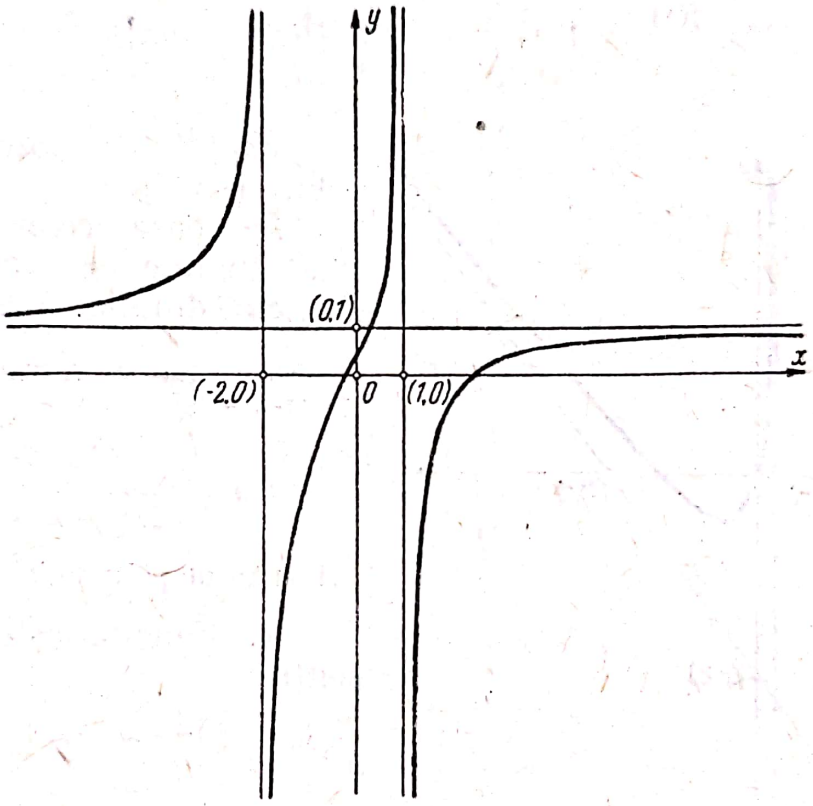


Fig. 148

507. Să se construiască graficul funcției

$$f(x) = \frac{x^2 - 16x}{x + 2}.$$

Examenul de maturitate, august, 1962

R. Funcția $f(x)$ există pentru $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. Derivata funcției este

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 32}{(x + 2)^2}$$

care se anulează pentru $x_1 = -8$ și $x_2 = 4$.

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul de variație este

x	$-\infty$		-8		-2		0		4		16		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty\nearrow$		$-32\searrow$	$-\infty$		$+\infty\searrow$	$0\searrow$	$-8\nearrow$	0	$\nearrow$			$+\infty$

Curba de variație are pe lîngă asimptota $x = -2$ și o asimptotă oblică, a cărei ecuație este de forma $y = mx + n$, unde m și n se obțin calculînd limitele:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ și } n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = -18.$$

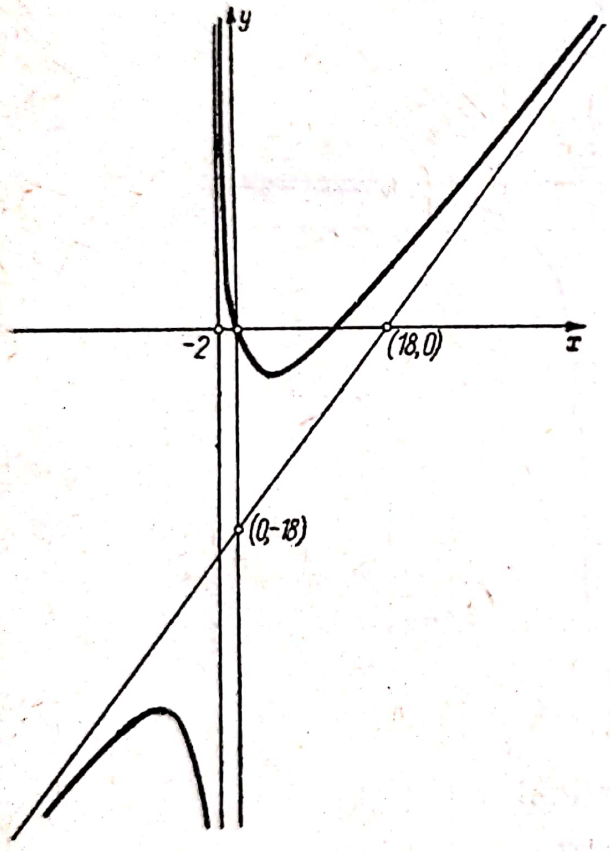


Fig. 149

Ecuația asimptotei oblice este, deci, $y = x - 18$.

Pe baza celor stabilite mai înainte se construiește graficul din fig. 149.

508. Să se reprezinte grafic funcția

$$y = \frac{x^3}{2x^2 - x - 1}.$$

Institutul politehnic, Iași, 1962.

R. Funcția este definită pentru

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, \infty).$$

Derivata funcției este

$$y' = \frac{x^2(2x^2 - 2x - 3)}{(2x^2 - x - 1)^2}.$$

Tabloul de variație a funcției este

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{7}}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$\frac{1+\sqrt{7}}{2}$		$+\infty$
y'	$+$	$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty\nearrow$		$\frac{10-7\sqrt{7}}{18}\searrow$	$-\infty$		$+\infty\searrow$	$0\searrow$	$-\infty$		$+\infty\searrow$	$\frac{10+7\sqrt{7}}{18}$	$\nearrow$	$+\infty$

Scanned with OKEN Scanner

Curba are asimptotele $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$ și o asimptotă oblică, a cărei ecuație este de forma $y = mx + n$; avem

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \quad \text{și} \quad n = \lim_{x\to\infty} (y - mx) = \frac{1}{4}.$$

Ținînd seama de cele stabilite, obținem curba arătată în fig. 150.

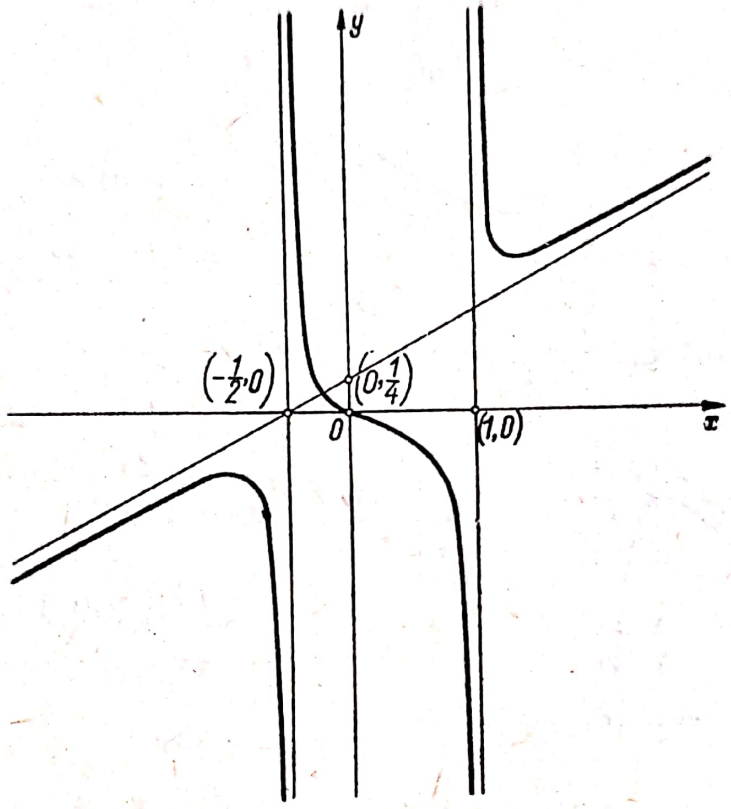


Fig. 150

509. Să se facă graficul funcției

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}.$$

Examenul de maturitate, iunie, 1962.

R. Domeniul de definiție a funcției este dat de reuniunea de intervale

$$x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty),$$

iar derivata este

$$f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

Graficul are o asimptotă ($x = 2$) paralelă cu Oy și o asimptotă oblică, a cărei ecuație este $y = x + 2$.

Tabloul de variație a funcției este următorul

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow -\infty$	$\|$	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow +\infty$

Pe baza celor arătate mai sus se face graficul din fig. 151.

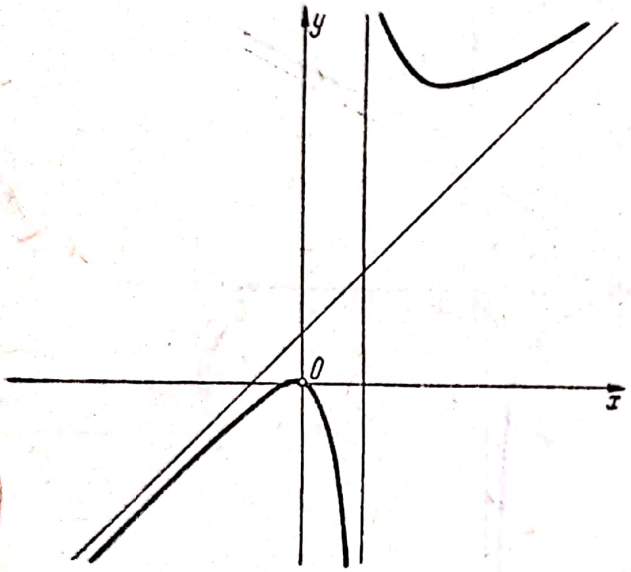


Fig. 151

510. Să se studieze variația funcției

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 2}$$

și să se reprezinte grafic.

Institutul de construcții, București, 1962

R. Domeniul de definiție a funcției este dat de

$$x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty).$$

Derivata funcției este

$$f'(x) = \frac{2(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2}.$$

Pe baza celor stabilite alcătuim următorul tablou de variație

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow -\infty$	$\|$	$+\infty$	$\searrow$	9	$\nearrow +\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow 1$

Acestui tablou îi corespunde graficul din fig. 152.

511. Să se facă graficul funcției

$$f(x) = x + 1 + \frac{3x + 2}{(x + 1)(x - 2)}.$$

Examenul de maturitate, iunie, 1962

R. Domeniul de definiţie a funcţiei este dat de reuniunea de intervale

$$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty).$$

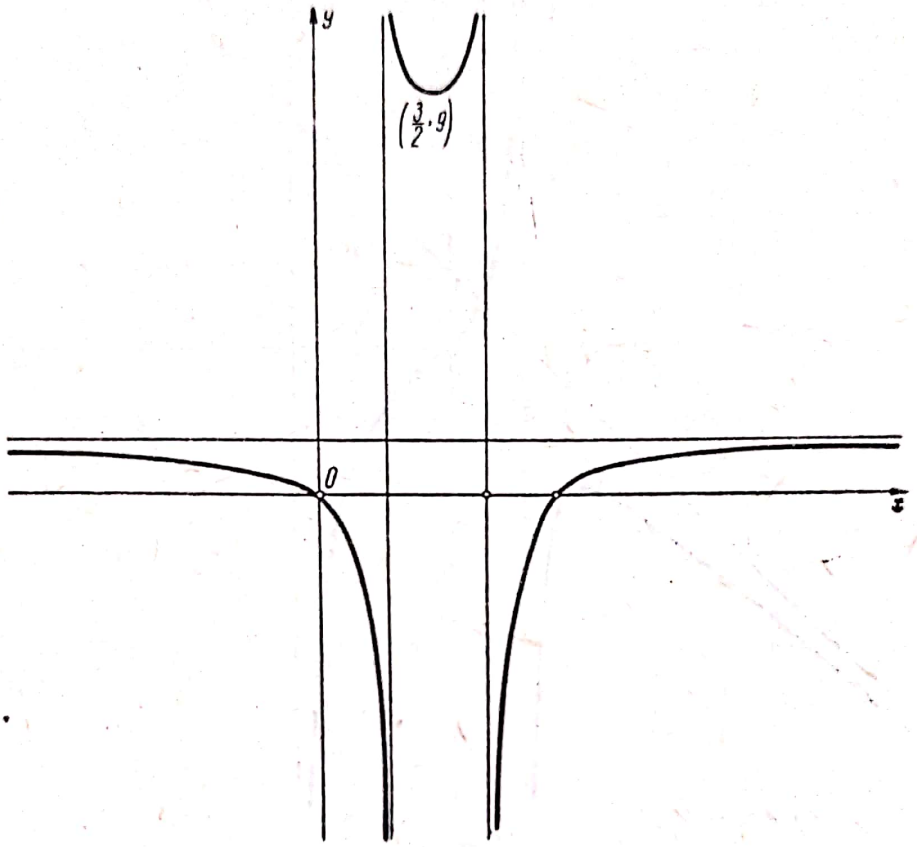


Fig. 152

Derivata funcţiei este

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 2x - 6)}{(x+1)^2 (x-2)^2}.$$

Graficul are asimptotele $x = -1$; $x = 2$ şi $y = x + 1$.

Pe baza celor de mai sus se alcătuieşte următorul tablou de variaţie

x	$-\infty$		$1-\sqrt{7}$		-1		0		2		$1+\sqrt{7}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + +$	0		‖	$- - -$	0	$- - -$	‖	$- - -$	0	$+ + +$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{20-14\sqrt{7}}{9}$	↘	‖	$+\infty$	↘ 0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$	↘ $\frac{20+14\sqrt{7}}{9}$	↗	$+\infty$

Scanned with OKEN Scanner

Graficul este arătat în fig. 153.

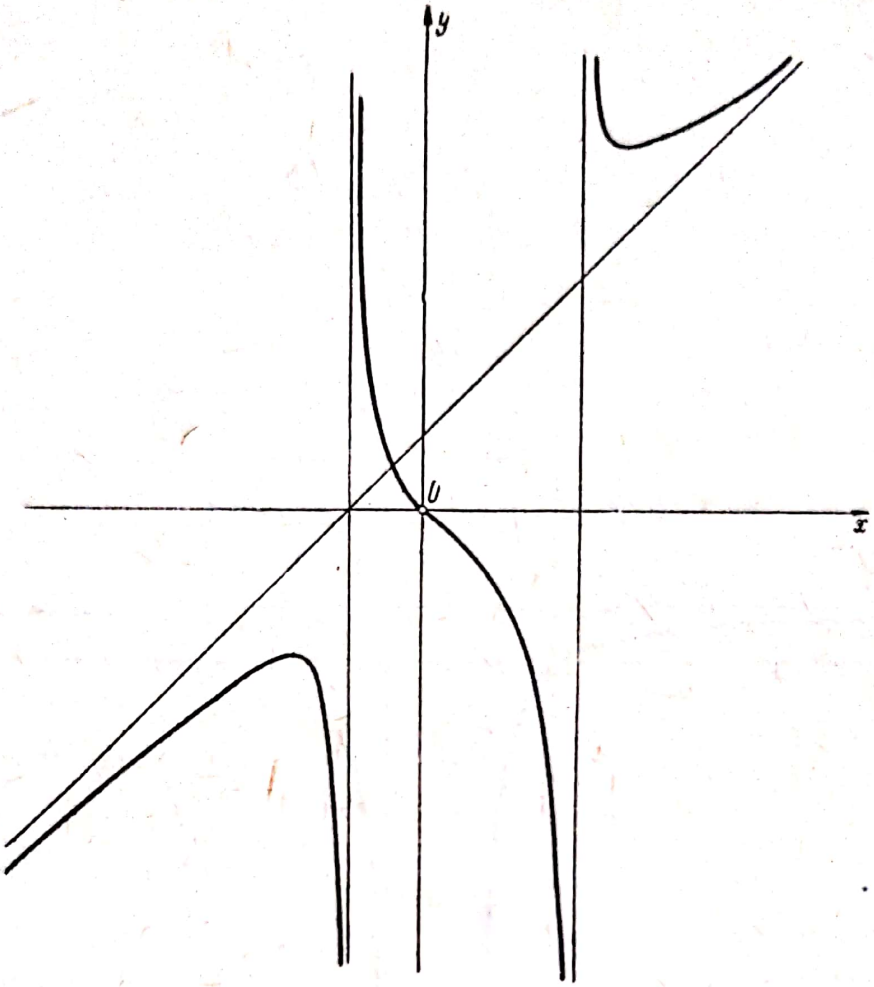


Fig. 153

512. Să se studieze variaţia funcţiei

$$y = \sqrt{\sin^3 x + \cos^3 x}$$

şi să se reprezinte grafic.

Facultatea de matematică şi fizică, Bucureşti, 1960.

R. Avem $y = \sqrt{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)}$. Ţinînd seama că $\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x > 0$ pentru orice x, domeniul de definiţie a funcţiei se obţine luînd acele valori ale lui x pentru care avem:

$$\sin x + \cos x \geqslant 0 \text{ sau } \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geqslant 0$$

$$\text{deci } 2n\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant 2n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Rezultă $2n\pi - \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2n\pi + \frac{3\pi}{4}$.

Domeniul de definiție este format, deci, din reuniunea de intervale

$$x \in \bigcup_{n \text{ întreg}} \left[2n\pi - \frac{\pi}{4},\quad 2n\pi + \frac{3\pi}{4}\right].$$

Studiem variația funcției în intervalul $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ și repetăm graficul corespunzător în celelalte intervale.

Derivata funcției este $y' = \frac{3 \sin 2x(\sin x - \cos x)}{4\sqrt{\sin^3 x + \cos^3 y}}$, care se anulează în intervalul $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ pentru $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ și $x = \frac{\pi}{2}$.

Tabloul de variație este

x	$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$
y'	+ + +	+	0	−	−	0	+ + +	0	− − −
y	0	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	↗	1	↘	0

iar curba corespunzătoare, pentru $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, este cea din fig. 154.

513. Fiind dată funcția

$$f(x) = 2 \arcsin \frac{x-2}{2} - \sqrt{4x - x^2},$$

se cere:

a) știind că funcția dată reprezintă o anumită curbă, să se găsească ecuația tangentei la curbă în punctul de abscisă $x = 1$. Să se cerceteze dacă graficul funcției are puncte de inflexiune.

b) Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția

$$y = f'(x)\,\frac{(x-2)\sqrt{4x - x^2}}{x+1},$$

în care $f'(x)$ este derivata funcției date.

Institutul politehnic, Timișoara, 1961.

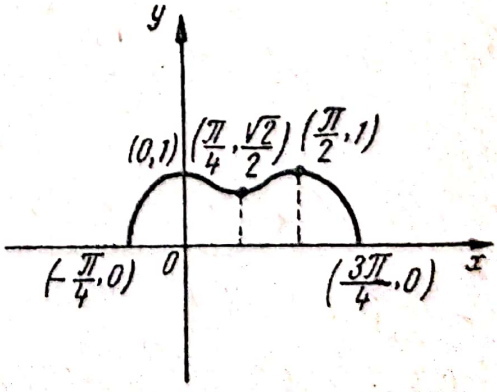


Fig. 154

R. a) Funcția $f(x)$ există pentru x aparținînd intervalului $x \in [0, 4)$. Pentru a calcula panta m a tangentei în $x = 1$, avem

nevoie de $f'(x)$. Se găseşte $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x(4-x)}}$, astfel că $m = f'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Rezultă că ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în $x = 1$, este

$$y + \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 1).$$

Pentru a cerceta dacă graficul are puncte de inflexiune, calculăm derivata a doua, $f''(x)$. Se găseşte $f''(x) = \frac{2}{\sqrt{x(4-x)^3}}$, de unde se constată că nu există valori pentru x astfel ca $f''(x) = 0$; prin urmare curba nu are puncte de inflexiune.

b) Efectuînd calculele, găsim $y = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$ cu domeniul de definiţie $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Derivata funcţiei este $y' = \frac{x^2 + 2x - 2}{(x+1)^2}$ care se anulează pentru $x = -1 \pm \sqrt{3}$. Tabloul de variaţie este

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		-1		$-1+\sqrt{3}$		2		$+\infty$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-4-2\sqrt{3}$	$\searrow$	$\|$	$+\infty\searrow$	$0\searrow$	$-4+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$0\nearrow$	$+\infty$

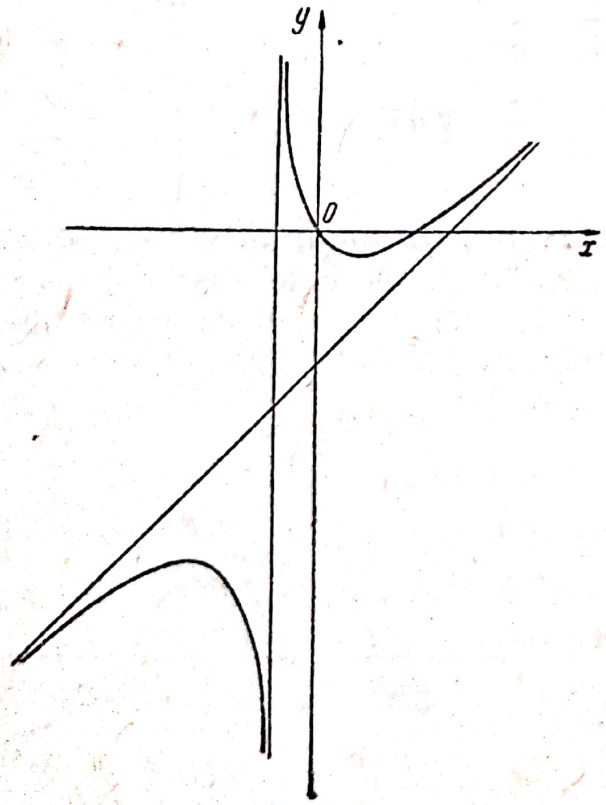


Fig. 155

Curba de variaţie are asimptota oblică $y = x - 3$. Graficul variaţiei este redat în fig. 155.

514. Să se reprezinte grafic funcţia

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2}[(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2].$$

Facultatea de matematică şi fizică, Bucureşti, 1961

R. Ştiind că pentru determinarea principală avem

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

rezultă $\pi^2 f(x) = 2(\arcsin x)^2 - \pi \arcsin x + \frac{\pi^2}{4}$, sau

$$\frac{\pi^2}{2} f(x) = \left(\arcsin x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi^2}{16}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Domeniul de definiţie a funcţiei este $x \in [-1, 1]$; derivata este.

$$f'(x) = \frac{4}{\pi^2}\left(\arcsin x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

În domeniul de definiţie, derivata se anulează pentru $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pe baza celor arătate mai sus, alcătuim următorul tablou de variaţie

x	-1		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$		$-\ -\ -$		0	$+\ +\ +\ +\ +$	
$f(x)$	$\frac{5}{4}$	$\searrow\ \searrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{8}$	$\nearrow\ \nearrow$	$\frac{1}{4}$

Graficul corespunzător este schiţat în fig. 156.

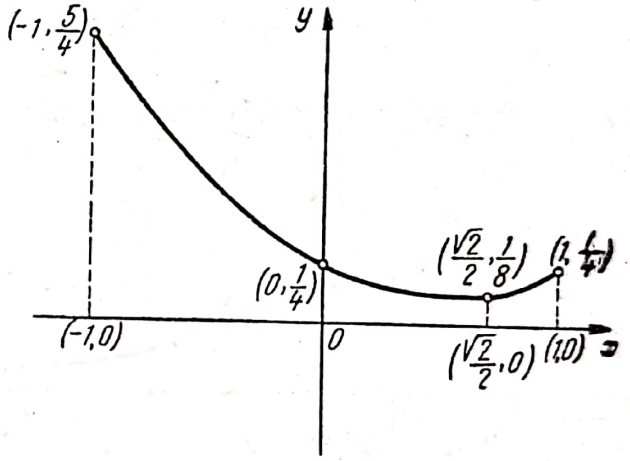


Fig. 156

515. Să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

Facultatea de matematică şi fizică, Bucureşti, 1961.

R. Domeniul de definiţie se obţine scriind că trebuie să avem

$$-1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$$

care este o dublă neegalitate, adevărată pentru orice x; de unde rezultă domeniul de definiţie al funcţiei: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Prima şi a doua derivată sînt respectiv:

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \text{ şi } f''(x) = -\frac{4x}{1+x^2}.$$

Deducem că, deoarece $-1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1$ pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, în aceste intervale semnul derivatei este dat de $\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. În punctele $x = \pm 1$, funcţia prezintă o situaţie deosebită. Atunci cînd $x \to -1$ prin valori mai mici decît -1, derivata este egală cu -1 şi cînd $x \to -1$ prin valori mai mari,

derivata este $+1$; un lucru asemănător se întîmplă în punctul $x = +1$. De aceea, în punctele $A\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$ și $B\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ graficul admite, în fiecare dintre aceste puncte, cîte două semitangente, paralele cu bisectoarele axelor de coordonate (punctele A și B sînt puncte unghiulare).

Deducem că $f(x)$ nu admite valori pentru care să se anuleze derivata, deci funcția nu are extreme. Pentru $x = 0$ avem un punct de inflexiune la graficul corespunzător.

Tabloul de variație este:

x	$-\infty$		$-1-\varepsilon$		-1		$-1+\varepsilon$		0		$1-\varepsilon$		1		$1+\varepsilon$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$		-1		$+1+$	$+$	$+$		$+1$		-1	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	0		$\searrow$		$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$			0	$\nearrow$			$\frac{\pi}{2}$		$\searrow$		0

iar curba reprezentativă este arătată în fig. 157.

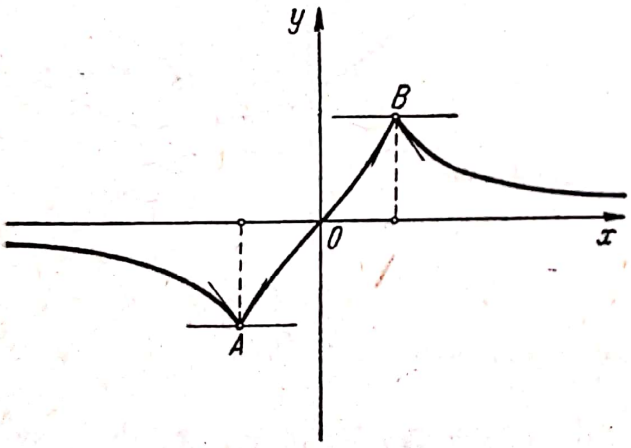


Fig. 157

516. Să se rezolve inecuația $\sqrt{\frac{3x-7}{x-1}} < x - 1$.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1961.

R. Pentru ca neegalitatea să aibă sens, trebuie să avem $x > 1$ și $(3x-7) \times (x-1) > 0$, ceea ce atrage condiția

$$x \in \left[\frac{7}{3}, +\infty\right). \qquad (1)$$

Deoarece $\sqrt{\frac{3x-7}{x-1}} < x-1$ și deoarece ambii membri ai inecuației sînt pozitivi, putem scrie

$$\frac{3x-7}{x-1} < (x-1)^2 \text{ sau } \frac{x^3-3x^2+6}{x-1} > 0.$$

Pentru rezolvarea ultimei inecuații trebuie să știm ce fel de rădăcini are $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$. Întrucît această ecuație nu are rădăcini raționale pe care să le determinăm, căutăm deocamdată natura rădăcinilor, aplicînd teorema de separare a lui Rolle.

Scanned with OKEN Scanner

Şirul lui Rolle, corespunzător, este

$$f(-\infty) \qquad f(0) \qquad f(2) \qquad f(+\infty)$$
$$\quad - \qquad\quad 6 \qquad\quad 2 \qquad\quad +$$

de unde se constată că $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ are o rădăcină x_1 negativă şi două imaginare. Rezultă că inecuaţia de rezolvat se scrie sub forma

$$\frac{(x - x_1)\,\varphi(x)}{x - 1} > 0.$$

Deoarece $\varphi(x) > 0$ pentru orice x, atunci ultima inecuaţie se scrie $(x - x_1)(x - 1) > 0$, ceea ce dă

$$x \in (-\infty, x_1] \cup (1, +\infty). \qquad (2)$$

La intersecţia mulţimilor (1) şi (2) se află $x \in \left[\frac{7}{3}, +\infty\right)$, ceea ce înseamnă că inecuaţia este verificată numai dacă avem

$$x \geqslant \frac{7}{3}.$$

B. Exerciţii şi probleme urmate de răspunsuri şi indicaţii. Examenele de bacalaureat şi de admitere în învăţământul superior înainte de reforma învăţământului din 1948

517. Se dă ecuaţia

$$x^4 - 2(\lambda + 1)x^3 + (8\lambda + 3)x^2 - 2(6\lambda + 1)x + 6\lambda = 0.$$

Să se determine λ ştiind că între rădăcini există relaţia

$$x_4 + 2 = x_1 + x_2 + x_3,$$

apoi să se rezolve ecuaţia.

R. λ poate avea valorile: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ şi $\lambda_4 = 4$. Pentru $\lambda = 0$: $x_4 = 0$; $x_1 = 1$ şi $x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

Dacă $\lambda = 1$, atunci $x_1 = x_4 = 1$ şi $x_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{5}$; pentru $\lambda = 4$, rădăcinile sînt: 1; 2; 3; 4.

518. Să se calculeze derivata funcţiei

$$y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1} \qquad (1)$$

şi să explice rezultatul.

R. $y' = \frac{2}{1 + x^2}$, care este aceeaşi cu derivata funcţiei $z = 2 \operatorname{arctg} x$. Se explică rezultatul demonstrînd că $y - z$ este o constantă.

Scanned with OKEN Scanner

În acest scop, calculăm $\operatorname{tg}(y-z)$ ținînd seama că $\operatorname{tg} y = \frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}$ și $\operatorname{tg} z = \frac{2x}{1+x^2}$. Se găsește $\operatorname{tg}(y-z) = 1$ și prin urmare $y - z = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

519. Să se deriveze funcțiile

$$y = \operatorname{arctg} \frac{\alpha x - \beta}{\beta x + \alpha},$$

$$z = \arcsin \frac{\alpha x - \beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(1+x^2)}},$$

$$u = \operatorname{arctg} x$$

și apoi să se explice rezultatul.

R. Se găsește că $y' = z' = u' = \frac{1}{1+x^2}$, rezultat care se explică demonstrînd că

$$y - z; \quad y - u; \quad z - u.$$

sînt constante.

520. Se dă funcția

$$y = x^3 - 3x + \alpha.$$

a) Să se separe, cu ajutorul teoremei lui Rolle, rădăcinile ecuației $x^3 - 3x + \alpha = 0$.

b) Să se determine α astfel, încît suma a două rădăcini să fie 1.

c) Pentru valoarea aflată a lui α să se determine aria A, închisă de curba care reprezintă funcția dată și axa Ox.

R. a) Pentru $\alpha \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, o rădăcină reală.

Dacă $\alpha \in (-2, 2)$, sînt toate reale. În cazul cînd $\alpha = \pm 2$, o rădăcină dublă și una simplă.

b) $\alpha = -2$.

c) $A = \frac{27}{4}$.

521. Se dă curba $y = x^3 - x + 1$.

a) Să se arate cîte tangente reale i se pot duce dintr-un punct dat $P(1, 0)$ și care sînt ecuațiile lor.

b) Punctul $P(1, 0)$ fiind centrul unui cerc, să se afle ecuația acestui cerc, știind că trece prin punctul $D(4, -1)$.

R. a) Două tangente, ale căror ecuații sînt:

$x + y - 1 = 0$ și $23x - 4y - 23 = 0$.

b) $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

522. Fie trei numere x_1, x_2, x_3.

a) Cum trebuie să fie aceste numere pentru ca să formeze, în același timp, o progresie aritmetică și o progresie geometrică.

b) Ecuația $f(x) \equiv x^3 - 6x^2 + px + q = 0$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3 care satisfac condiția a). Să se determine p și q și să se rezolve ecuația.

c) Să se studieze variația funcției $y = \frac{f'(x)}{f(x)}$ astfel determinată.

R. a) Trebuie $x_1 = x_2 = x_3$

b) $p = 12$; $q = -8$ și $x_1 = x_2 = x_3 = 2$.

c) Avem $y(x-2) = 3$ care reprezintă o hiperbolă echilateră cu asimptotele $x = 2$ și $y = 0$.

523. a) Să se determine c și d așa fel ca ecuația

$$f(x) \equiv x^4 - 14x^3 + 72x^2 + cx + d = 0$$

să aibă o rădăcină triplă. În acest caz, se cere:

b) Să se reprezinte grafic funcția $y = f(x)$.

c) Să se rezolve inegalitatea $f(x) > 0$.

R. a) 1°. $c = -162$; $d = 135$ și rădăcinile 3; 3; 3; 5.

2°. $c = -160$; $d = 128$ și rădăcinile 4; 4; 4; 2.

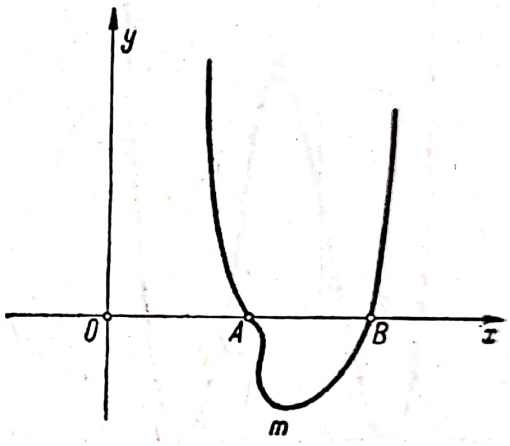


Fig. 158

b) În cazul 1° $y = (x-3)^3(x-5)$ al cărei grafic este indicat în fig. 158. Se ține seama că graficul are două puncte de inflexiune de coordonate (3, 0) și (4, −1).

c) În cazul 1°, $x \in (-\infty, 3) \cup (5, \infty)$, iar în cazul 2° $x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$.

524. a) Să se determine a și b astfel ca ecuația

$$f(x) \equiv x^4 - 4x^3 - ax^2 + 12x + b = 0$$

să aibă două rădăcini duble.

b) Să se studieze variația funcției $y = f(x)$.

c) a și b având valorile găsite la pct. a), să se afle aria porțiunii finite de plan cuprinsă între curbă și axa Ox.

R. a) $a = 2$; $b = 9$ și $x_1 = x_2 = -1$, iar $x_3 = x_4 = 3$.

b) Graficul variației este indicat în fig. 159.

c) $A = \frac{512}{15}$.

525. Se consideră față de un sistem de axe perpendiculare Ox, Oy curba de ecuație

$$y = x(x + \alpha)^2.$$

a) Dacă M este un punct pe curbă, de abscisă a și P, un alt punct pe curbă, de abscisă $-2(a + \alpha)$, să se arate că dreapta MP este tangentă la curbă în M.

b) Să se determine α astfel, încît aria situată deasupra axei Ox cuprinsă între curbă, axa Ox și dreapta $x = 1$, să aibă cea mai mică valoare.

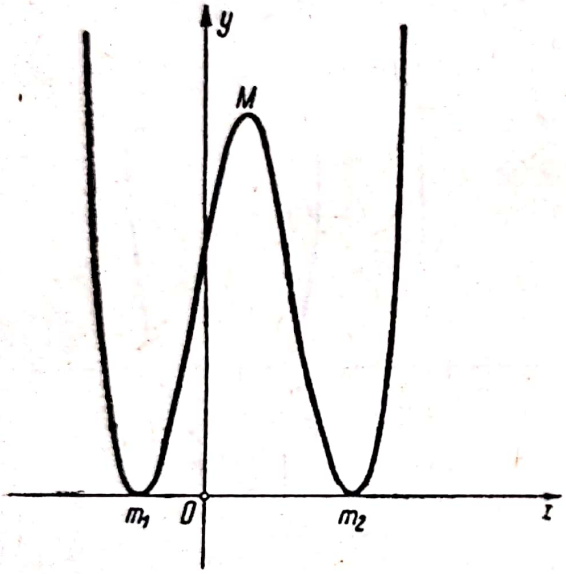


Fig. 159

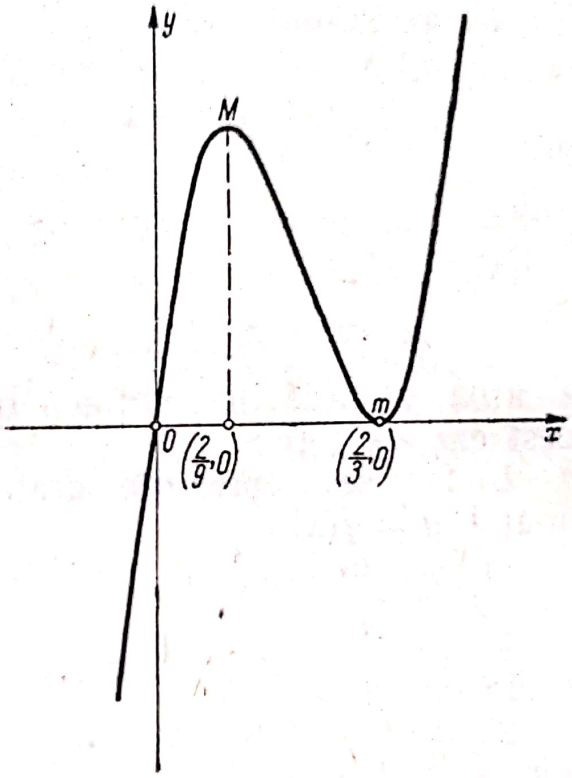


Fig. 160

c) Să se figureze curba pentru valoarea aflată a lui α.

R. a) Trebuie arătat că tangenta în M de ecuație $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ intersectează curba în punctul de abscisă $-2(a + \alpha)$.

b) $\alpha = -\frac{2}{3}$.

c) Graficul este schițat în fig. 160.

526. a) Să se rezolve ecuația

$$8x^5 - x^4 - 16x^3 + \lambda x^2 + 8x - 1 = 0$$

știind că are două rădăcini duble, egale și de semne contrare.

b) Să se studieze și să se reprezinte grafic variația funcției

$$y = 8x^5 - x^4 - 16x^3 + 2x^2 + 8x - 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se afle în grade, unghiul pe care tangenta la curbă, în punctul în care curba taie axa Oy, îl face cu axa Ox.

R. a) $\lambda = 2$ și $x_1 = x_2 = 1$; $x_3 = x_4 = -1$; $x_5 = \frac{1}{8}$.

b) Graficul este arătat în fig. 161.

c) $u \approx 83°$.

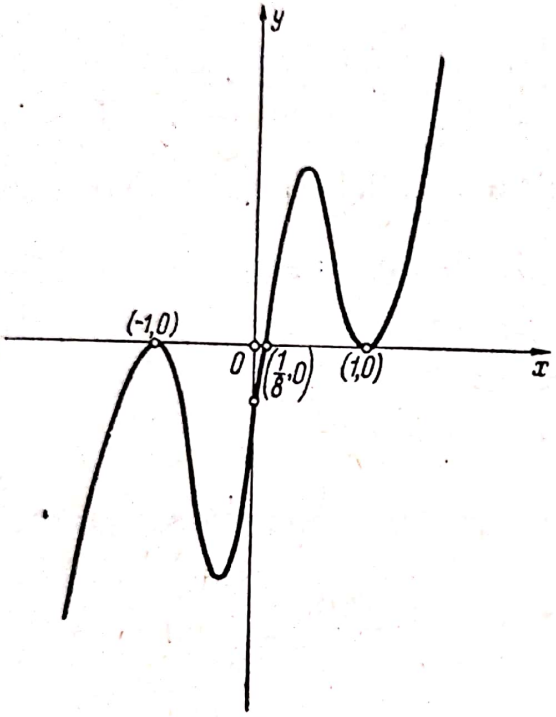


Fig. 161

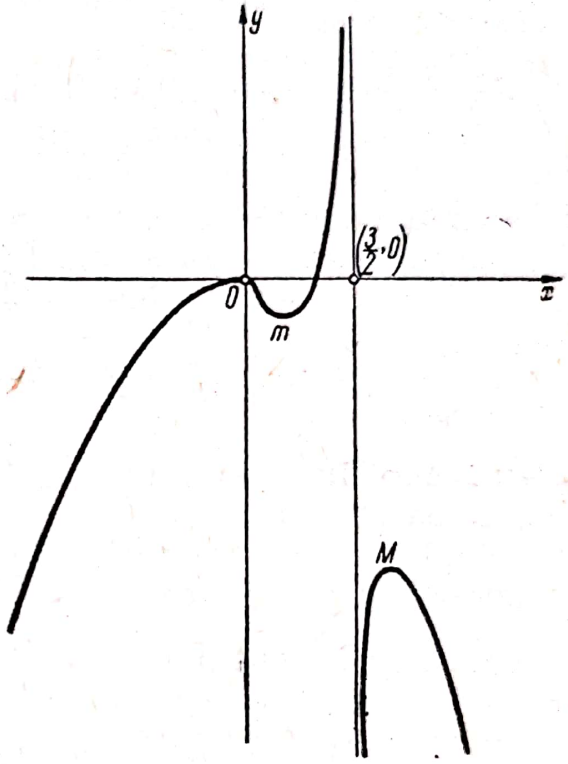


Fig. 162

527. a) Să se afle valorile lui y pentru care ecuația în x,

$$x^3 - x^2 + 2xy - 3y = 0,$$

admite o rădăcină dublă, și în acest caz, să se rezolve.

b) Scoțînd pe y în funcție de x, să se studieze variația și să se reprezinte această funcție.

c) Să se afle aria delimitată de axa Ox și de curba de la punctul (b) cuprinsă între dreptele $x = 0$ și $x = 1$.

R. a) Rezultă $y = 0$ cînd avem $x_1 = x_2 = 0$ și $x_3 = 1$, $y = -4$ pentru care $x_1 = x_2 = 2$ și $x_3 = -3$, $y = \frac{15}{32}$ cînd $x_1 = x_2 = -\frac{3}{4}$ și $x_3 = \frac{5}{2}$.

b) Avem $y = \frac{x^2(1-x)}{2x-3}$ care este definită pentru $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$. Graficul variației este indicat în fig. 162. Curba are asimptota $x = \frac{3}{2}$.

c) $A = \frac{1}{48}(32 - 27 \ln 3)$.

528. Se dă sistemul de trei ecuații cu două necunoscute u și v.

$$u + 5v + 2 = 0,\ 3u - 5av - 10 = 0,\ u + 10v + 6 = 0$$

și se cere să se determine parametrul a astfel ca acest sistem să fie posibil și, apoi, să se rezolve.

Soluțiile acestui sistem fiind valorile lui x pentru care funcția

$$y = \frac{x^2 + mx - 2}{x^2 - nx + 1}$$

devine maximă sau minimă, se cere:

a) Să se afle m și n.

b) Să se studieze variația și să se facă reprezentarea grafică a funcției în acest caz.

R. $a = 1$ pentru care $u = 2$ și $v = -\frac{4}{5}$.

a) $m = 6;\ n = -1$.

b) Funcția este $y = \frac{x^2 + 6x - 2}{x^2 + x + 1}$ definită pentru orice x. Curba reprezentativă are asimptota $y = 1$ și modul de variație este arătat în fig. 163.

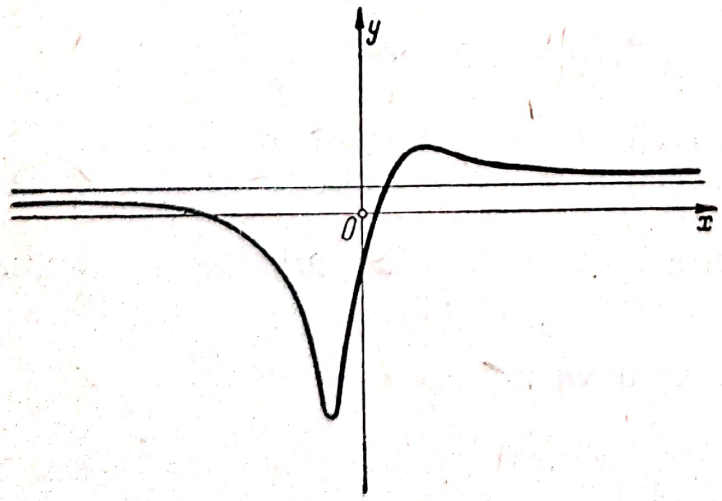


Fig. 163

529. a) Să se construiască curba $y^3 - x^2 = 0$.

b) Să se calculeze aria celor două porțiuni în care curba de mai sus împarte pătratul cu centrul în originea axelor având laturile paralele cu axele și de lungime $2a$.

c) Care este limita raportului celor două arii, cînd a tinde către infinit?

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Graficul este indicat în fig. 164.

b) $A_1 = 2a^2 - \frac{6}{5} a^{\frac{5}{3}}$, $A_2 = 2a^2 + \frac{6}{5} a^{\frac{5}{3}}$.

c) $\lim\limits_{a \to \infty} \frac{A_1}{A_2} = 1$.

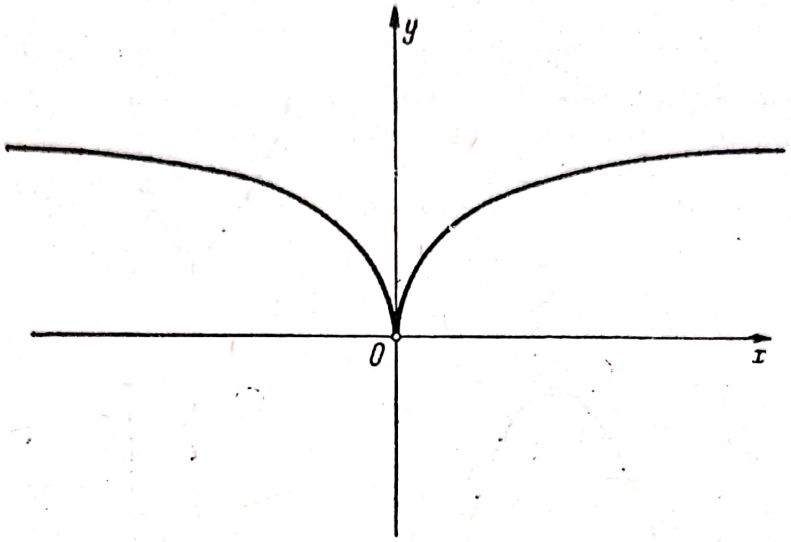


Fig. 164

530. Se consideră $y = kx(x - a)(x - b)$.

a) Să se determine a și b astfel, încît y să admită o valoare minimă pentru $x = \frac{4}{3}$ și una maximă pentru $x = 6$. Să se determine k astfel încît valoarea maximului să fie 6.

b) Să se reprezinte grafic valoarea funcției astfel precizate.

c) Pentru funcția $y = f(x)$ astfel precizată, să se determine λ astfel, încît ecuația $f(x) = \lambda$ să admită o rădăcină dublă și să rezolve, în acest caz, ecuația.

R. a) $a = 3$; $b = 8$ și $k = -\frac{1}{6}$.

b) Funcția este $y = -\frac{1}{6} x(x - 3)(x - 8)$ și graficul ei este redat în fig. 165.

c) λ poate avea valorile $-\frac{200}{81}$ sau 6.

În primul caz rădăcinile sînt $\frac{4}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{25}{3}$, iar în al doilea caz, 6; 6; —1.

531. Se consideră ecuaţia

$$3x^3 - 7x^2 - mx - 1 = 0.$$

a) Pentru ce valori ale parametrului m această ecuaţie are o rădăcină dublă?

b) Să se studieze variaţia funcţiei $y = 3x^2 - 7x - \frac{1}{x}$ şi să i se schiţeze curba reprezentativă.

c) Să se studieze natura rădăcinilor ecuaţiei propuse căutînd punctele de intersecţie ale curbei de la punctul (b) cu dreapta de ecuaţie $y = m$.

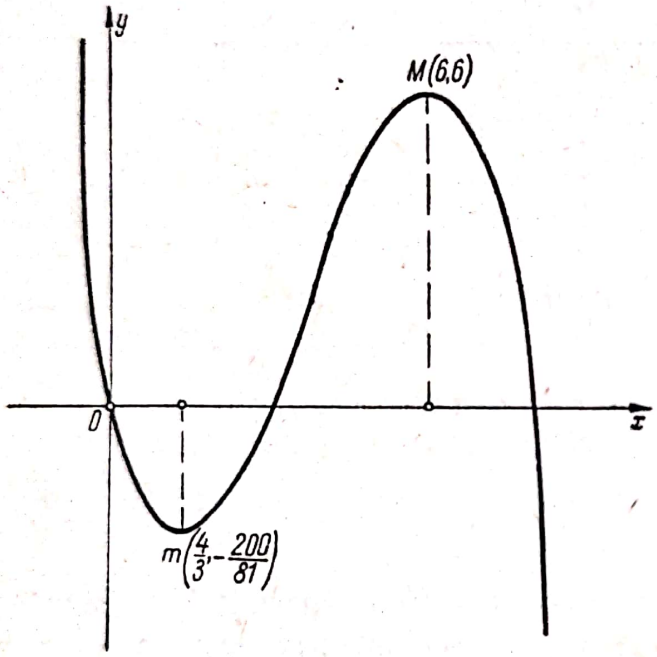


Fig. 165

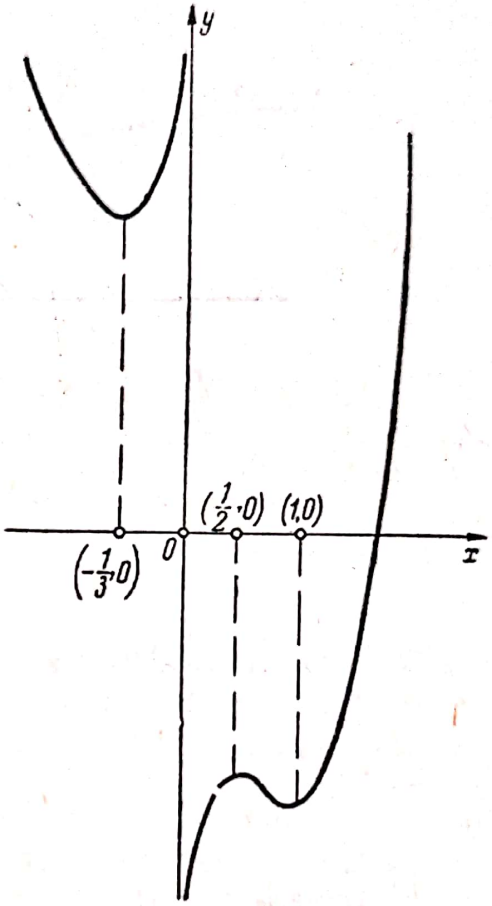


Fig. 166

R. a) m poate avea una din valorile: -5; $-\frac{19}{4}$; $\frac{17}{3}$.

b) Funcţia este definită pentru $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Graficul ei este arătat în fig. 166.

c) Pentru $m \in (-\infty, -5) \cup \left(-\frac{19}{4}, \frac{17}{3}\right)$, una reală.

Dacă $m \in \left(-5, -\frac{19}{4}\right) \cup \left(\frac{17}{3}, \infty\right)$, trei reale.

Atunci cînd m ia una din valorile -5; $-\frac{19}{4}$, sau $\frac{17}{3}$ avem una dublă şi una simplă.

Scanned with OKEN Scanner

532. Se dă funcţia

$$y = \frac{6x^4 - 13x^3 - 2x^2 + 7x + 2}{3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 8x + 3}.$$

a) Să se simplifice şi să se reprezinte grafic.

b) Să se afle unghiurile făcute de tangentele la curbă în punctele în care curba taie axa Ox.

c) Să se afle aria cuprinsă între cele două tangente de mai sus, axa Ox şi tangenta la această curbă, paralelă cu Ox.

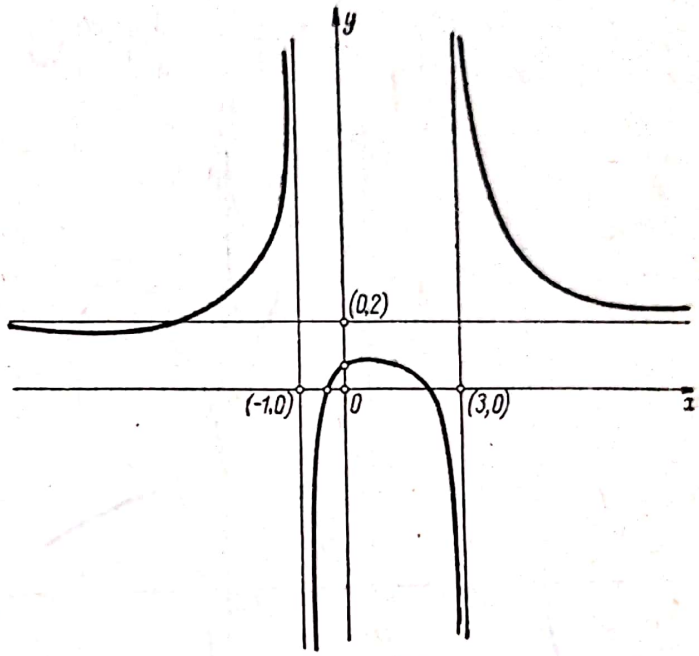


Fig. 167

R. a)

$$y = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 2x - 3};$$

este definită pentru

$$x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty).$$

Graficul are trei asimptote $x = -1$; $x = 3$ şi $y = 2$. El este arătat în fig. 167.

b) $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{3}\right)$ şi $\alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{20}{7}$.

c) $A = \frac{12\,893 - 563\sqrt{21}}{2\,560}$.

533. Să se studieze variaţia funcţiei

$$y = 9\left[\frac{x^2 - 10}{x^3 - 9x}\right]$$

şi să se reprezinte această variaţie.

Să se discute apoi ecuaţia

$$f(x) = x^3 - \lambda x^2 - 9x + 10\lambda = 0$$

stabilind natura rădăcinilor ei după valorile parametrului real λ.

R. Funcţia este definită dacă

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (3, +\infty)$$

Scanned with OKEN Scanner

Graficul este arătat în fig. 168.

Curba are asimptotele $x = \pm 3$, $x = 0$ și $y = 0$.

Dacă $\lambda \in \left(-\infty, -\frac{6}{5}\sqrt{15}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}\sqrt{6}, \frac{3}{4}\sqrt{6}\right) \cup \left(\frac{6}{5}\sqrt{15}, +\infty\right)$

ecuația are trei rădăcini reale, iar atunci cînd

$$\lambda \in \left(-\frac{6}{5}\sqrt{15}, -\frac{3}{4}\sqrt{6}\right) \cup \left(\frac{3}{4}\sqrt{6}, \frac{6}{5}\sqrt{15}\right),$$

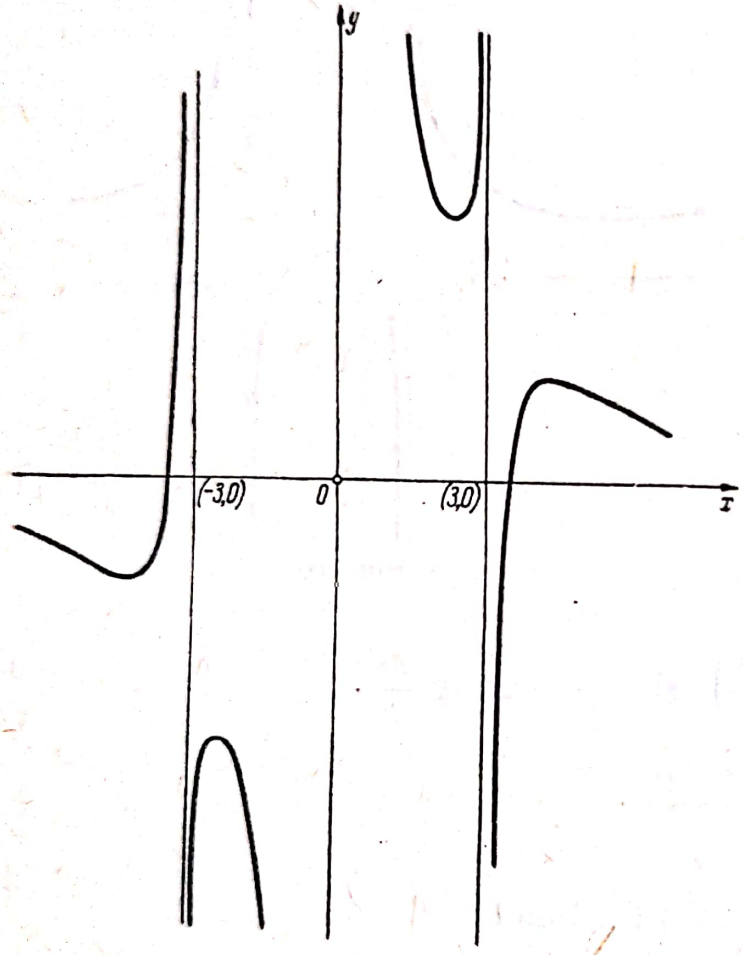


Fig. 168

numai una reală. În cazul cînd λ ia una din valorile $\pm \frac{6}{5}\sqrt{15}$, $\pm \frac{3}{4}\sqrt{6}$ ecuația are o rădăcină dublă și una simplă.

534. Se dă funcția $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$ și se cere:

a) Să se formeze funcția $\varphi(x)$ ale cărei rădăcini să fie cu două unități mai mici decît rădăcinile funcției $f(x)$.

b) Se consideră funcția

$$y = \pm\sqrt{\frac{f(x)}{\varphi(x)}}$$

și se cere să se studieze și să se reprezinte grafic variația acesteia.

c) Să se scrie ecuația tangentei la curbă în punctul de abscisă 2.

R. a) $\varphi(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$.

b) $y = \pm\sqrt{\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 9}}$ este definită pentru

$$x \in (-\infty, -3) \cup (1, 3) \cup (5, +\infty).$$

Scanned with OKEN Scanner

Graficul variației are asimptotele $x = \pm 3$, $y = \pm 1$ și este reprezentat în fig. 169.

c) $11\sqrt{15} \cdot x - 150\, y - 22\sqrt{15} = 0$.

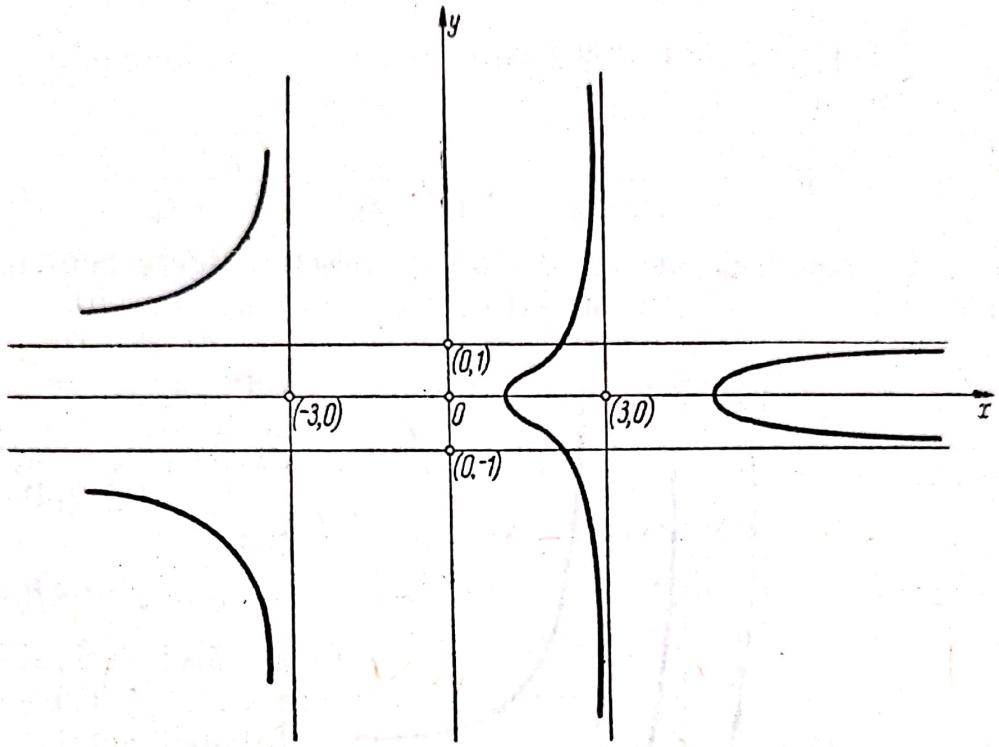


Fig. 169

535. Se consideră ecuația

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + px + 1 = 0.$$

a) Să se determine coeficientul p și să se rezolve, știind că rădăcinile sînt în progresie aritmetică.

b) Să se reprezinte grafic variația funcției

$$y = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

unde p are valoarea determinată la punctul (a).

c) Să se deducă, apoi, că ecuația $f'(x) = kf(x)$ are toate rădăcinile reale, oricare ar fi k. Să se precizeze semnele lor. În particular, să se calculeze rădăcinile ecuației corespunzătoare lui $k = 1$.

R. a) $p = 1$ și rădăcinile $x_2 = 1$; $x_{1,3} = 1 \pm \sqrt{2}$.

b) $y = \dfrac{3x^2 - 6x + 1}{x^3 - 3x^2 + x + 1}$

este definită pentru orice x, afară de $x = 1$ și $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama că

$$y = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3},$$

unde $x_1 = 1$, $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$ sînt rădăcinile polinomului de la numitor, se vede că

$$y' = -\frac{1}{(x - x_1)^2} - \frac{1}{(x - x_2)^2} - \frac{1}{(x - x_3)^2}$$

este mereu negativă; deci funcţia este descrescătoare pentru orice valoare a lui x. Graficul variaţiei este redat în fig. 170.

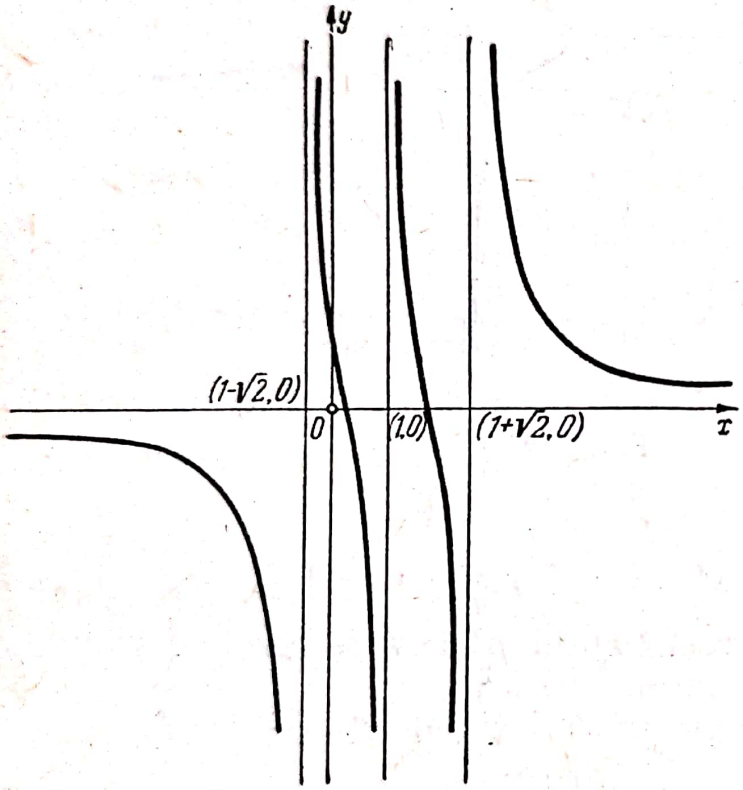


Fig. 170

c) Pentru verificare se poate utiliza graficul; pentru demonstrare, aplicăm teorema lui Rolle funcţiei:

$$z = e^{-kx} \cdot f(x),$$

a cărei derivată este $z' = e^{-kx}\,[f'(x) - kf(x)]$. Întrucît ecuaţia $z = 0$ are trei rădăcini x_1, x_2, x_3 distincte (rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$), ecuaţia $z' = 0$ are, conform teoremei menţionate, cel puţin cîte o rădăcină în intervalele (x_1, x_2), (x_2, x_3). Cum derivata z' este un polinom de gradul al treilea (abstracţie făcînd de factorul e^{-kx}) cu coeficienţi reali care admite două rădăcini reale, rezultă că are şi a treia rădăcină tot reală. Această teoremă este valabilă şi în cazul general cînd $f(x) = 0$ este o ecuaţie de gradul m cu m rădăcini reale distincte.

Pentru $k = 1$ rădăcinile sînt 0 şi $3 \pm \sqrt{2}$.

CAPITOLUL VI

PROBLEME DIVERSE

A. Exerciţii şi probleme rezolvate propuse la examenele de maturitate[1]

536. Se consideră polinomul $P(x) = x^4 + mx^3 + nx^2 + 5x + p$. Să se determine m, n, p astfel încît polinomul $P(x)$ să fie divizibil cu $x^3 - 2x^2 - x + 2$, apoi să se rezolve ecuaţia $P(x) = 0$.

Examenul de maturitate, Craiova, 1957.

R. Condiţia de divizibilitate implică să avem identitatea

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + 5x + p = (x^3 - 2x^2 - x + 2)(x + r).$$

unde m, n, p, r sînt coeficienţi pe care urmează să-i determinăm.

Scriind că puterile asemenea ale lui x din ambii membri au coeficienţi egali, obţinem

$$m = r - 2;\ n = -2r - 1;\ 2 - r = 5 \text{ şi } 2r = p,$$

de unde rezultă $m = -5;\ n = 5;\ r = -3$ şi $p = -6$.

Astfel polinomul $P(x)$ se descompune în produsul

$$P(x) = (x^3 - 2x^2 - x + 2)(x - 3).$$

Avînd în vedere că avem $x^3 - 2x^2 - x + 2 \equiv (x - 2) \times (x^2 - 1)$, rezultă că ecuaţia $P(x) = 0$ are rădăcinile

$$x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2 \text{ şi } x_4 = 3.$$

537. Se dă ecuaţia de gradul al doilea, în x

$$(m - 1)x^2 - 2mx + 3 = 0.$$

Să se determine valorile lui m pentru care $\frac{1 + x_1}{1 - x_2} + \frac{1 + x_2}{1 - x_1} \geqslant 8$, unde x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei date.

Examenul de maturitate, Iaşi, 1957.

---

[1]) Alte probleme propuse la examenele de maturitate se găsesc la nr. 438, 441, 442, 451, 453—458, 460, 462, 496, 498, 500—502, 504—507, 509 şi 511.

Scanned with OKEN Scanner

R. Aducînd la același numitor și punînd în evidență suma și produsul rădăcinilor ecuației, inegalitatea devine

$$\frac{2-(x_1+x_2)^2+2x_1x_2}{1-(x_1+x_2)+x_1x_2} \geqslant 8.$$

După ce înlocuim $x_1+x_2=\frac{2m}{m-1}$; $x_1x_2=\frac{3}{m-1}$ și efectuăm calculele, obținem inegalitatea

$$\frac{2(3m^2-11m+6)}{m^2-3m+2} \leqslant 0.$$

Se găsește $\frac{2}{3} \leqslant m < 1$, sau $2 < m \leqslant 3$.

538. a) Să se formeze ecuația de gradul al doilea, cunoscînd suma S a rădăcinilor și realizantul R

$$S = 2(m-1);\ R = 4(m^2-m-2).$$

b) Rădăcinile acestei ecuații fiind x_1 și x_2, să se determine m, astfel încît $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}=2$.

Examenul de maturitate, București, 1957.

R. a) Dacă notăm cu P produsul rădăcinilor, ecuația cerută este

$$x^2-2(m-1)x+P=0.$$

Pentru a afla P, scriem că realizantul acestei ecuații este R dat. Avem deci

$$4(m-1)^2-4P=4(m^2-m-2),$$

de unde rezultă $P=3-m$, iar ecuația de gradul al doilea este

$$x^2-2(m-1)x+3-m=0.$$

b) Condiția dată este echivalentă cu $\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1x_2}=2$, sau cu

$$(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=2x_1x_2.$$

Înlocuind $x_1+x_2=2(m-1)$ și $x_1x_2=3-m$, avem de rezolvat ecuația

$$4(m-1)^3+3(m-3)(m-1)=3-m,$$

sau

$$4m^3 - 9m^2 + m + 2 = 0.$$

Această ultimă ecuație se descompune în

$$m - 2 = 0 \text{ și } 4m^2 - m - 1 = 0,$$

ale căror rădăcini sînt

$$m_1 = 2 \text{ și } m_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}.$$

539. Se consideră ecuația $x^2 - 2(m + 1)\,x + 2(m - 1) = 0$ în care m este un parametru real. Se cere:

a) să se arate că rădăcinile acestei ecuații sînt reale, oricare ar fi valorile lui m;

b) să se determine m astfel, încît între rădăcini să existe relația $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < \frac{1}{2}$.

Examenul de maturitate, Craiova, 1957.

R. a) Discriminantul ecuației este

$$\Delta = (m + 1)^2 - 2(m - 1) = m^2 + 3,$$

care este pozitiv pentru orice valoare a lui m.

b) Avem $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2(m + 1)}{2(m - 1)}$. Pentru a găsi cum trebuie să fie m, avem de rezolvat inegalitatea

$$\frac{m + 1}{m - 1} - \frac{1}{2} < 0, \text{ sau } \frac{m + 3}{2(m - 1)} < 0,$$

de unde rezultă

$$-3 < m < 1.$$

540. Să se rezolve ecuația

$$\log_{z^2}(x^2 - 2ab) + \log_z(x^2 - 2ab) = 3,$$

în care $z = \sqrt{a^2 + b^2}$

Examenul de maturitate, Timișoara, 1957.

R. Ținînd seama că $\log_b a = \frac{\lg a}{\lg b}$, ecuația dată devine

$$\frac{\lg (x^2 - 2ab)}{2 \lg z} + \frac{\lg (x^2 - 2ab)}{\lg z} = 3$$

sau $\lg (x^2 - 2ab) + 2 \lg (x^2 - 2ab) = 6 \lg z = 3 \lg (a^2 + b^2)$, unde simbolul „lg" reprezintă logaritmii zecimali.

Rezultă $x^2 - 2ab = a^2 + b^2$ și prin urmare $x = \pm (a + b)$.

541. Să se pună expresia

$$E = \frac{2 \sin b \cos a (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)}{1 - \cos (a + b)} + \frac{\sin \frac{a - b}{2}}{\cos b \sin \frac{a + b}{2}}$$

sub forma cea mai simplă.

Examenul de maturitate, Iași, 1957

R. Transformînd $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$ și $1 - \cos (a + b)$ putem scrie

$$E = \frac{2 \sin b \cos a \cdot \frac{\sin (a + b)}{\cos a \cos b}}{2 \sin^2 \frac{a + b}{2}} + \frac{\sin \frac{a - b}{2}}{\cos b \sin \frac{a + b}{2}}.$$

După înlocuirea $\sin (a + b) = 2 \sin \frac{a + b}{2} \cos \frac{a + b}{2}$ și efectuarea simplificărilor obținem

$$E = \frac{2 \sin b \cos \frac{a + b}{2} + \sin \frac{a - b}{2}}{\cos b \sin \frac{a + b}{2}}.$$

Dacă ținem seama că $2 \sin b \cos \frac{a + b}{2} = \sin \left(b + \frac{a + b}{2} \right) - \sin \frac{a - b}{2}$, avem

$$E = \frac{\sin \frac{a + 3b}{2}}{\cos b \sin \frac{a + b}{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

542. Să se simplifice fracția

$$F = \frac{\sin^2 7x - \sin^2 4x}{\cos^2 5x - \cos^2 6x}.$$

Examenul de maturitate, Craiova, 1957.

R. Se mai poate scrie

$$F = \frac{\sin^2 7x - \sin^2 4x}{1 - \sin^2 5x - (1 - \sin^2 6x)} = \frac{\sin^2 7x - \sin^2 4x}{\sin^2 6x - \sin^2 5x}.$$

Folosind formula cunoscută $\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a+b)\sin(a-b)$, fracția F devine

$$F = \frac{\sin(7x-4x)\sin(7x+4x)}{\sin(6x-5x)\sin(6x+5x)} = \frac{\sin 3x}{\sin x}.$$

Dacă ținem seama că $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, atunci avem mai departe

$$F = 3 - 4\sin^2 x.$$

543. Să se rezolve ecuația

$$m\cos 2x + 2(m^2+3)\sin x - 7m = 0.$$

Între ce valori trebuie să varieze m, pentru ca ecuația să admită rădăcini reale?

Examenul de maturitate, București, 1957.

R. Înlocuind $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, ecuația dată devine după reduceri și simplificări

$$m\sin^2 x - (m^2+3)\sin x + 3m = 0,$$

de unde rezultă

$$\text{I) } \sin x' = m \text{ și } \text{II) } \sin x'' = \frac{3}{m}.$$

Pentru ca ecuația I să aibă rădăcini reale trebuie să avem

$$-1 \leqslant m \leqslant 1.$$

Aceste valori ale lui m fac ca $\left|\frac{3}{m}\right| > 1$ și prin urmare ecuația II nu are rădăcini reale cînd $|m| \leqslant 1$.

Ecuația II admite valori reale pentru x dacă avem

$\left|\frac{3}{m}\right| \leqslant 1$, altfel spus, dacă $m \leqslant -3$ sau $m \geqslant 3$.

Pentru astfel de valori ale lui m este evident că ecuația 1 nu admite valori reale pentru x.

Din cele arătate mai sus rezultă că ecuația dată admite cîte un singur șir de valori reale în următoarele cazuri

1) $m \leqslant -3$; 2) $-1 \leqslant m \leqslant 1$; 3) $m \geqslant 3$.

Ecuația dată nu admite rădăcini reale, dacă

$$-3 < m < -1 \text{ sau } 1 < m < 3.$$

544. Să se găsească toate soluțiile ecuației

$$4 \sin^4 x + 2 \cos 2x = 1 + 3 \sin^2 2x$$

cuprinse între 0° și 360°.

Examenul de maturitate, Iași, 1957.

R. Înlocuim $\sin^2 x$ prin $\frac{1 - \cos 2x}{2}$ și prin urmare

$$\sin^4 x = \frac{1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4}$$

sau

$$\sin^4 x = \frac{1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}}{4} = \frac{3 - 4 \cos 2x + \cos 4x}{8}.$$

De asemenea, înlocuim $\sin^2 2x$ prin $\frac{1 - \cos 4x}{2}$, după care ecuația dată devine

$$4 \frac{3 - 4 \cos 2x + \cos 4x}{8} + 2 \cos 2x = 1 + 3 \frac{1 - \cos 4x}{2}$$

sau

$$\frac{3}{2} - 2 \cos 2x + \frac{\cos 4x}{2} + 2 \cos 2x = 1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos 4x.$$

După reduceri, obținem

$$2 \cos 4x = 1, \text{ sau } \cos 4x = \cos 60°,$$

ale cărei soluții generale sînt date de

$$4x \mp 60° = 2n \cdot 180°.$$

Rezultă deci $x = \frac{n \cdot 180°}{2} \pm \frac{180°}{12} = n \cdot 90° \pm 15°$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a obține soluțiile cuprinse între 0° și 360° dăm lui n valorile 0; 1; 2; 3 și 4 și obținem soluțiile

$$x_1 = 15°;\ x_2 = 75°;\ x_3 = 105°;\ x_4 = 165°;\ x_5 = 195°;$$
$$x_6 = 255°;\ x_7 = 285°,\ x_8 = 345°.$$

545. Să se găsească toate soluțiile ecuației trigonometrice

$$\sqrt{2}\,(\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x) = 4(\sin x + \cos x)$$

cuprinse între 0° și 360°.

Examenul de maturitate, Iași, 1957.

R. Ecuația dată se mai poate scrie

$$\sqrt{2}\,\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} - 4(\cos x + \sin x) = 0,$$

sau

$$(\cos x + \sin x)\cdot\frac{\sqrt{2}\,(\cos x - \sin x) - 4 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 0. \qquad (1)$$

Înlocuind $2 \sin \cos x$ prin $1 - (\cos x - \sin x)^2$ ecuația (1) devine

$$\frac{(\cos x + \sin x)\,[2\,(\cos x - \sin x)^2 + \sqrt{2}\,(\cos x - \sin x) - 2]}{\sin x \cos x} = 0,$$

ale cărei soluții sînt date de

$$\cos x + \sin x = 0$$

și

$$2\,(\cos x - \sin x)^2 + \sqrt{2}\,(\cos x - \sin x) - 2 = 0$$

sau de

I) $\cos x + \sin x = 0$

II) $\cos x - \sin x = -\sqrt{2}$

III) $\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ținînd seama că avem $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ și $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, cele trei ecuații I, II, III devin

I) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ cu soluția generală $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{(2n+1)\pi}{2}$,

II) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ cu soluția generală $x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$.

și

III) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ cu soluția generală $x_3=\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2n\pi$.

546. Să se rezolve ecuația

$$2\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcsec} 5x=\frac{\pi}{2}.$$

Examenul de maturitate, Timișoara, 1957.

R. Ecuația dată se mai poate scrie

$$\operatorname{arcsec} 5x=\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg} x. \tag{1}$$

Aplicînd secanta în ambii membri, obținem

$$5x=\sec\left(\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg} x\right);\quad 5x=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg} x\right)};$$

$$5x=\frac{1}{\sin(2\operatorname{arctg} x)}$$

sau

$$5x\cdot\sin(2\operatorname{arctg} x)=1. \tag{2}$$

Dacă notăm $\operatorname{arctg} x=\alpha$ și ținem seama că $\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ ecuația (2) devine

$$5x\cdot\frac{2x}{1+x^2}=1,$$

sau

$$10x^2=1+x^2 \text{ cu soluțiile } x_{1,2}=\pm\frac{1}{3}.$$

547. Se dau două cercuri cu centrele O și O', cu razele $R=3$ cm și $R'=4$ cm și cu distanța centrelor $\overline{OO'}=5$ cm. Fie A și B punctele de intersecție ale celor două cercuri. Se duc tangentele comune exterioare care se intersectează în punctul S. Se notează cu T și T' punctele de contact ale uneia dintre aceste tangente cu cele două cercuri.

Prin punctul A de intersecție al celor două cercuri se duc două secante oarecare, care taie cercul de centru O în punctele C, D, iar celălalt cerc în punctele C', D'. Se cere:

a) să se calculeze lungimea segmentelor $\overline{TT'}$ și $\overline{SO'}$;
b) să se arate că dreptele CD și $C'D'$ sînt perpendiculare;
c) să se afle aria corpului rezultat prin rotirea cercurilor în jurul dreptei OO'.

Examenul de maturitate, București, 1957.

R. a) Avem

$$\overline{TT'} = \sqrt{\overline{OO'}^2 - (R' - R)^2} = \sqrt{25 - 1} = 2\sqrt{6}.$$

Din asemănarea triunghiurilor SOT și $SO'T'$ (fig. 171) rezultă

$$\frac{\overline{SO'}}{\overline{O'T'}} = \frac{\overline{SO}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{SO'} - \overline{SO}}{\overline{O'T'} - \overline{OT}} = \frac{5}{4 - 3} = 5$$

și prin urmare $\overline{SO'} = 5 \cdot \overline{O'T'} = 5 \cdot 4 = 20$.

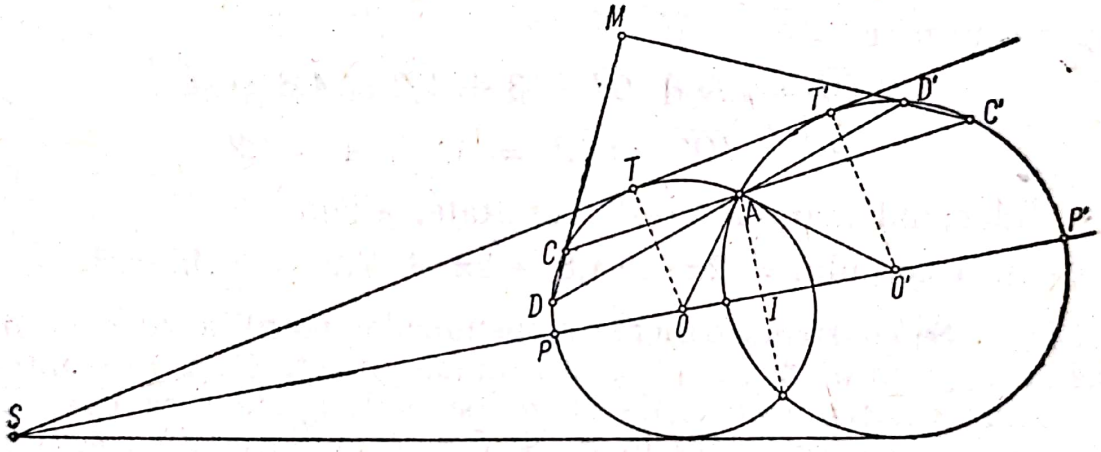


Fig. 171

b) Calculăm unghiul M al dreptelor CD, $C'D'$.

Avem $\text{măs}\,\hat{M} = 180° - (\widehat{CDA} + \widehat{AD'M}) = 180° -$

$$- \text{măs}\left(\frac{\widehat{CA}}{2} + \frac{\widehat{AD'}}{2} + \frac{\widehat{D'C'}}{2}\right).$$

Pe de altă parte cunoaștem

$\text{măs}\,\frac{\widehat{CA}}{2}$ = măs unghiului tangentei în A la cercul O cu coarda AC și $\text{măs}\left(\frac{\widehat{AD'}}{2} + \frac{\widehat{D'C'}}{2}\right)$ = măs unghiului tangentei în A la cercul O' cu AC'.

Unghiul tangentelor din A este egal cu unghiul razelor duse în A, egal cu 90°, pentru că triunghiul OAO' este dreptunghic, cunoscînd că avem $\overline{OA}^2 + \overline{O'A}^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = \overline{OO'}^2$. Rezultă prin urmare că $\hat{M} = 90°$.

e) Aria corpului se obține adunînd ariile calotelor descrise respectiv de arcele APB și $AP'B$, unde P și P' sînt punctele extreme ale intersecției liniei centrelor cu cele două cercuri. Dacă notăm cu I intersecția dreptei OO' cu coarda comună a celor două cercuri avem

$$\text{aria corpului} = 2\pi \cdot 3 \cdot \overline{PI} + 2\pi \cdot 4 \cdot \overline{IP'}.$$

Din triunghiul dreptunghic OAO' avem

$$\overline{OI} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OO'}} = \frac{3^2}{5} = 1{,}8 \text{ și } \overline{IO'} = \frac{\overline{O'A}^2}{\overline{OO'}} = \frac{4^2}{5} = 3{,}2;$$

și prin urmare

$$\overline{PI} = \overline{PO} + \overline{OI} = 3 + 1{,}8 = 4{,}8 \text{ și}$$

$$\overline{IP'} = \overline{IO'} + \overline{O'P'} = 3{,}2 + 4 = 7{,}2.$$

Înlocuind mai sus aceste rezultate, aflăm

$$\text{aria corpului} = 2\pi \cdot 3 \cdot 4{,}8 + 2\pi \cdot 4 \cdot 7{,}2 = 86{,}4\pi \text{ cm}^3.$$

548. Se consideră o sferă; perpendicular pe mijlocul unei raze OA se duce un plan, care taie sfera după un cerc C, în care latura pătratului înscris este egală cu a. Se prelungește raza OA pînă înțeapă a doua oară sfera în B. Se cere volumul conului care are vîrful în B și ca bază, cercul (C).

Examenul de maturitate, Timișoara, 1957.

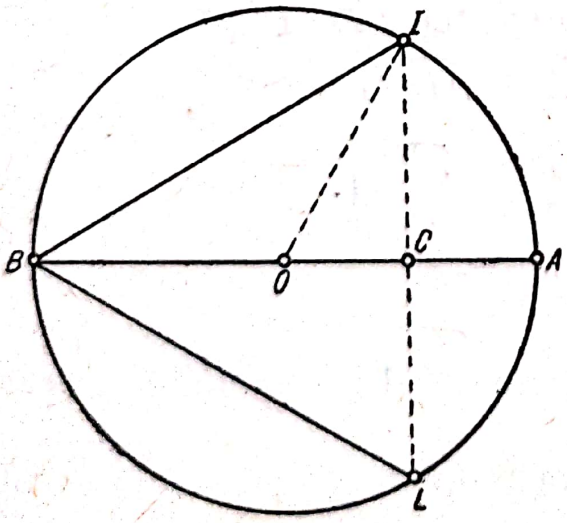


Fig. 172

R. Considerăm o secțiune în sferă printr-un plan care trece prin centru (fig. 172) Secțiunea în con va fi triunghiul isoscel IBL, iar în cercul C—dreapta IL.

Raza bazei conului $\overline{IC}$ se calculează știind că latura pătratului înscris în cercul C are lungimea a, de unde rezultă

$$\overline{IC}\sqrt{2} = a, \text{ sau } \overline{IC} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a afla raza sferei, ţinem seama că

$$\overline{OI}^2 - \overline{OC}^2 = \overline{IC}^2$$

dar s-a dat

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OA}}{2} = \frac{\overline{OI}}{2};$$

rezultă

$$4\overline{OC}^2 - \overline{OC}^2 = \frac{a^2}{2}, \text{ sau } \overline{OC} = \frac{a}{\sqrt{6}},$$

iar raza sferei $\overline{OB} = 2\,\overline{OC} = \frac{2a}{\sqrt{6}}$.

Înălţimea conului va fi $\overline{BC} = 3\overline{OC} = \frac{3a}{\sqrt{6}}$

şi prin urmare volumul cerut este dat de expresia

$$V = \frac{\pi \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{3a}{\sqrt{6}}}{3} = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{12}.$$

549. Se dă un triunghi isoscel ABC cu $\overline{AB} = \overline{BC} = a$ cm şi $\overline{AC} = b$ cm. Prin centrul O al cercului înscris în acest triunghi se duce o perpendiculară $\overline{OS}$ pe planul ABC. Unghiul diedru al planelor ABC şi ASB este φ. Se cere aria totală şi volumul tetraedrului $SABC$. Caz particular $a = 20$ cm, $b = 24$ cm şi $\varphi = 60°$.

Examenul de maturitate, Iaşi, 1957.

R. Unghiul diedru al planelor ABC şi ASB este totodată şi unghiul format de raza $\overline{OT}$ dusă la punctul de contact cu înălţimea $\overline{ST}$ a triunghiului SAB (fig. 173). Pentru a calcula aria totală şi volumul avem nevoie de lungimile $\overline{OT}$ şi $\overline{ST}$. Observăm că înălţimea $\overline{ST}$ este de asemenea şi înălţimea dusă din S a triunghiurilor SAC şi SBC. Avem

$$\overline{OT} = \frac{\text{aria } (ABC)}{\frac{AB + BC + AC}{2}} = \frac{\frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{2}{4}}}{a + \frac{b}{2}}$$

sau

$$\overline{OT} = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2(2a + b)}.$$

Lungimile segmentelor $\overline{SO}$ și $\overline{ST}$ se calculează cu elementele cunoscute ale triunghiului dreptunghic SOT de unde rezultă

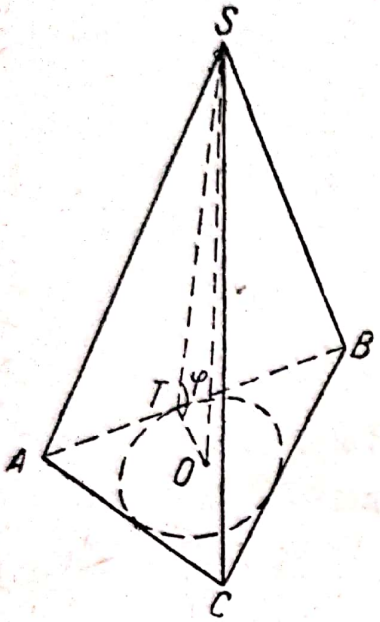


Fig. 173

$$\overline{SO} = \overline{OT}\,\operatorname{tg}\varphi = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2(2a + b)} \cdot \operatorname{tg}\varphi \text{ și}$$

$$\overline{ST} = \frac{\overline{OT}}{\cos\varphi} = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2(2a + b)\cos\varphi}.$$

Deducem prin urmare

$$\text{aria totală} = \frac{2a + b}{2} \cdot \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2(2a + b)\cos\varphi} +$$

$$+ \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4} = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4}(1 + \sec\varphi), \text{ iar}$$

$$\text{volumul} = \frac{\frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4} \cdot \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2(2a + b)}\operatorname{tg}\varphi}{3} = \frac{b^2(4a^2 - b^2)}{24(2a + b)}\operatorname{tg}\varphi =$$

$$= \frac{b^2}{24}(2a - b)\operatorname{tg}\varphi.$$

Pentru $a = 20$, $b = 24$ și $\varphi = 60°$, avem aria totală $= 576$ cm² și volumul $= 384\sqrt{3}$ cm³.

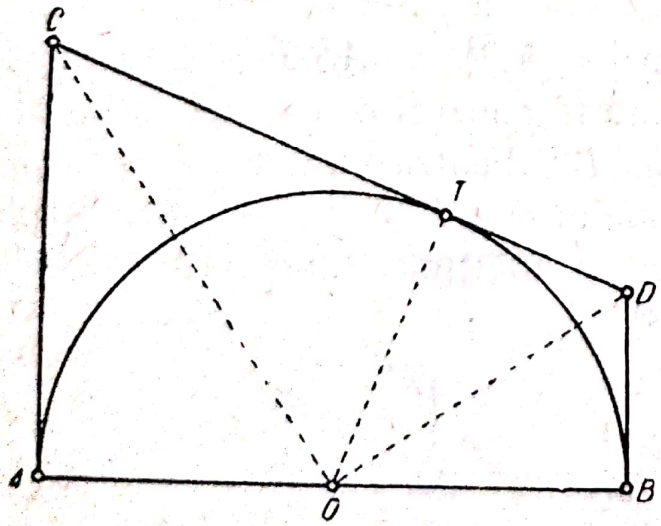


Fig. 174

550. Se consideră un cerc cu diametrul $\overline{AB}$ (fig. 174). Tangentele la cerc în punctele A și B sînt intersectate în C și D de o a treia tangentă la cerc. Figura $ABDC$ rotită în jurul lui $\overline{AB}$ dă naștere unui trunchi de con. Se cere volumul acestui corp, cunoscînd raza R și lungimea $\overline{CD} = a$.

Examenul de maturitate, Timișoara, 1957.

Scanned with OKEN Scanner

R. Volumul trunchiului este dat de formula

$$V = \frac{\pi \cdot \overline{AB}}{3} (\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{AC} \cdot \overline{BD}).$$

Pentru a exprima V în funcție de R și a, observăm că triunghiul COD este dreptunghic în O și că avem $\overline{AC} = \overline{CT}$; $\overline{BD} = \overline{DT}$ și $\overline{OT}^2 = R^2 = \overline{CT} \cdot \overline{TD}$, unde T este punctul de tangență a dreptei $\overline{CD}$ cu cercul O. Rezultă

$$V = \frac{2\pi R}{3} (\overline{CT}^2 + \overline{DT}^2 + \overline{CT} \cdot \overline{DT}), \text{ sau}$$

$$V = \frac{2\pi R}{3} [(\overline{CT} + \overline{DT})^2 - \overline{CT} \cdot \overline{DT}].$$

Ținînd seama de cele spuse mai sus și că avem $\overline{CT} + \overline{DT} = \overline{CD} = a$, obținem

$$V = \frac{2\pi R}{3} (a^2 - R^2).$$

551. Pe semicercul de diametru $\overline{AB} = 2R$ se consideră arcul $AmC = 120°$. Dreapta AC taie tangenta în B la semicerc în punctul D. Triunghiul ABD se rotește în jurul dreptei AD. Să se arate că raportul ariilor celor două conuri astfel obținute este $\frac{1}{\sqrt{3}}$, iar raportul volumelor este $\frac{1}{3}$. Figura limitată de arcul AmC și coarda AC se rotește în jurul diametrului AB. Să se calculeze volumul corpului obținut.

Examenul de maturitate, Craiova, 1957.

R. Deoarece arcul AmC (fig. 175) este de 120°, rezultă $\overline{AC} = R\sqrt{3}$ și $\overline{BC} = R$. Avînd $\overline{BC} \perp \overline{AD}$, deducem $\overline{CD} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}} = \frac{R^2}{R\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}}$ și prin urmare $\overline{BD}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{AD} = \frac{R}{\sqrt{3}} \left(R\sqrt{3} + \frac{R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4R^2}{3}$, sau $\overline{BD} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Avînd aceste elemente, obținem aria laterală a conului generat de $\overline{AB}$,

$$A_1 = \pi \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AB}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi aria laterală a conului generat de $\overline{BD}$, $A_2 = \pi \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BD}$, de unde rezultă

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\pi \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BD}}{\pi \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{2R}{\sqrt{3}}}{2R} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pentru a demonstra că raportul volumelor este $\frac{1}{3}$, calculăm

V_1 = volumul conului generat de $\overline{AB} = \frac{\pi \cdot \overline{BC}^2 \cdot \overline{AC}}{3}$.

V_2 = volumul conului generat de $\overline{BD} = \frac{\pi \cdot \overline{BC}^2 \cdot \overline{CD}}{3}$,

de unde obţinem

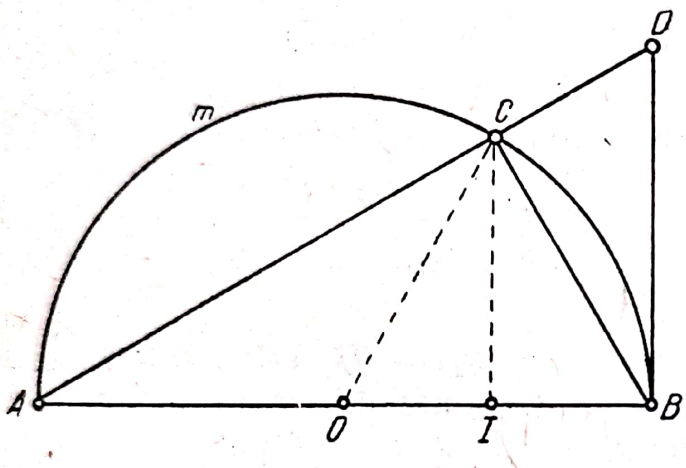


Fig. 175

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{R}{\sqrt{3}}}{R\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Cele stabilite mai sus demonstrează prima parte din enunţ. Dacă notăm cu O centrul cercului şi cu I proiecţia lui C pe $\overline{AB}$, putem scrie V = volumul descris de segmentul AmC = volumul sectorului de sferă generat de AmC + volumul conului generat de OCI — volumul conului generat de AC. Rezultă, deci,

$$V = \frac{2\pi R \cdot \overline{AI} \cdot R}{3} + \frac{\pi \cdot \overline{IC}^2 \cdot \overline{OI}}{3} - \frac{\pi \cdot \overline{IC}^2 \cdot \overline{AI}}{3} = \frac{2\pi R^2}{3} \cdot \frac{3R}{2} -$$

$$- \frac{\pi \cdot \overline{IC}^2}{3}(\overline{AI} - \overline{OI}),$$

adică

$$V = \frac{3\pi R^3}{4}.$$

552. Se consideră o piramidă cu baza un dreptunghi $ABCD$ şi vîrful în punctul S. Să se afle aria laterală şi volumul piramidei cunoscînd $\widehat{SAB} = \alpha$, $\widehat{SAD} = \beta$, $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = \overline{SD} = a$.

Examenul de maturitate, Craiova, 1957.

Scanned with OKEN Scanner

R. Aria laterală a piramidei S_{ABCD} (fig. 176) este egală cu $S = 2(\text{aria } SAB + \text{aria } SAD)$.

Avem aria $SAB = \frac{SA \cdot SB \sin(180° - 2\alpha)}{2} = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2}$ și în mod analog, aria $SAD = \frac{a^2 \sin 2\beta}{2}$, de unde rezultă

$$S_{ABCD} = a^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = 2a^2 \sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta).$$

Pentru a calcula volumul, avem nevoie de aria bazei și lungimea $\overline{SI}$ a înălțimii piramidei. Observînd că $\overline{AB} = 2a\cos\alpha$ și $\overline{AD} = 2a\cos\beta$, atunci aria bazei este $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 4a^2 \cos\alpha \times \cos\beta$. Înălțimea se calculează din triunghiul dreptunghic SAI, unde avem $\overline{SI}^2 = \overline{SA}^2 - \overline{AI}^2$.

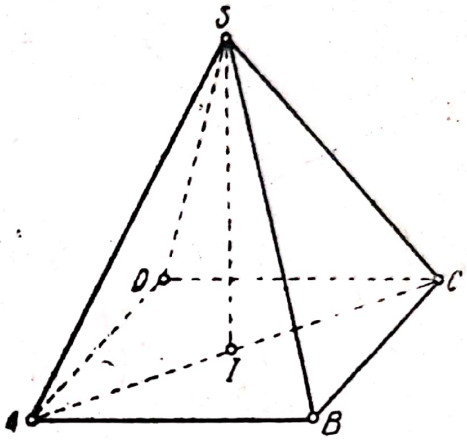


Fig. 176

Din triunghiul dreptunghic ABC deducem

$$4\overline{AI}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 4a^2\cos^2\alpha + 4a^2\cos^2\beta$$

și prin urmare

$$\overline{SI}^2 = a^2 - a^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) = a^2(\sin^2\alpha - \cos^2\beta)$$

sau

$$\overline{SI}^2 = a^2 \cdot \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 + \cos 2\beta}{2}\right) = -a^2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta).$$

Înălțimea este dată, deci, de expresia

$$\overline{SI} = a\sqrt{\cos(\alpha + \beta)\cos(180° + \beta - \alpha)},$$

de unde rezultă că volumul piramidei este egal cu

$$V = \frac{4a^3 \cos\alpha \cos\beta \sqrt{\cos(\alpha + \beta)\cos(180° + \beta - \alpha)}}{3}.$$

553. O piramidă triunghiulară cu vîrful S și baza ABC are muchiile $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ egal înclinate pe planul ABC cu un unghi φ. Triunghiul ABC are $AB = 2a$, $\widehat{CAB} = \widehat{CBA} = \alpha$. Se cere aria totală a piramidei.

Examenul de maturitate, Iași, 1957.

R. Dacă notăm cu I (fig. 177) proiecția ortogonală a vîrfului S pe planul ABC al bazei, atunci triunghiurile dreptunghice SAI, SBI, SCI avînd unghiurile ascuțite SAI, SBI, SCI egale fiecare cu φ și o catetă comună $\overline{SI}$ sînt egale. Rezultă

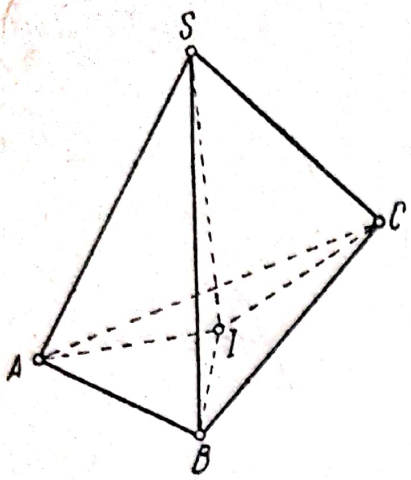


Fig. 177

$$\overline{IA} = \overline{IB} = \overline{IC} = \frac{\overline{AB}}{2 \sin (180^\circ - 2\alpha)} = \frac{a}{\sin 2\alpha}$$

și

$$\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = \frac{\overline{AI}}{\cos \varphi} = \frac{a}{\sin 2\alpha \cos \varphi}.$$

Avînd elementele de mai sus, obținem

$$\text{aria } SAB = \frac{2a \sqrt{\dfrac{a^2}{\sin^2 2\alpha \cos^2 \varphi} - a^2}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha \cos^2 \varphi}}{\sin 2\alpha \cos \varphi}.$$

Avînd în vedere că avem $\overline{BC} = \overline{AC} = \dfrac{a}{\cos \alpha}$, deducem

$$\text{aria } SAC = \text{aria } SBC = \frac{\dfrac{a}{\cos \alpha} \sqrt{\dfrac{a^2}{\sin^2 2\alpha \cos^2 \varphi} - \dfrac{a^2}{4 \cos^2 \alpha}}}{2} =$$

$$= \frac{a^2 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi}}{4 \cos^2 \alpha \sin \alpha \cos \varphi}.$$

Ținînd seama că avem și aria $ABC = \dfrac{2a \cdot a \operatorname{tg} \alpha}{2} = a^2 \operatorname{tg} \alpha$, atunci aria totală a piramidei este dată de expresia

$$A = \frac{a^2 \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha \cos^2 \varphi}}{\sin 2\alpha \cos \varphi} + \frac{a^2 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi}}{2 \cos^2 \alpha \sin \alpha \cos \varphi} + a^2 \operatorname{tg} \alpha,$$

sau

$$A = \frac{a^2}{\sin 2\alpha \cos \alpha \cos \varphi} + [\cos \alpha \cdot \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha \cos^2 \varphi} + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi} +$$

$$+ \sin \alpha \sin 2\alpha \cos \varphi].$$

554. Pe segmentul $\overline{AB} = 2a$ ca diametru, se descrie un semicerc. Fie M un punct pe segmentul $\overline{AB}$ și notăm $\overline{AM} = x$. Perpen-

Scanned with OKEN Scanner

diculara prin M pe $\overline{AB}$ taie semicercul în N. Dreapta BN taie în P tangenta în A la semicerc. Să se determine valorile lui x pentru care volumul născut de triunghiul ABP este de două ori volumul născut de triunghiul format de segmentele $\overline{AP}$ și $\overline{PN}$ și de arcul de cerc NA în rotirea în jurul diametrului $\overline{AB}$.

Examenul de maturitate, Iași, 1957

R. Ținînd seama de relațiile $\overline{MN}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{MB}$ și $\frac{\overline{AP}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MB}}$ (fig. 178) obținem $\overline{AP} = \frac{2a\sqrt{x(2a-x)}}{2a-x}$, de unde rezultă că volumul generat de triunghiul ABP este

$$V_{ABP} = \frac{\pi AP^2 \cdot AB}{3} = \frac{8\pi a^3}{3} \cdot \frac{x}{2a-x}.$$

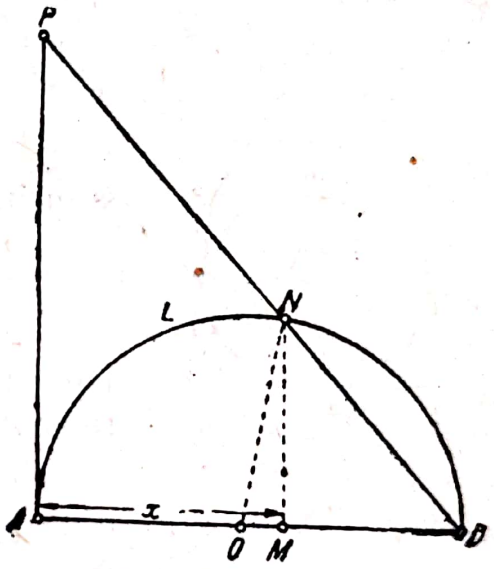


Fig. 178

Volumul generat de triunghiul mixtiliniu $ALNP$ este dat de expresia

$$V_{ALNP} = V_{AEP} - V_{ALMN} - V_{MNB}.$$

Condiția pusă de problemă este $V_{ABP} = 2(V_{ABP} - V_{ALNM} - V_{MNB})$, de unde rezultă

$$V_{ABP} = 2(V_{ALNM} + V_{MNB}).$$

Exprimînd suma volumelor descrise de figura mixtilinie $ALNM$ și de triunghiul MNB, obținem

$$V_{ALNM} + V_{MNB} = \frac{2\pi a^2 x}{3} + \frac{\pi a x (2a-x)}{3},$$

după care relația (1) devine

$$\frac{8\pi a^3}{3} \cdot \frac{x}{2a-x} = 2\left[\frac{2\pi a^2 x}{3} + \frac{\pi a x (2a-x)}{3}\right],$$

care este o ecuație de gradul al doilea, a cărei soluție cu sens în problema noastră este

$$x = (3 - \sqrt{5})a.$$

555. Un trunchi de piramidă are fețele laterale egal înclinate pe baza mare cu un unghi φ. Cele două baze ale trunchiului de piramidă sînt trapeze isoscele cu raportul de asemănare $k < 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Trapezul bazei mari are laturile paralele egale respectiv cu $2a$ și $2b$. Se cere volumul și aria laterală a trunchiului de piramidă.

Examenul de maturitate, Iași, 1957.

R. Din cauză că fețele trunchiului sînt egal înclinate pe bază, piciorul I al perpendicularei dusă din vîrful V al piramidei din care face parte trunchiul este egal depărtat de laturile trapezului (fig. 179). Fie M, N, P, Q punctele de contact ale cercului înscris în trapezul $ABCD$.

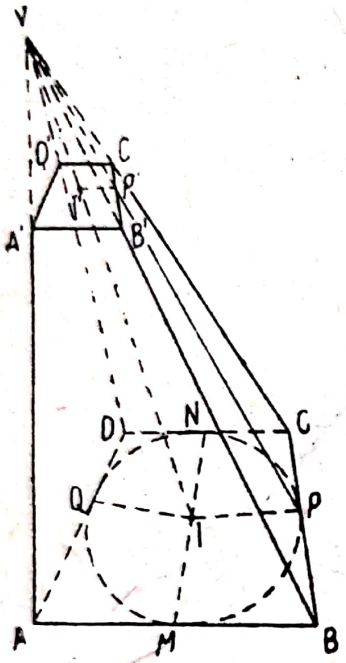


Fig. 179

Avem $\overline{CP} = \overline{CN} = b$ și $\overline{BP} = \overline{BM} = a$, pe baza teoremei că tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sînt egale.

Triunghiul CIB fiind dreptunghic rezultă

$$\overline{IP} = \sqrt{\overline{BP} \cdot \overline{CP}} = \sqrt{ab}$$

și prin urmare

$$\overline{VI} = \sqrt{ab}\ \operatorname{tg}\varphi, \text{ iar } \overline{VP} = \frac{\sqrt{ab}}{\cos\varphi}.$$

Din cauză că baza mică $A'B'C'D'$ se află în raportul de asemănare k față de baza mare, rezultă

$\overline{A'B'} = 2ak$; $\overline{C'D'} = 2bk$, iar segmentele omoloage cu $\overline{VI}$ și $\overline{VP}$, adică $\overline{VI'}$ și $\overline{VP'}$ sînt egale respectiv cu

$$\overline{VI'} = k\sqrt{ab}\ \operatorname{tg}\varphi; \quad \overline{VP'} = \frac{k\sqrt{ab}}{\cos\varphi}.$$

Rezultă că înălțimea trunchiului este dată de expresia

$$\overline{I'I} = \overline{VI} - \overline{VI'} = (1-k)\sqrt{ab}\ \operatorname{tg}\varphi,$$

iar înălțimea fețelor laterale este

$$\overline{PP'} = \overline{VP} - \overline{VP'} = \frac{(1-k)\sqrt{ab}}{\cos\varphi},$$

Ariile bazelor sînt, respectiv, date de expresiile

$$\text{aria } ABCD = \frac{2(a+b)\cdot 2\sqrt{ab}}{2} = 2(a+b)\sqrt{ab},$$

$$\text{aria } A'B'C'D' = 2k^2(a+b)\sqrt{ab}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cunoscînd elementele de mai sus, deducem aria laterală a trunchiului $A_l = \frac{2(a+b)(1-k^2)\sqrt{ab}}{\cos\varphi}$ și volumul

$$V = \frac{2ab(a+b)(1-k^2)}{3}\operatorname{tg}\varphi.$$

556. Dintr-o bilă sferică de rază R se confecționează prin strunjire un con circular drept care are deschiderea de la vîrf egală cu $2x$ (unghiul maxim format de două generatoare). Se cere:

a) Să se exprime aria laterală, totală și volumul conului în funcție de R și x;

b) pentru ce valoare a unghiului x, volumul conului reprezintă $\frac{9}{32}$ din volumul sferei.

Examenul de maturitate, 1961.

R. a) Generatoarea $\overline{AB} = \overline{AC}$ a conului este egală cu $2R\cos x$, iar raza conului $r = \overline{IC}$ (fig. 180) este egală cu $r = \overline{IC} = \overline{AC} \times \sin x = 2R\cos x \sin x = R\sin 2x$.

Rezultă

aria laterală $= \pi r \cdot \overline{AC} = 4\pi R^2 \sin x \cos^2 x$,

aria totală $= 4\pi R^2 \cos^2 x(\sin^2 x + \sin x)$.

Volumul V al conului este

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot \overline{AI}}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot \overline{AC}\cos x}{3} = \frac{8\pi R^3 \cos^4 x \sin^2 x}{3}.$$

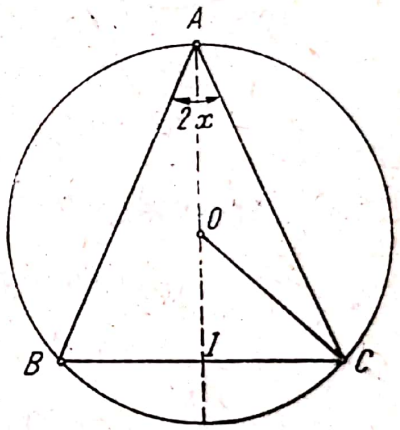


Fig. 180

b) Pentru ca volumul conului să fie $\frac{9}{23}$ din volumul sferei, trebuie să avem

$$\frac{8\pi \cdot R^3 \cos^4 x \sin^2 x}{3} = \frac{9}{32} \cdot \frac{4\pi \cdot R^3}{3} \text{ sau } 64\cos^4 x \sin^2 x = 9.$$

Deoarece căutăm soluția x acceptabilă pentru problemă, avem $8\cos^2 x \sin x = 3$ sau $8\sin^3 x - 8\sin x + 3 = 0$.

Punînd $\sin x = \frac{z}{2}$, avem de rezolvat ecuația

$$z^3 - 4z + 3 = 0$$

care are singura rădăcină acceptabilă $z = 1$. La această valoare a lui z corespunde ecuația $\sin x = \frac{1}{2}$ care are soluția $x = 30°$.

557. O bucată de lemn are forma unui sector sferic de rază R și unghiul maxim dintre două raze α. Din acest sector sferic se strunjește sfera înscrisă. Să se afle:

a) volumul sectorului sferic în funcție de α și R; b) aria sferei înscrisă în sectorul sferic; c) unghiul α pentru care această arie este egală cu $\frac{4\pi R^2}{9}$.

Examenul de maturitate, iulie, 1959.

R. a) Să considerăm o secțiune plană OAB dusă prin centrul sferei înscrise și a sferei din care face parte sectorul sferic (fig. 181). Secțiunea în sfera înscrisă este cercul TMT' tangent în T și T' la razele sectorului de cerc OAB și în M la arcul de cerc AMB.

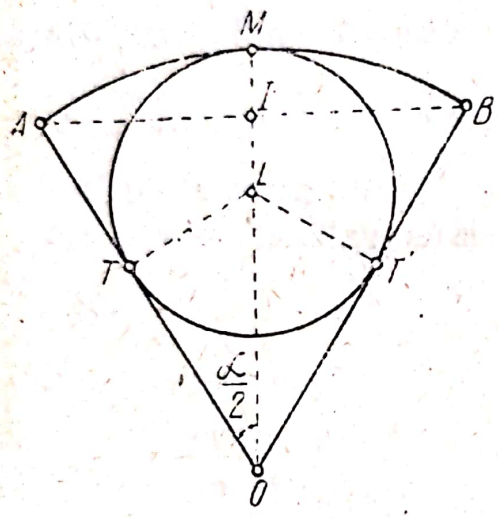


Fig. 181

Să calculăm săgeata $\overline{IM}$ a arcului AB. Avem

$$\overline{IM} = \overline{OM} - \overline{OI} = R - R\cos\frac{\alpha}{2} = 2R\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

Rezultă volumul sectorului

$$V = \frac{(\text{aria calotei } AMB)\cdot R}{3} = \frac{2\pi R\cdot \overline{IM}\cdot R}{3},$$

sau

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

b) Pentru a calcula aria sferei înscrise cu centrul în L, calculăm raza ei $\overline{LT} = \overline{LM}$ pe care o notăm cu x.

Avem $\overline{TL} = \overline{LO}\sin\frac{\alpha}{2}$ sau

$$x = (R - x)\sin\frac{\alpha}{2},$$

de unde rezultă

$$x = \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aria sferei este, deci, egală cu

$$S = \frac{\pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2\left(45° + \frac{\alpha}{4}\right)\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)}.$$

c) Trebuie să avem

$$\frac{4\pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\left(1+\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{4\pi R^2}{9},$$

de unde rezultă $9 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 0,$

sau

$$\left(4 \sin \frac{\alpha}{2} + 1\right)\left(2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1\right) = 0,$$

care are singura soluție acceptabilă în cazul problemei propuse

$$\alpha = 60°.$$

558. O piramidă cu vîrful S și baza un dreptunghi $ABCD$ are muchiile egale cu m, muchia sa formînd cu latura AB un unghi α și cu latura AD un unghi β. Se cere:

a) să se afle aria laterală și volumul piramidei;

b) să se determine unghiurile α și β, știind că $\alpha - \beta = 45°$, iar aria laterală a piramidei este egală cu $\frac{m^2\sqrt{6}}{2}$.

Examenul de maturitate, București, 1957.

R. a) Unghiurile ASB și ASD sînt respectiv egale cu $180°-2\alpha$ și $180°-2\beta$; de aceea, aria laterală este egală cu

$$A_l = 2 \cdot \frac{m^2 \sin(180° - 2\alpha)}{2} + 2 \cdot \frac{m^2 \sin(180° - 2\beta)}{2} = m^2 (\sin 2\alpha + \sin 2\beta).$$

Pentru a calcula volumul avem nevoie de înălțimea $\overline{SO}$ (fig. 182) a piramidei.

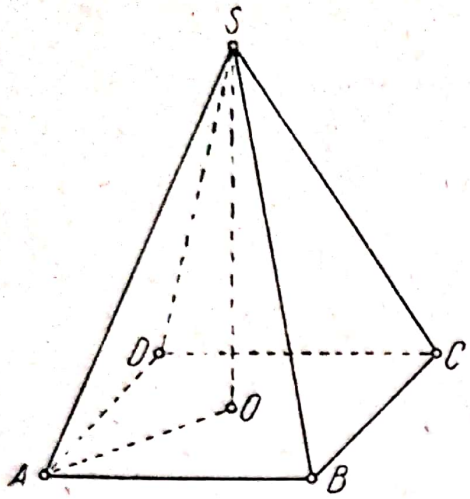


Fig. 182

Ținînd seama că $\overline{SO} = \sqrt{\overline{SA}^2 - \overline{AO}^2}$ și că $\overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, rezultă că volumul piramidei este egal cu

$$V = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{SO}}{3} =$$

$$= \frac{2m\cos\alpha \cdot 2m\cos\beta \cdot m\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}}{3}$$

sau

$$V = \frac{4}{3} m^3 \cos\alpha \cos\beta \cdot \sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(180°+\alpha-\beta)}.$$

b) Avem de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 45°, \\ m^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = \frac{m^2\sqrt{6}}{2}, \end{cases}$$

sau

$$\alpha - \beta = 45°;\ 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Din ecuația a doua, unde se ține seama că $\alpha - \beta = 45°$, rezultă

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

și prin urmare $\alpha + \beta = 60°$ sau $\alpha + \beta = 120°$.

Putem avea deci răspunsurile date de unul din sistemele

I $\begin{cases} \alpha - \beta = 45° \\ \alpha + \beta = 60° \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} \alpha = 52°30' \\ \beta = 7°30' \end{cases}$

II $\begin{cases} \alpha - \beta = 45° \\ \alpha + \beta = 120° \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} \alpha = 82°30' \\ \beta = 37°30'. \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

559. Fie P un punct exterior unui cerc de centru O și rază r. Notăm $OP = x$. Dreapta OP taie cercul în A și B (B fiind cuprins între O și P). Tangentele din P la cerc ating cercul în C și C'.

a) Să se afle aria suprafeței născută prin rotirea în jurul lui AB a conturului compus din arcul de cerc CAC' și segmentele de dreaptă $C'P$ și PC, precum și volumul interior acestei suprafețe.

b) Să se determine x în cazul cînd raportul dintre volumul determinat mai sus și volumul sferei de rază r este m și să se discute soluțiile ecuației în x, cînd m este variabil.

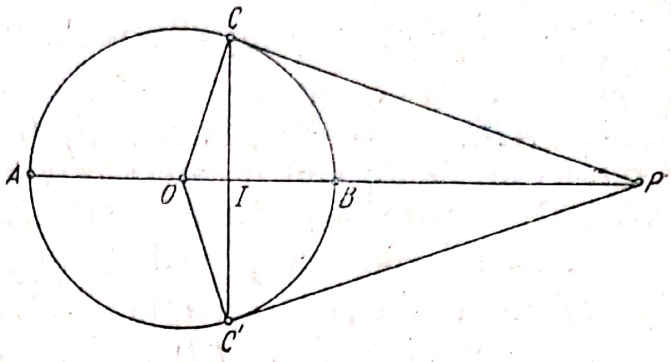


Fig. 183

Examenul de maturitate, Iași, 1957.

R. a) Aria cerută este formată din aria zonei descrisă de arcul CAC' (fig. 183) și din aria laterală a conului descrisă de tangenta PC. Dacă notăm cu I intersecția coardei CC' cu OP, atunci aria A a corpului este dată de expresia

$$A = 2\pi r\,(r + \overline{OI}) + \pi \cdot \overline{IC} \cdot \overline{CP} =$$

$$= 2\pi r\left(r + \frac{r^2}{x}\right) + \pi\sqrt{x^2 - r^2} \cdot \frac{r\sqrt{x^2 - r^2}}{x}$$

sau după efectuarea calculelor obținem

$$A = \frac{\pi r}{x}(x + r)^2.$$

Volumul V cerut este dat de expresia V = volumul sectorului sferic CAC' + volumul conului COC' + volumul conului CPC', de unde rezultă

$$V = \frac{2\pi r^2\left(1 + \frac{r}{x}\right)r}{3} + \frac{\pi \cdot xr^2\,(x^2 - r^2)}{3x^2} \text{ sau } V = \frac{\pi r^2\,(x + r)^2}{3x}.$$

b) Trebuie să avem $\frac{\pi r^2\,(x + r)^2}{3x} : \frac{4\pi r^3}{3} = m$,

sau $x^2 - 2r(2m - 1)\,x + r^2 = 0$. Rezultă

$$x = r[2m - 1 \pm 2\sqrt{m(m - 1)}].$$

Din rezultatul obținut constatăm următoarele

— dacă $0 < m < 1$, problema este imposibilă;

— dacă $m > 1$, problema admite două soluții reale diferite.

Pentru $m < 0$ sau $m = 1$ problema nu are sens.

560. 1. O piramidă cu vîrful S are ca bază triunghiul dreptunghic ABC ($A = 90°$), iar înălțimea ei cade în punctul A. Ipotenuza este de 25 cm, o catetă este cu 5 cm mai mare decît cealaltă, iar înălțimea piramidei este egală cu suma catetelor.

a) Să se calculeze laturile triunghiului ABC.

b) Să se afle aria laterală, aria totală și volumul piramidei.

c) Unghiul muchiei $\overline{SB}$ cu planul bazei îl notăm cu α, iar unghiul muchiei CS cu același plan îl notăm cu β. Să se demonstreze relația

$$\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta = 1.$$

2. a) Să se simplifice fracția

$$F = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{-x^2 + x + 6}.$$

b) Pentru ce valoare a variabilei x fracția simplificată este pozitivă.

3. Să se rezolve ecuația $3(1 - \sin x) = 2\cos^2 x$.

Examenul de maturitate, 1958.

R. 1) a) Dacă notăm $\overline{AB} = x$, avem

$$x^2 + (x + 5)^2 = 25^2,$$

de unde rezultă $\overline{AB} = 15$; $\overline{AC} = 20$ și $\overline{SA} = 35$.

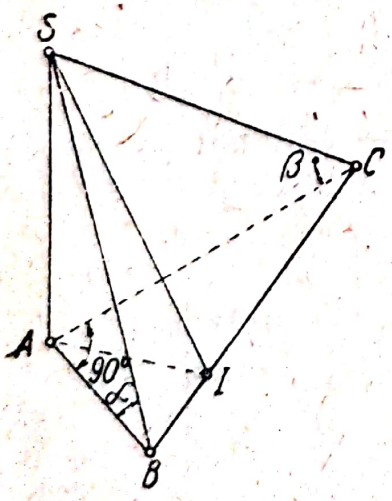


Fig. 184

b) Înălțimea $\overline{SI}$ a triunghiului SBC (fig. 184) se obține din relația

$$\overline{SI}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{AI}^2 = 35^2 + \left(\frac{15 \cdot 20}{25}\right)^2$$

și prin urmare $\overline{SI} = 37$.

Rezultă aria laterală A_l și cea totală A_t respectiv egale cu

$$A_l = \frac{15 \cdot 35}{2} + \frac{20 \cdot 35}{2} + \frac{25 \cdot 37}{2} = 1\,075 \text{ cm}^2;$$

și

$$A_t = 1\,075 + \frac{15 \cdot 20}{2} = 1\,225 \text{ cm}^2.$$

Volumul piramidei este dat de expresia

$$V = \frac{150 \cdot 35}{3} = 1\,750 \text{ cm}^3.$$

c) Din triunghiurile dreptunghice SAB și SAC avem respectiv

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} ; \operatorname{ctg} \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AS}}$$

și prin urmare $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\overline{AS}} = \frac{15 + 20}{35} = 1$,

ceea ce trebuia dovedit.

2. Avem succesiv

$$F = \frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{-(x+2)(x-3)} = \frac{(x-1)(x-2)}{-(x+2)}.$$

b) Trebuie să rezolvăm inegalitatea

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x+2} < 0.$$

Se găsește $x < -2$, sau $1 < x < 2$.

3. Ecuația dată se mai poate scrie

$$3(1 - \sin x) = 2(1 - \sin x)(1 + \sin x),$$

care se desface în ecuațiile

I) $1 - \sin x = 0$, cu soluția generală $x' = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$,

II) $3 = 2 + 2\sin x$, cu soluțiile generale $x'' = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ și $x''' = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}$, unde k este un întreg oarecare.

561. Într-un trapez isoscel $ABCD$ se dă baza mare $AB = 2a$, baza mică $CD = 2b$ și înălțimea h. Fie M și N respectiv mijloacele bazelor AB și CD, iar I punctul de intersecție al diagonalelor.

a) Să se arate că raportul λ între volumul solidului născut de acest trapez și suma volumelor conurilor născute de triunghiurile AMI și INC prin rotirea în jurul dreptei MN nu depinde de h.

b) Să se afle raportul $x = \frac{a}{b}$ în funcție de λ și să se discute valorile lui x cînd λ este variabil.

Examenul de maturitate, Iași, 1957.

R. a) Prin rotirea în jurul lui MN, trapezul generează un trunchi de con al cărui volum este

$$V_1 = \frac{\pi h}{3}(a^2 + ab + b^2),$$

iar cele două triunghiuri AMI și INC generează două conuri de volume V_2 și V_3 a căror sumă a volumelor este dată de expresia

$$V_2 + V_3 = \frac{\pi a^2 \cdot \overline{IM}}{3} + \frac{\pi b^2 \cdot \overline{IN}}{3} = \frac{\pi}{3}(a^2 \cdot \overline{IM} + b^2 \cdot \overline{IN}). \qquad (1)$$

Din asemănarea triunghiurilor AIB și DIC (fig. 185) rezultă

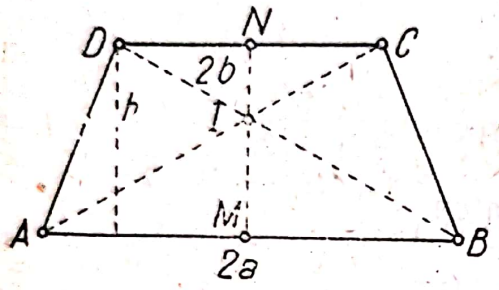


Fig. 185

$$\frac{\overline{IM}}{a} = \frac{\overline{IN}}{b} = \frac{\overline{IM} + \overline{IN}}{a+b} = \frac{h}{a+b}$$

și prin urmare $\overline{IM} = \frac{ah}{a+b}$, iar $\overline{IN} = \frac{bh}{a+b}$.

Înlocuind în (1), obținem

$$V_2 + V_3 = \frac{\pi}{3}\left[\frac{a^3h}{a+b} + \frac{b^3h}{a+b}\right] = \frac{\pi h}{3}(a^2 - ab + b^2).$$

Raportul cerut este

$$\lambda = \frac{V_1}{V_2 + V_3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}, \qquad (2)$$

care nu depinde de h.

b) Relația (2) se mai poate scrie

$$\frac{\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1}{\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} + 1} = \lambda, \text{ sau } \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \lambda,$$

de unde rezultă $(1 - \lambda)x^2 + (1 + \lambda)x + (1 - \lambda) = 0$, care ne dă $x = \frac{a}{b}$, în funcție de λ.

Discriminantul ecuației de gradul al doilea în x este

$$\Delta = (1 + \lambda)^2 - 4(1 - \lambda)^2 = (3\lambda - 1)(3 - \lambda),$$

de unde deducem că x este real numai dacă avem

$$\frac{1}{3} \leqslant \lambda \leqslant 3.$$

Scanned with OKEN Scanner

562. 1. Se dă un cerc cu centrul O și raza R și un punct exterior P, în planul cercului. Fie A, B punctele de contact ale tangentelor duse din P la cerc și α unghiul AOP. Se rotește figura în jurul lui OP și se cere:

a) volumul corpului alcătuit din conul PAB și segmentul sferic exterior conului;

b) să se determine unghiul α, astfel încît aria laterală a conului PAB să fie egală cu aria calotei sferice exterioare conului.

2. Se dă ecuația $(m+2)\,x^2 - 2mx + 1 = 0$;

a) să se determine m astfel, încît suma pătratelor rădăcinelor să fie egală cu 2.

b) să se discute natura și semnele rădăcinilor ecuației date, cînd parametrul m ia toate valorile numerice de la $-\infty$ la $+\infty$.

3. a) Să se rezolve ecuația $2\sin^2 x = \sin 2x$.

b) Să se arate că egalitatea $2\sin(x+a)\sin(x-a) = \cos 2a$ este adevărată cînd x se înlocuiește cu soluția ecuației de la punctul (a), cuprinsă între $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Examenul de maturitate, 1958.

R. 1. a) Dacă notăm cu I punctul de intersecție dintre coarda contactelor și dreapta OP (fig. 186), atunci expresia V a volumului cerut este dată de

$$V = \frac{\pi \cdot \overline{AI}^2 \cdot \overline{IP}}{3} + \frac{2\pi R \cdot \overline{IP'} \cdot R}{3} + \frac{\pi \cdot \overline{AI}^2 \cdot \overline{IO}}{3}$$

sau

$$V = \frac{\pi \cdot \overline{AI}^2 \cdot \overline{OP}}{3} + \frac{2\pi R^2 \cdot \overline{IP'}}{3}.$$

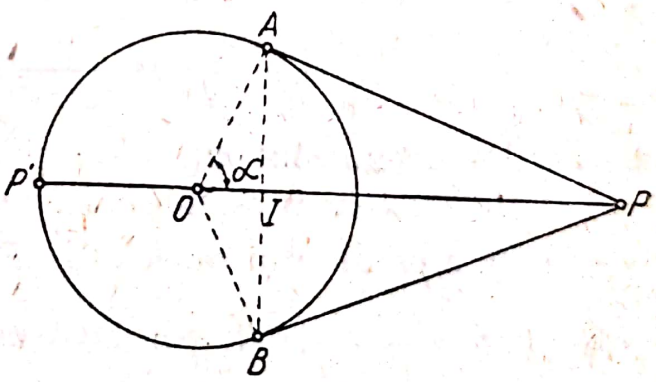


Fig. 186

Ținînd seama că P' este intersecția diametrului OP cu cercul situat pe arcul mai mare, avem $\overline{IP'} = R(1+\cos\alpha)$. Înlocuind în (1) această expresie a lui $\overline{IP'}$ împreună cu $\overline{AI} = R\sin\alpha$ și $\overline{OP} = \frac{R}{\cos\alpha}$, obținem

$$V = \frac{\pi R^3}{3}\left[\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + 2(1+\cos\alpha)\right].$$

După unele transformări ale expresiei din paranteză, deducem

$$V = \frac{4\pi R^3 \cos^4 \frac{\alpha}{2}}{3 \cos \alpha}.$$

b) Pentru a determina α, trebuie să avem

$$\pi \cdot \overline{AI} \cdot \overline{AP} = 2\pi R \cdot \overline{P'I},$$

sau

$$R \sin \alpha \cdot R \operatorname{tg} \alpha = 2R \cdot R(1 + \cos \alpha).$$

Această ultimă relație ne conduce la rezolvarea ecuației

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - 2(1 + \cos \alpha) = 0,$$

de unde deducem $\cos \alpha = -1$, sau $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Soluția care are sens în problema noastră este

$$\alpha = \arccos \frac{1}{3},$$

care dă $\alpha \approx 70°31'40''$.

2. a) Condiția impusă ne conduce la rezolvarea ecuației

$$\frac{4m^2}{(m+2)^2} - \frac{2}{m+2} - 2 = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt $m_1 = -1$ și $m_2 = 6$.

b) Introducem într-o tabelă semnul discriminantului $\Delta = m^2 - m - 2$, a produsului rădăcinilor $P = \frac{1}{m+2}$ și a sumei aceloraşi rădăcini $S = \frac{2m}{m+2}$. Atunci cînd m variază de la $-\infty$ la $+\infty$, obținem

m	$-\infty$		-2		-1		0		2		$+\infty$	
Δ	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
P	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
S	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Din tabelă rezultă următoarele:

dacă $m < -2$, ecuația admite două rădăcini de semne contrare, dintre care cea pozitivă are valoarea absolută mai mare;

dacă $-2 < m < -1$, ecuația admite două rădăcini negative, iar în cazul cînd $m > 2$, ecuația are două rădăcini pozitive.

Pentru $m = -2$, ecuația admite numai o rădăcină $x = -\frac{1}{4}$.

Pentru $m = -1$, avem $x_1 = x_2 = -1$ și în cazul cînd $m = 2$, avem $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.

3. a) Ecuația are soluțiile generale $x' = n\pi$ și $x'' = n\pi + \frac{\pi}{4}$.

Soluția vizată este $x = \frac{\pi}{4}$. Pentru a arăta că ea verifică egalitatea dată, trebuie demonstrată identitatea

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \cos 2a.$$

Ținînd seama că $\sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$, avem

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right) = \cos 2a.$$

ceea ce confirmă justețea enunțului de la pct. b).

563. Într-o sferă de rază r se înscrie un con a cărui generatoare face cu planul bazei un unghi u dat de ecuația

$$\frac{\cos u}{1 + \sin u} = 2 - \operatorname{tg} u.$$

1. Să se determine la ce distanță de baza conului trebuie să se ducă un plan paralel bazei conului, astfel ca diferența ariilor secțiunilor determinate în sferă și con să fie egală cu aria bazei conului.

2. Să se afle în funcție de r volumul tetraedrului regulat circumscris sferei.

Examenul de maturitate, București, 1957.

R. Ecuația dată se scrie succesiv

$$\frac{\cos u}{1 + \sin u} + \frac{\sin u}{\cos u} = 2, \quad \text{sau} \quad \frac{\cos^2 u + \sin u + \sin^2 u}{\cos u\,(1 + \sin u)} = 2,$$

de unde rezultă $\cos u = \frac{1}{2}$ și prin urmare $u = 60°$.

Scanned with OKEN Scanner

1. Considerăm o secțiune plană dusă prin axa de rotație a conului înscris în sferă (fig. 187). Triunghiul de secțiune ABC este echilateral, dat fiind că $u = 60°$. Secțiunea la distanța x de baza conului determină în sferă cercul cu diametrul LM și în con, cercul de diametru PN. Efectuînd calculele, obținem

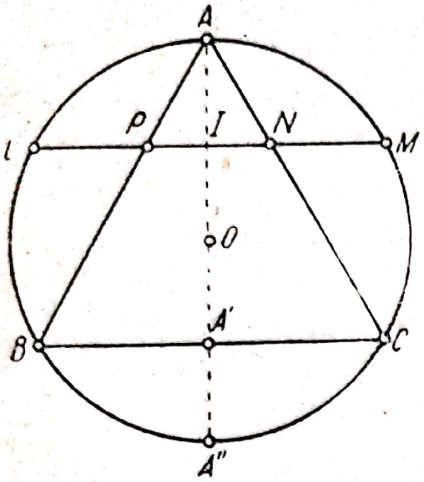


Fig. 187

$$\overline{LM} = \sqrt{(3r - 2x)(r + 2x)} \text{ și } \overline{PN} = \frac{3r - 2x}{\sqrt{3}}.$$

Condiția pusă la pct. 1, ne conduce la ecuația

$$(3r - 2x)(r + 2x) - \frac{1}{3}(3r - 2x)^2 = 3r^2,$$

care are rădăcina dublă $x = \frac{3r}{4}$.

2. Sfera de rază r fiind înscrisă în tetraedru rezultă că, centrul ei este situat în centrul tetraedrului. Deducem astfel că înălțimea tetraedrului este egală cu $4r$ și apoi se găsește lungimea muchiei egală cu $2r\sqrt{6}$.

Rezultă că volumul tetraedrului este egal cu

$$V = 8r^3\sqrt{3}.$$

564. Să se studieze variația funcției $y = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x + 2}$.

a) Să se reprezinte grafic.

b) Să se scrie ecuația parabolei cu vîrful în origină și avînd ca axă pe Ox, al cărei parametru este egal cu triplul rădăcinii celei mai mari a numitorului.

c) Să se scrie ecuațiile tangentelor la parabola de la pct. b, în punctul de abscisă $x = 4$.

d) Fie M un punct mobil pe parabolă, A proiecția lui M pe axa Oy și B proiecția lui A pe coarda $\overline{OM}$. Să se afle locul geometric descris de punctul B cînd M variază.

Examenul de maturitate, septembrie, 1959.

R. a) Calculăm derivata $y' = \frac{-2(x^2 - 8x + 10)}{(x - 1)^2 (x - 2)^2}$. Rădăcinile derivatei sînt $4 \pm \sqrt{6}$, iar ale funcției sînt -2 și 3.

Pentru $x = 1$ și $x = 2$, funcția nu are sens.
Funcția dată are următoarea schemă a variației

x	$-\infty$	-2	0	1	$4-\sqrt{6}$	2	3	$4+\sqrt{6}$	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	$-\quad 0\quad +$		$+$	$+\quad 0\quad -$	$-$
y	$1\searrow$	$0\searrow$	$\searrow -3\searrow$	$-\infty$	$+\infty\searrow 11+4\sqrt{6}\nearrow$	$+\infty$	$-\infty\nearrow 0\nearrow$	$11-4\sqrt{6}\searrow$	1

Din tablou rezultă că dreptele $x = 1$; $x = 2$; $y = 1$ sînt asimptote.

Acestei scheme îi corespunde reprezentarea grafică din fig.188.

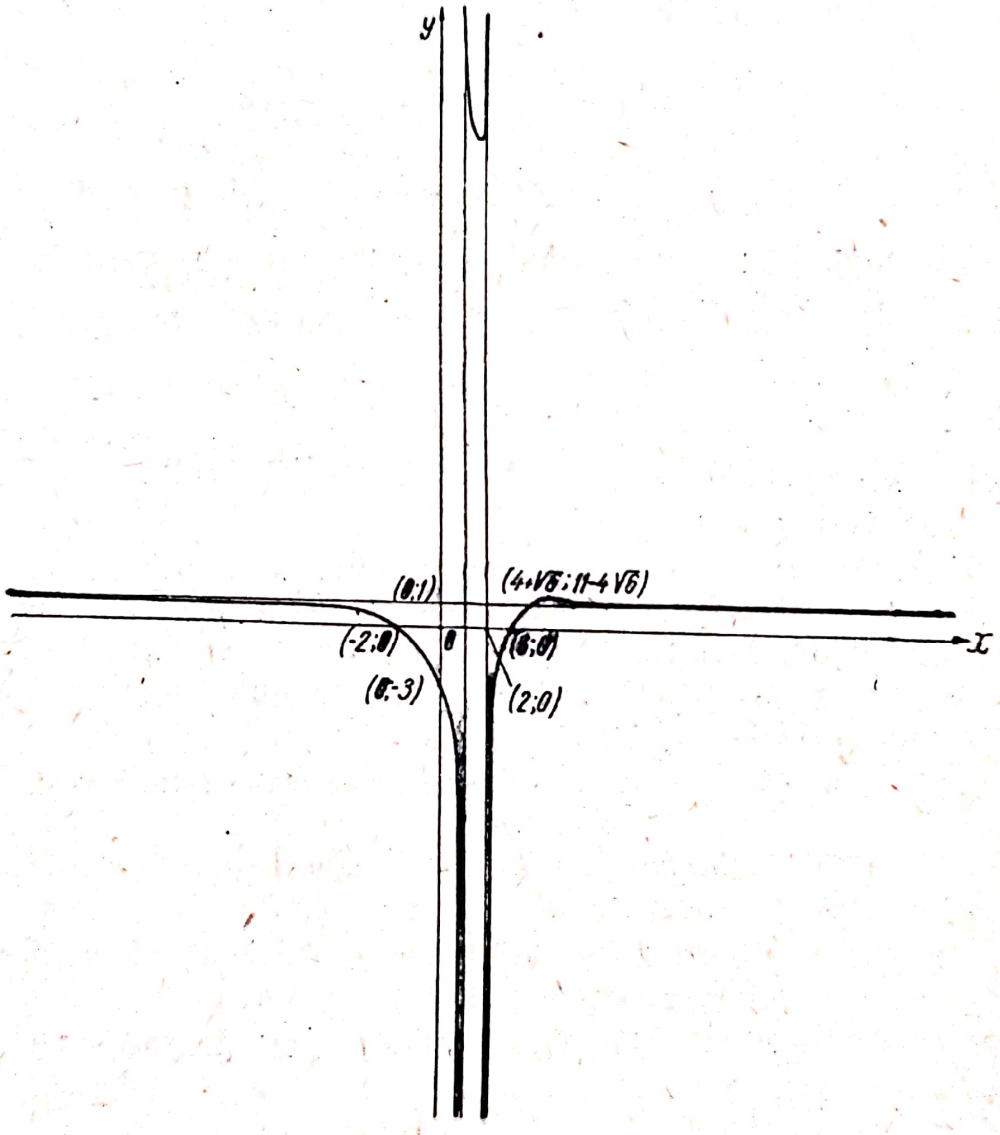


Fig. 188

b) Conform datelor avem $p = 6$, de unde rezultă ecuația parabolei

$$y^2 = 12\,x.$$

c) În punctele de abscisă $x = 4$, avem $y^2 = 12 \cdot 4 = 48$ și prin urmare $y = \pm 4\sqrt{3}$. Ecuațiile tangentelor în punctele $(4, -4\sqrt{3})$ și $(4, 4\sqrt{3})$ sînt respectiv

$$3x + 2y\sqrt{3} + 12 = 0 \text{ și } 3x - 2y\sqrt{3} + 12 = 0.$$

d) Un punct oarecare al parabolei are coordonatele $M(3\lambda^2, 6\lambda)$, iar $A(0, 6\lambda)$.

Locul căutat se obține eliminînd λ între ecuațiile dreptelor

$$(OM) \quad y = \frac{2}{\lambda} x$$

și

$$(AB) \quad y - 6\lambda = -\frac{\lambda}{2} x.$$

Scoatem λ din prima ecuație, $\lambda = \frac{2x}{y}$ și-l introducem în ecuația a doua, după care aflăm ecuația locului geometric

$$x^2 + y^2 - 12x = 0,$$

care este un cerc cu centrul $(6, 0)$ și raza 6.

565. Se dă ecuația $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.

1°. Să se rezolve ecuația.

2°. Rădăcinile sale, în ordine crescătoare, fiind a, b, c, d, să se scrie ecuația elipsei cu semiaxele pe Ox și pe Oy egale, respectiv, cu c și b, ecuația dreptei (D) care trece prin punctele $A\ (a, 0)$ și $B\ (0, d)$, precum și ecuația tangentelor la elipsă, paralele cu dreapta (D).

Examenul de maturitate, august, 1962.

R. 1°. Prin încercări, cu ajutorul schemei de calcul a lui Horner, se găsesc rădăcinile $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$.

2°. Ecuația elipsei este $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ și a dreptei (D), $4x + y - 4 = 0$, care are panta $m = -4$.

Ecuația tangentelor la elipsă, paralele cu dreapta (D), este $y = -4x \pm 2\sqrt{37}$.

566. Se dau două axe rectangulare Ox și Oy și două cercuri, unul de rază a tangent în O la Ox și al doilea de rază b tangent în O la Oy, precum și dreapta Δ care se rotește în jurul punctului O. Dreapta Δ întîlnește cele două cercuri respectiv în A și B, care se proiectează pe axa Ox în punctele A' și B'.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se studieze variația segmentului $\overline{A'B'}$.

b) Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $\overline{AB}$.

c) Se duce o tangentă într-un punct variabil P al cercului tangent la axa Oy; fie N punctul de intersecție al acestei tangente cu axa Oy. Să se afle locul geometric al punctului de intersecție a dreptei OP cu paralela dusă prin N la axa Ox.

Examenul de maturitate, iulie, 1959.

R. a) Ecuațiile celor două cercuri sînt

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

(cercul tangent la Ox),

$$x^2 + y^2 - 2bx = 0$$

(cercul tangent la Oy).

Ecuația unei drepte variabile Δ (fig. 189) este

$$y = \lambda x,$$

unde λ este un parametru.

Intersecția A are coordonatele

$$A\left[\frac{2a\lambda}{1+\lambda^2}, \frac{2a\lambda^2}{1+\lambda^2}\right]$$

iar B are coordonatele

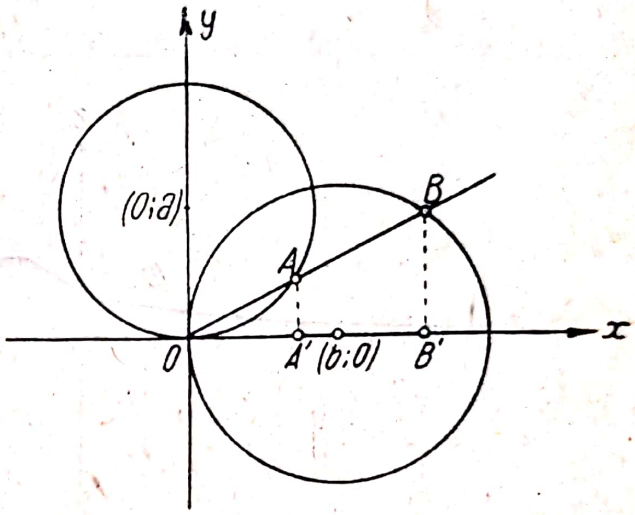


Fig. 189

$$B\left[\frac{2b}{1+\lambda^2}, \frac{2b\lambda}{1+\lambda^2}\right].$$

Rezultă

$$A'\left[\frac{2a\lambda}{1+\lambda^2}, 0\right]; \quad B'\left[\frac{2b}{1+\lambda^2}, 0\right]$$

și prin urmare

$$\overline{A'B'} = \frac{2b - 2a\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Dacă notăm $\overline{A'B'} = z$; $\lambda = t$ și presupunem $a > 0$, $b > 0$, avem de studiat variația funcției

$$z = \frac{2b - 2at}{1+t^2}.$$

Folosim în acest scop derivata $z' = \frac{2(at^2 - 2bt - a)}{(1+t^2)^2}$ care se anulează pentru $t = \frac{b \pm \sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

Introducem valorile de mai sus împreună cu valoarea pentru care $z = 0$ și semnul derivatei, într-o tabelă. Se obține astfel schema variației lui z, adică a segmentului $A'B'$.

t	$-\infty$		$\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{b^2+a^2}}{a}$		0		$\frac{b}{a}$		$\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{b^2+a^2}}{a}$		$+\infty$
z'	$+$	$++$	0	$-$	$-$		$-$	0	$+$	$++$	
z	0	$\nearrow$	$b + \sqrt{b^2+a^2}$	$\searrow$	$2b$	$\searrow$	0	$\searrow$	$b - \sqrt{b^2+a^2}$	$\nearrow$	0

La această schemă a variației corespunde curba din fig. 190.

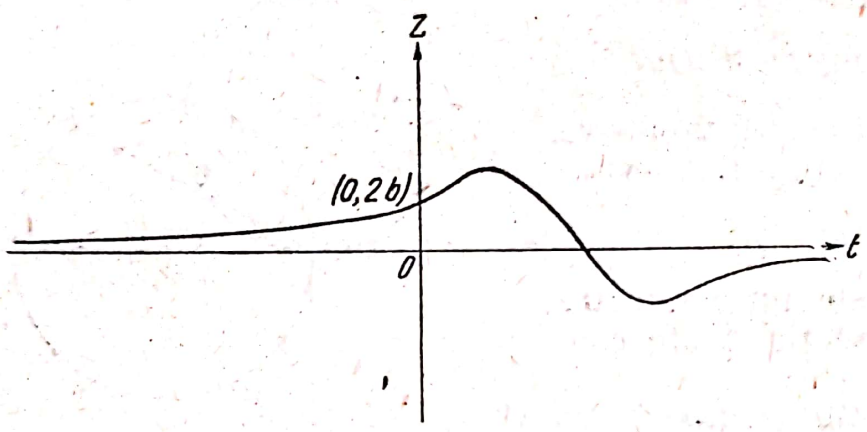


Fig. 190

c) Punctul P (fig. 191) de pe cercul cu centrul (b,O) are coordonatele $\left(\frac{2b}{1+\lambda^2}, \frac{2b\lambda}{1+\lambda^2}\right)$ și prin urmare ecuația tangentei în P este $(1-\lambda^2)x + 2\lambda y - 2b = 0$.

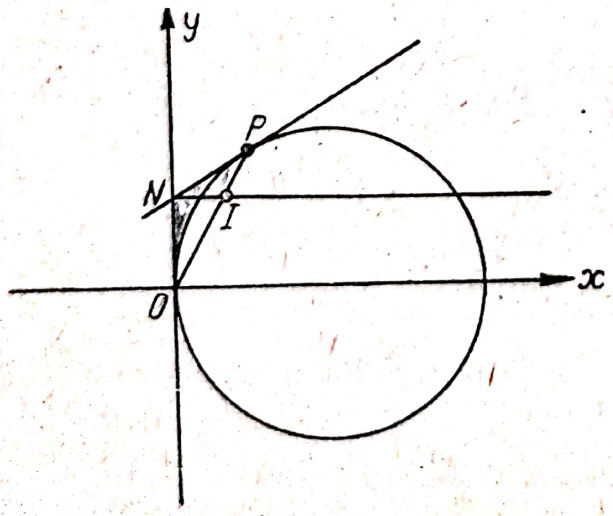


Fig. 191

Această tangentă taie pe Oy în punctul $N\left[O, \frac{b}{\lambda}\right]$.

Locul căutat se obține eliminînd parametrul λ între ecuația paralelei prin N, $y = \frac{b}{\lambda}$ și a dreptei $(OP)\, y = \lambda x$.

Se obține curba de ecuație $y^2 = bx$, care este o parabolă.

B. Exerciții și probleme rezolvate propuse la examenele din institute și facultăți

567. Se dă un triunghi dreptunghic ABC. Știind că unul din unghiurile ascuțite este de 30° și perimetrul 120 m, să se afle laturile triunghiului și razele cercurilor înscris și circumscris acestui triunghi.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1949.

R. Deoarece $\hat{C} = 30°$ (fig. 192) rezultă, după cum se știe din geometrie, că $\overline{BC} = a = 2c$, iar $b = \sqrt{a^2 - c^2} = c\sqrt{3}$.

Scriind $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 120$ m, avem $c + c\sqrt{3} + 2c = 120$; prin urmare

$$c = \frac{120}{3 + \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{120\,(3 - \sqrt{3})}{6} = 20\,(3 - \sqrt{3}),$$

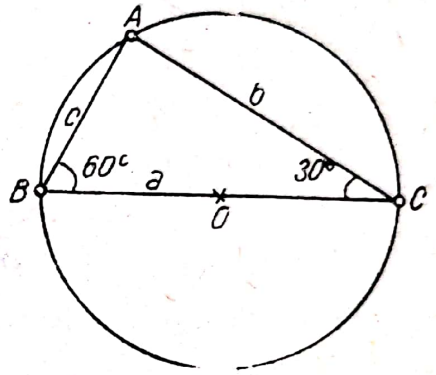


Fig. 192

deci

$$\overline{BC} = 2c = 40\,(3 - \sqrt{3})$$

și

$$\overline{AC} = b = 20\,(3 - \sqrt{3})\,\sqrt{3} = 60\,(\sqrt{3} - 1).$$

Raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic fiind egală cu jumătatea ipotenuzei, avem

$$R = 20\,(3 - \sqrt{3}) = 20\,\sqrt{3}\,(\sqrt{3} - 1).$$

Raza cercului înscris fiind egală cu raportul dintre aria triunghiului și semiperimetrul lui, obținem

$$r = \frac{S}{60} = \frac{\frac{bc}{2}}{60} = \frac{bc}{120} = \frac{60\,(\sqrt{3} - 1) \cdot 20\,(3 - \sqrt{3})}{120} = 20\,(2\sqrt{3} - 3).$$

568. O prismă oblică triunghiulară are ca baze două triunghiuri ABC și $A'B'C'$; secțiunea dreaptă din A este un triunghi isoscel AMN, în care $AM = AN = a$ și $MN = a\sqrt{3}$. Se presupune că punctul M se află pe muchia BB'; punctul N pe muchia CC', iar punctele B și C sînt de aceeași parte a planului AMN (fig. 193).

a) Notînd $\overline{MB} = x$, $\overline{NC} = y$, se cere relaţia ce trebuie să existe între x şi y, pentru ca unghiul A al triunghiului ABC să fie drept.

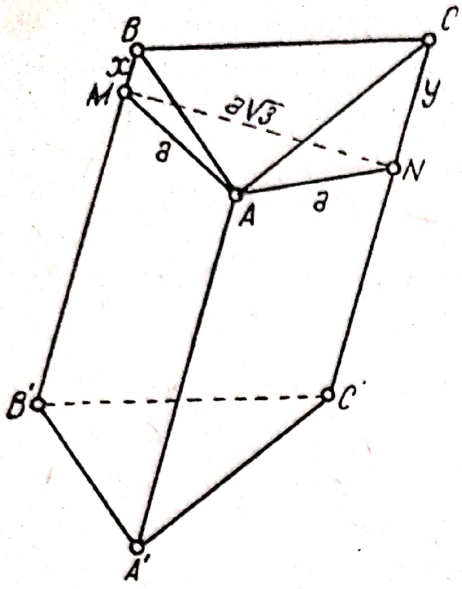


Fig. 193

b) Să se calculeze segmentele x şi y, ştiind că ele mai verifică şi relaţia $2(x + y) = 3a$.

c) Se dă distanţa h dintre planele celor două baze ABC şi $A'B'C'$ ale prismei; să se calculeze volumul prismei în funcţie de a şi h şi apoi lungimea muchiei AA'

d) să se afle unghiurile triunghiului AMN.

Institutul de construcţii, Bucureşti, 1951.

R. a) Pentru ca unghiul A al triunghiului ABC să fie drept este necesar şi suficient să avem

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2. \qquad (1)$$

Din triunghiul dreptunghic AMB obţinem

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = a^2 + x^2,$$

din triunghiul dreptunghic ANC, avem

$$\overline{AC}^2 = a^2 + y^2,$$

iar din trapezul dreptunghic $MNCB$ obţinem

$$\overline{BC}^2 = (y - x)^2 + 3a^2.$$

Relaţia (1) devine deci

$$(y - x)^2 + 3a^2 = a^2 + x^2 + a^2 + y^2,$$

de unde

$$xy = \frac{a^2}{2},$$

b) Avem sistemul

$$xy = \frac{a^2}{2}, \quad x + y = \frac{3a}{2};$$

x şi y sînt deci rădăcinile ecuaţiei

$$2x^2 - 3ax + a^2 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste rădăcini sînt a și $\frac{a}{2}$ și deci avem soluțiile următoare

$$x' = a,\ y' = \frac{a}{2} \text{ și } x'' = \frac{a}{2},\ y'' = a.$$

c) Notînd cu V volumul prismei, avem

$$V = \text{aria } (ABC) \cdot h;$$

însă,

$$\text{aria } (ABC) = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + x^2)(a^2 + y^2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + a^2)\left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right)} = \frac{a^2\sqrt{10}}{4},$$

deci

$$V = \frac{a^2 h\sqrt{10}}{4}.$$

Pe de altă parte, $V = \text{aria } (AMN) \cdot \overline{AA'}$; însă $a\sqrt{3}$ este latura triunghiului echilateral înscris într-un cerc de centru A și de rază a; deci

$$\text{aria } (AMN) = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

și

$$V = \frac{a^2 h\sqrt{10}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \overline{AA'},$$

de unde

$$\overline{AA'} = \frac{h\sqrt{30}}{3}.$$

d) Triunghiul AMN fiind isoscel rămîne să calculăm deci numai valoarea unghiului A.

Dacă luăm A' simetricul lui A față de MN, se constată prin calcul că triunghiul $AA'N$ este echilateral, de unde rezultă $\widehat{MAN} = 120°$ și $\hat{M} = \hat{N} = 30°$.

569. Se dă ecuația

$$x^2 + (m - 3)x + 1 - 2m = 0,$$

în care m este un parametru.

a) Să se arate că această ecuație are rădăcinile x' și x'' reale, oricare ar fi m real.

b) Se consideră, pe o axă Ox, punctele M' și M'' de abscise x' și x''. Pentru ce valori ale lui m cercurile de diametri OM' și OM'' sînt tangente exterioare?

c) Se presupune că razele celor două cercuri tangente exterioare sînt R și $\frac{R}{3}$ și se duce tangenta comună exterioară $A'A''$. Se cere să se calculeze aria mixtilinie $A'OA''$.

d) Se notează $\widehat{A''O''O'} = \alpha$; cunoscînd sin α, să se calculeze tg $\frac{\alpha}{2}$.

Institutul de construcții, București, 1951.

R. a) Rădăcinile $x = \frac{3-m \pm \sqrt{m^2+2m+5}}{2}$ există totdeauna, deoarece realizantul

$$m^2 + 2m + 5 = (m + 1)^2 + 4$$

este pozitiv, oricare ar fi m real.

b) Pentru ca cercurile de diametri $OM' = x'$ și $OM'' = x''$ să fie tangente exterioare (fig. 194) trebuie ca x' și x'' să fie de semne contrare; deci produsul lor să fie negativ, adică

$$x'x'' = 1 - 2m < 0,$$

de unde $m > \frac{1}{2}$.

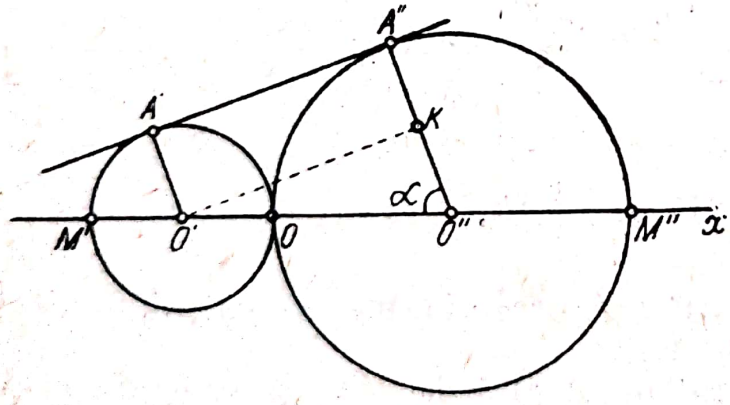


Fig. 194

c) Aria mixtilinie căutată $A'OA''$ este diferența între aria trapezului $A'O'O''A''$ și suma ariilor sectoarelor $A'O'O$ și $A''O''O$. Dacă ducem paralela $O'K$ la $A'A''$, avem

$$\frac{\overline{O''K}}{\overline{O'O''}} = \frac{R - \frac{R}{3}}{R + \frac{R}{3}} = \frac{1}{2};$$

unghiul $\widehat{A''O''O'} = \alpha$ este deci egal cu 60° și, prin urmare, sectorul $A''O''O$ este a șasea parte din cercul O'', iar sectorul $A'O'O$ este a treia parte din cercul O'. Aria trapezului este

$$\frac{1}{2}(\overline{O''A''} + \overline{O'A'}) \cdot \overline{O'K} = \frac{1}{2}\left(R + \frac{R}{3}\right) \cdot \frac{2R\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{9}R^2\sqrt{3}.$$

Ariile celor două sectoare sînt respectiv

$$\frac{1}{6}\pi R^2 \quad \text{și} \quad \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2;$$

expresia ariei mixtilinie $A'OA''$ este deci

$$\frac{4}{9}R^2\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{1}{27}\pi R^2 = \frac{R^2(24\sqrt{3} - 11\pi)}{54}.$$

d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; se cunoaște formula $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$

și deci

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

adică $\sqrt{3}$ și $\frac{1}{\sqrt{3}}$ sînt valori inverse și ambele admisibile.

570. În triunghiul dreptunghic ABC se dau: ipotenuza $BC = 5$ și înălțimea corespunzătoare ipotenuzei; $AH = h$.

a) Să se calculeze catetele b și c și să se arate cum trebuie ales h pentru ca triunghiul să existe.

b) Să se calculeze, în funcție de h, volumul V, generat prin rotația triunghiului în jurul ipotenuzei BC.

c) Să se reprezinte grafic funcția

$$y = \frac{\pi h}{3}(25 + 10h) - 4V,$$

cînd h variază între limitele stabilite. Care sînt valorile lui b și c cînd y este maxim?

d) Notînd cu α și β unghiurile făcute de mediana BM respectiv cu cateta BA și ipotenuza BC și cunoscînd unghiul B, să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$ și $\operatorname{tg}\beta$.

Institutul de construcții, București, 1951.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Avem

$$b^2 + c^2 = 25, \tag{1}$$

apoi

$$S = \frac{bc}{2} = \frac{\overline{BC} \cdot h}{2},$$

de unde

$$bc = 5h \quad \text{şi} \quad b = \frac{5h}{c}. \tag{2}$$

Introducînd în (1), obţinem

$$c^4 - 25c^2 + 25h^2 = 0.$$

Această ecuaţie de gradul al doilea în c^2 ne dă catetele. Ea va avea rădăcini reale şi pozitive, dacă

$$(25)^2 - 100h^2 \geqslant 0,$$

adică

$$h \leqslant 2{,}5.$$

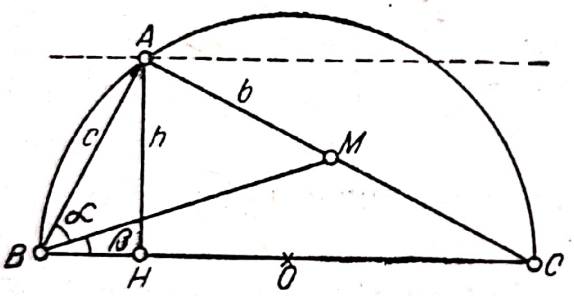


Fig. 195

Geometric, triunghiul ABC se construieşte tăind un semicerc de diametru $BC = 5$ printr-o paralelă la BC, dusă la depărtarea h de aceasta (fig. 195).

Se vede că problema nu este posibilă decît dacă $h \leqslant 2{,}5$.

b) Avem

$$V = \frac{\pi \overline{AH}^2 \cdot \overline{BH}}{3} + \frac{\pi \overline{AH}^2 \cdot \overline{HC}}{3} = \frac{\pi}{3} \overline{AH}^2 \cdot \overline{BC} = \frac{5\pi}{3} h^2.$$

c) Avem

$$y = \frac{\pi h}{3}(25 + 10h) - 20\frac{\pi h^2}{3} = \frac{5\pi h}{3}(5 - 2h)$$

sau

$$y = -\frac{10\pi}{3}\left(h^2 - \frac{5h}{2}\right) = -\frac{10\pi}{3}\left[\left(h - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right];$$

Scanned with OKEN Scanner

h variind între 0 și 2,5, putem întocmi tabelul de variație

h	$0 \nearrow 1{,}25 \nearrow 2{,}5$
y	$0 \nearrow \frac{125\pi}{24} \searrow 0$

și reprezintă curba din (fig. 196).

Pentru $h = 1{,}25$, avem $b^2 + c^2 = 25$, și $bc = \frac{25}{4}$, deci

$$(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = \frac{75}{2},$$

de unde $b + c = \frac{5}{2}\sqrt{6}$;

b și c fiind rădăcinile ecuației

$$X^2 - \frac{5}{2}\sqrt{6}\,X + \frac{25}{4} = 0,$$

se va putea, deci, lua

$$b = \frac{5}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

și $c = \frac{5}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

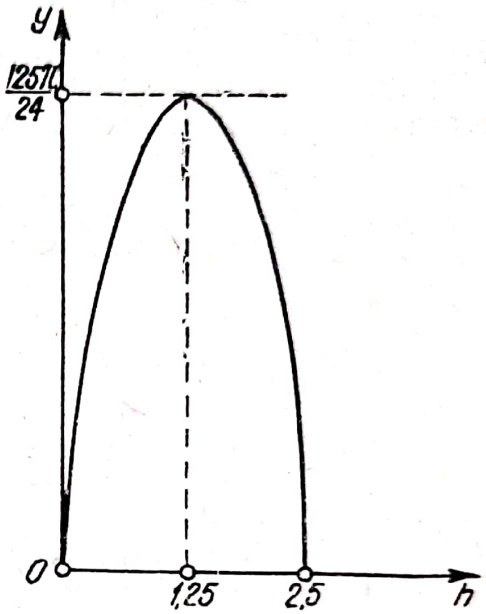


Fig. 196

d) Avem $\overline{AB}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \overline{AM}$, de unde

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,B$$

și

$$\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}\,(B - \alpha) = \frac{\mathrm{tg}\,B}{2 + \mathrm{tg}^2 B}.$$

571. Se consideră un triunghi dreptunghic isoscel ABC cu unghiul drept în A și cele două catete $\overline{AB} = \overline{AC} = a$. Se prelungește cateta AB, de la A spre B, cu lungimile $\overline{BB_1} = \overline{B_1B_2} = a$ și se notează unghiurile $\widehat{AB_1C} = \alpha$ și $\widehat{AB_2C} = \beta$.

a) Să se evalueze tangentele trigonometrice ale unghiurilor α și β și să se arate apoi, cu ajutorul acestor evaluări, că $\alpha + \beta = 45°$.

b) Să se evalueze distanțele $\overline{BM}$ și $\overline{B_1N}$ de la B la CB_1, respectiv de la B_1 la CB_2 și să se arate că pătratul cu latura B_1N are diagonala egală cu BM.

c) Să se arate că pătratul care are ca latură diametrul cercului circumscris triunghiului BB_1C are diagonala egală cu diametrul cercului circumscris triunghiului BB_2C.

d) Se notează cu V_1 volumul corpului geometric obținut prin rotația triunghiului ABC în jurul unei catete, cu V_2 volumul corpului obținut prin rotația aceluiași triunghi în jurul ipotenuzei, cu V_3 volumul corpului obținut prin rotația triunghiului CBB_1 în jurul lui CB_1 și cu V_4 acela al corpului obținut prin rotația triunghiului CB_1B_2 în jurul lui CB_2. Să se arate că V_1, V_2, V_3, V_4 formează patru termeni ai unei proporții.

Institutul de construcții, București, 1951.

R. a) Avem (fig. 197)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB_1}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB_2}} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta} = 1,$$

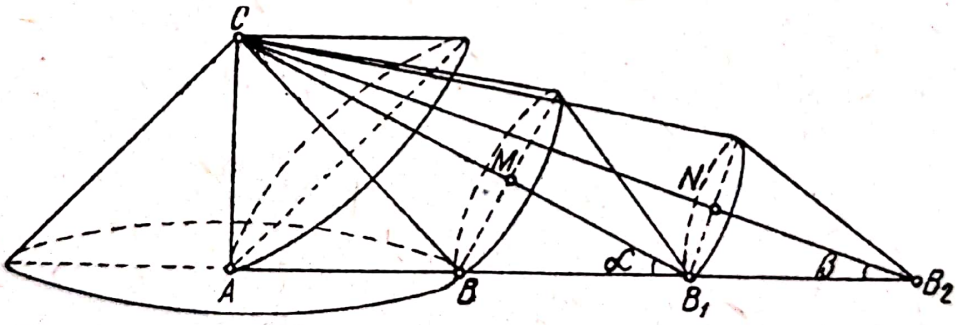


Fig. 197

deci

$$\alpha + \beta = 45°.$$

b) În triunghiurile dreptunghice asemenea B_1MB și B_1AC, scriem proporționalitatea laturilor

$$\frac{\overline{B_1B}}{\overline{B_1C}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AC}}$$

de unde

$$\overline{BM} = \frac{\overline{B_1B} \cdot \overline{AC}}{\overline{B_1C}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Analog, din triunghiurile dreptunghice asemenea B_2NB_1 și B_2AC avem

$$\overline{B_1N} = \frac{\overline{B_2B_1} \cdot \overline{AC}}{\overline{B_2C}} = \frac{a}{\sqrt{10}}.$$

Raportul $\frac{BM}{B_1N} = \sqrt{2}$ este tocmai raportul dintre latura și diagonala unui pătrat; deci, diagonala pătratului cu latura B_1N este egală cu BM.

c) Fie R_1 și R_2, S_1 și S_2, respectiv razele cercurilor circumscrise și ariile triunghiurilor CBB_1 și CBB_2; putem scrie, după formula $R = \frac{abc}{4S}$,

$$R_1 = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BB_1} \cdot \overline{CB_1}}{4S_1}, \quad R_2 = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BB_2} \cdot \overline{CB_2}}{4S_2}.$$

Deoarece

$$\overline{BC} = a\sqrt{2}, \ \overline{BB_1} = a, \ \overline{CB_1} = \frac{a}{\sin \alpha} = a\sqrt{5}, \ \overline{BB_2} = 2a,$$

$$\overline{CB_2} = \frac{a}{\sin \beta} = a\sqrt{10} \text{ și } S_1 = \frac{a^2}{2}, \ S_2 = a^2,$$

avem

$$R_1 = \frac{a\sqrt{10}}{2} \text{ și } R_2 = \frac{a\sqrt{20}}{2}.$$

Dacă notăm diametrii acelorași cercuri cu D_1 și D_2, avem

$$D_1 = 2R_1 = a\sqrt{10}, \ D_2 = 2R_2 = a\sqrt{20},$$

și raportul

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{a\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}}{a\sqrt{10}} = \sqrt{2},$$

ceea ce arată că pătratul cu latura egală cu diametrul cercului circumscris triunghiului BB_1C are diagonala egală cu diametrul cercului circumscris triunghiului BB_2C.

Scanned with OKEN Scanner

d) Prin rotaţia triunghiului ABC în jurul unei catete obţinem un con cu raza a şi înălţimea a; avem deci

$$V_1 = \frac{\pi a^3}{3}. \qquad (6)$$

Prin rotaţia triunghiului ABC în jurul ipotenuzei, obţinem două conuri avînd fiecare raza $\frac{a}{\sqrt{2}}$ şi înălţimea $\frac{a}{\sqrt{2}}$; avem deci

$$V_2 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}.$$

Volumul V_3 este format din două conuri cu razele $\frac{a}{\sqrt{5}}$ şi avînd înălţimile astfel încît suma lor este egală cu $\overline{B_2C} = a\sqrt{5}$; deci

$$V_3 = \frac{\sqrt{5}\pi a^3}{15}.$$

Volumul V_4 este format din două conuri cu razele $\frac{a}{\sqrt{10}}$ şi cu înălţimile astfel, încît suma lor este $\overline{B_2C} = a\sqrt{10}$; deci

$$V_4 = \frac{\sqrt{10}\pi a^3}{30}.$$

Pentru ca V_1, V_2 V_3, V_4 să fie termenii unei proporţii, trebuie să avem

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_3}{V_4},$$

relaţie ce se verifică uşor.

572. Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, în care

$$\overline{AB} = \overline{AD} = a \text{ şi } \widehat{CAC'} = 45°.$$

a) Să se calculeze $\overline{CC'}$ şi $\overline{AC'}$.
b) Ce unghiuri face diagonala AC' cu AB, AD, AA'?
c) La ce distanţe de A se găsesc proiecţiile ortogonale ale punctelor B, C, D pe diagonala AC'.

Institutul de construcţii, Bucureşti, 1951.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Din triunghiul dreptunghic isoscel ABC (fig. 198), obţinem

$$\overline{AC} = \overline{AB}\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

Din triunghiul dreptunghic isoscel ACC' avem

$$\overline{AC'} = \overline{AC}\sqrt{2} = 2a$$

şi

$$\overline{CC'} = \overline{AC} = a\sqrt{2}.$$

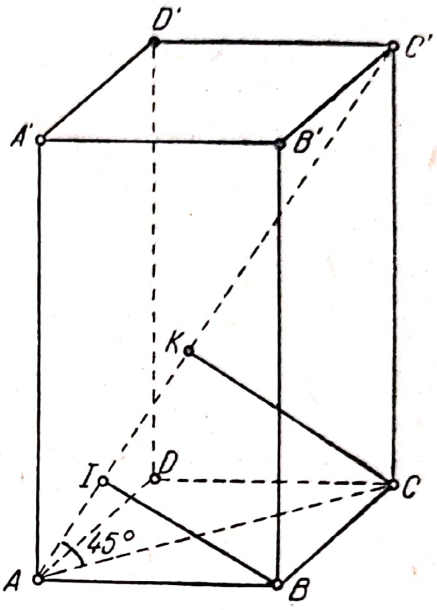


Fig. 198

b) Dreapta AB fiind perpendiculară pe planul CBB', triunghiul ABC' este dreptunghic în B. Cum ipotenuza sa AC' valorează cît dublul laturii AB, unghiul $\widehat{AC'B}$ este de 30° şi complementul său, $\widehat{BAC'}$, este de 60°.

Triunghiul ADC', dreptunghic în D, este egal cu triunghiul ABC'; deci, unghiul DAC' este de asemenea de 60°. În sfîrşit, AA' este paralelă cu CC' şi am văzut că triunghiul ACC' este dreptunghic isoscel; deci

$$\widehat{A'AC'} = \widehat{AC'C} \text{ (ca alterne interne)} = 45°.$$

c) Fie I proiecţia lui B pe AC'. Unghiul BAI fiind de 60°, avem

$$\overline{AI} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{a}{2};$$

D şi B fiind simetrice în raport cu planul ACC', proiecţia lui D pe AC' coincide cu I. Fie K proiecţia lui C pe AC'. Triunghiul ACK, avînd unghiul $CAC' = 45°$, este dreptunghic isoscel, deci

$$\overline{AK} = \frac{\overline{AC}\sqrt{2}}{2} = a.$$

573. Într-un con circular drept se dă înălţimea h şi aria totală πm^2; să se calculeze raza bazei. Este problema totdeauna posibilă?

Institutul de construcţii, Bucureşti, 1951.

R. Notînd $\overline{AH} = x$ (fig. 199), trebuie să avem

$$\pi x^2 + \pi x \cdot \overline{SA} = \pi m^2,$$

sau, simplificînd cu π și înlocuind $\overline{SA} = \sqrt{x^2 + h^2}$, obținem

$$x^2 + x\sqrt{x^2 + h^2} = m^2. \qquad (1)$$

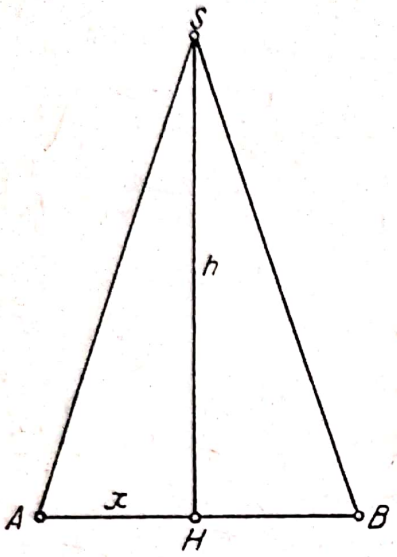


Fig. 199

Izolînd radicalul,

$$x\sqrt{x^2 + h^2} = m^2 - x^2,$$

și ridicînd la pătrat, vom avea

$$x^2(x^2 + h^2) = (m^2 - x^2)^2$$

sau

$$x^2h^2 = m^4 - 2m^2x^2,$$

de unde, neglijînd valoarea negativă, obținem

$$x = \frac{m^2}{\sqrt{2m^2 + h^2}} = \frac{m^2\sqrt{2m^2 + h^2}}{2m^2 + h^2}.$$

Această valoare reală și pozitivă a lui x nu convine ecuației (1), decît atunci cînd ea este mai mică decît m, pentru că expresia pozitivă $x\sqrt{x^2 + h^2}$ care este egală cu $m^2 - x^2$, implică să avem $m^2 > x^2$. Condiția este de altfel îndeplinită, pentru că inegalitatea $\frac{m^2}{\sqrt{2m^2 + h^2}} < m$ revine la $m^2 + h^2 > 0$.

Problema este totdeauna posibilă și admite o soluție unică.

574. Să se calculeze catetele b și c ale unui triunghi dreptunghic BAC, cunoscînd

a) ipotenuza a și aria m^2. Între ce limite poate varia m^2, pentru ca problema să fie posibilă?

b) ipotenuza a și perimetrul $2p$. Între ce limite poate varia p, pentru ca problema să fie posibilă?

c) se duce bisectoarea AM pînă la intersecția ei M cu ipotenuza BC. Cunoscînd cateta c și unghiul B, să se calculeze diametrul d al cercului circumscris triunghiului ABM. În particular, cînd $\hat{B} = 30°$, să se exprime d sub forma $d = kc$, unde k este un număr cu numitor rațional.

Institutul de construcții, București, 1952.

R. Triunghiul fiind dreptunghic, avem

$$b^2 + c^2 = a^2 \text{ și } bc = 2m^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$b^2c^2 = 4m^4.$$

Ţinînd seama că $(b - c)^2 \geqslant 0$, avem

$$b^2 + c^2 \geqslant 2bc, \text{ deci } b^2 + c^2 \geqslant 4m^2 > 0$$

sau

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 \geqslant m^2 > 0.$$

Notînd $b^2 = x$ şi $c^2 = y$, necunoscutele sînt rădăcinile ecuaţiei $X^2 - a^2X + 4m^4 = 0$, de unde

$$X_{1,2} = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 16m^4}}{2}$$

b) Avem $b^2 + c^2 = a^2$; $a + b + c = 2p$ sau $b + c = 2p - a$. Ridicînd la pătrat, obţinem

$$b^2 + c^2 + 2bc = (2p - a)^2,$$

deci

$$2bc = (2p - a)^2 - a^2 = 4p^2 - 4ap = 4p(p - a).$$

Notăm $b = x$ şi $c = y$, care sînt soluţii ale ecuaţiei

$$X^2 - (2p - a)\,X + 2p(p - a) = 0,$$

de unde

$$X_{1,2} = \frac{2p - a \pm \sqrt{a^2 - 4p^2 + 4ap}}{2}.$$

Pentru a avea rădăcini reale şi pozitive trebuie ca

$$2p - a > \sqrt{a^2 - 4p^2 + 4ap}$$

şi

$$a^2 - 4p^2 + 4ap > 0.$$

Ridicînd la pătrat prima inegalitate, avem

$$4p^2 - 4ap + a^2 > a^2 - 4p^2 + 4ap > 0,$$

de unde $p^2 > ap$, adică $p > a$; iar din

$$a^2 - 4p^2 + 4ap > 0,$$

sau

$$4p^2 - 4ap - a^2 < 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

(p fiind pozitiv), deducem

$$p_{1,2} = \frac{2a \pm 2a\sqrt{2}}{4}, \text{ deci } p \leqslant \frac{a(1+\sqrt{2})}{2}. \qquad (1)$$

Observație. În cazul cînd triunghiul este și isoscel are și aria maximă. În acest caz, $b = c = a\frac{\sqrt{2}}{2}$, de unde, din $a + b + c = 2p$ obținem

$$2p = a(1 + \sqrt{2});$$

în acest caz, perimetrul fiind maxim, rezultă egalitatea în condiția (1).

c) Bisectoarea unghiului A face 45° cu cele două catete, deci $\widehat{AMB} = 180° - (\hat{B} + 45°)$. Cateta c mai poate fi exprimată astfel

$$c = d \cdot \sin [180° - (\hat{B} + 45°)] = d \sin (\hat{B} + 45°).$$

În cazul particular,

$$\hat{B} = 30°; \quad d = \frac{c}{\sin 75°};$$

$$\sin 75° = \sin (30° + 45°) = \sin 30° \cos 45° + \sin 45° \cos 30° =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3});$$

deci

$$d = \frac{4c}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{4c\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2(3-1)} = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)\, c.$$

575. Laturile unui triunghi sînt

$$a = x^2 - x + 1; \quad b = 2x - 1; \quad c = x^2 - 2x.$$

a) Să se arate că triunghiul există pentru valorile lui x superioare lui 2 și că unghiul A este de 120°.

b) Să se arate apoi că

$$r_a - r = 3R,$$

unde r_a este raza cercului exînscris unghiului A, r —raza cercului înscris și R—raza cercului circumscris.

Institutul de petrol și gaze, București, 1952.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Pentru ca expresiile $a = x^2 - x + 1$; $b = 2x - 1$, $c = x^2 - 2x$ să fie laturile unui triunghi trebuie să aibă loc simultan următoarele inegalități

$$2x - 1 + x^2 - 2x > x^2 - x + 1 \text{ sau } x - 2 > 0, \quad \text{(I)}$$

$$x^2 - x + 1 + x^2 - 2x > 2x - 1 \text{ sau } 2x^2 - 5x + 2 > 0, \quad \text{(II)}$$

$$x^2 - x + 1 + 2x - 1 > x^2 - 2x \text{ sau } 3x > 0. \quad \text{(III)}$$

Prima inegalitate este verificată pentru valorile $x > 2$, a doua pentru $x < \frac{1}{2}$ sau $x > 2$ și a treia pentru $x > 0$.

Rezultă, deci, că cele trei expresii reprezintă laturile unui triunghi, numai dacă $x > 2$.

Pentru a calcula unghiul A aplicăm formula cosinusului

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(2x-1)^2 + (x^2-2x)^2 - (x^2-x+1)^2}{2(2x-1)(x^2-2x)} = -\frac{1}{2},$$

de unde rezultă

$$\hat{A} = 120°.$$

b) Avem

$$r_a - r = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} - (p-a)\operatorname{tg} \frac{A}{2} = a \operatorname{tg} \frac{A}{2} = (x^2 - x + 1)\sqrt{3}$$

și

$$3R = \frac{3a}{2 \sin A} = \frac{3(x^2 - x + 1)}{2 \sin 60°} = \sqrt{3}(x^2 - x + 1);$$

prin urmare

$$r_a - r = 3R.$$

576. Se dă ecuația de gradul al doilea

$$x^2 \sin \alpha - 2x \cos \alpha - 1 + \sin \alpha = 0,$$

unde α este un parametru. Să se studieze natura și semnele rădăcinilor acestei ecuații cînd α variază de la 0 la 2π.

Facultatea de chimie, București, 1952.

R. Natura rădăcinilor ecuației date depinde de semnul discriminantului

$$\Delta = \cos^2 \alpha - \sin \alpha(\sin \alpha - 1) = \cos 2\alpha + \sin \alpha,$$

iar semnele rădăcinilor depind de semnul expresiilor

$$x_1x_2 = 1 - \frac{1}{\sin\alpha}; \quad x_1 + x_2 = 2\operatorname{ctg}\alpha.$$

Înregistrăm într-o tabelă semnele expresiilor Δ, x_1x_2 și $x_1 + x_2$, atunci cînd α variază de la 0 la 2π și unde am notat cu $|x_1|$ valoarea absolută a rădăcinii x_1:

α	Δ	x_1x_2	x_1+x_2	Concluzii despre rădăcini
0				$x = -\frac{1}{2}$
	+	−	+	reale distincte $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $\|x_1\| > \|x_2\|$
$\frac{\pi}{2}$	0	0	0	$x_1 = x_2 = 0$
	+	−	−	reale distincte $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $\|x_2\| > \|x_1\|$
π	+			o singură rădăcină $x_1 = \frac{1}{2}$
	+	+	+	reale distincte $x_1 > 0$, $x_2 > 0$
$\frac{7\pi}{6}$	0	+	+	$x_1 = x_2 = \sqrt{3}$
	−			rădăcini complexe
	−			
	−			
	−			
	−			
$\frac{11\pi}{6}$	0	+	−	$x_1 = x_2 = -\sqrt{3}$
	+	+	−	reale distincte $x_1 < 0$, $x_2 < 0$.
2π	1			$x = -\frac{1}{2}$

577. Se circumscrie un trapez isoscel unui cerc de rază 1, astfel ca raportul bazelor să fie k.

a) Să se afle laturile și unghiurile trapezului exprimate prin k.

b) Unind consecutiv punctele de contact cu cercul, ale laturilor trapezului considerat, se obține un patrulater. Să se demonstreze că două din unghiurile patrulaterului sînt egale cu cele ale trapezului și să se verifice că aria patrulaterului $S = 4 \cdot \frac{\sqrt{k}}{k+1}$.

c) Pentru ce valoare a lui k patrulaterul de la punctul precedent va avea cea mai mare arie. Ce devin în acest caz patrulaterul și trapezul considerat.

Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1952.

R. a) Notăm bazele $\overline{AB} = 2x$ și $\overline{CD} = 2y$. Din triunghiul dreptunghic, format prin unirea centrului O cu vîrfurile B și C (fig. 200), deducem

$$\overline{OT}^2 = \overline{BT} \cdot \overline{TC} \tag{1}$$

unde T este punctul de tangență a laturii BC cu cercul. Avînd în vedere că $\overline{BT} = \overline{BM}$ și $\overline{CT} = \overline{CN}$, ca fiind tangente duse din același punct la un cerc, relația (1) devine

$$xy = 1.$$

Această ecuație, împreună cu condiția

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{AB}} = \frac{y}{x} = k,$$

ne dau

$$x = \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ și } y = \sqrt{k}.$$

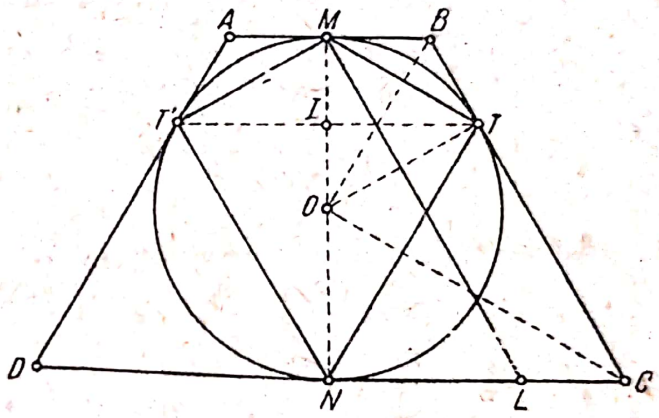


Fig. 200

Laturile și unghiurile trapezului sînt date prin expresiile următoare

$$\overline{AB} = \frac{2}{\sqrt{k}}; \quad \overline{CD} = 2\sqrt{k}; \quad \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{BT} + \overline{TC} = \overline{BM} + \overline{CN} =$$

$$= \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}};$$

$$\sin C = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \text{ sau } C = \arcsin \frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

b) Avem

$$\text{măs } \widehat{T'MT} = \text{măs } \frac{\widehat{T'NT}}{2},$$

iar

$$\text{măs}\,\widehat{T'AM} = \text{măs}\,\frac{(\widehat{T'NT} + \widehat{TM}) - \widehat{T'M}}{2}$$

și pentru că avem $\widehat{TM} = \widehat{T'M}$, rezultă $\widehat{T'AM} = \text{măs}\,\frac{\widehat{T'NT}}{2}$; prin urmare $\widehat{T'MT} = \widehat{T'AM}$. La fel se găsește $\widehat{T'NT} = \widehat{T'DN}$, ceea ce demonstrează că două unghiuri ale patrulaterului $T'MTN$ sînt egale cu unghiurile trapezului.

Pentru a găsi aria patrulaterului $T'MTN$ avem nevoie de lungimea diagonalei $\overline{T'T}$. Ducem ML paralelă cu BC. Triunghiurile MNL și ITO sînt asemenea, de unde rezultă

$$\frac{\overline{IT}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{BC}} \quad \text{sau} \quad \frac{\overline{IT}}{2} = \frac{1}{\frac{1+k}{\sqrt{k}}}.$$

Avem deci, $\overline{IT} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$ și prin urmare $\overline{T'T} = \frac{4\sqrt{k}}{1+k}$.

Aria patrulaterului este

$$S = \frac{\overline{MN} \cdot \overline{T'T}}{2} = \frac{4\sqrt{k}}{1+k}.$$

c) Pentru a găsi aria maximă a acestui patrulater, punem $k = \text{tg}^2\frac{\varphi}{2}$, ceea ce este întotdeauna posibil, dat fiind $k > 0$.

Aria S devine în acest caz $S = \dfrac{4\,\text{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 + \text{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = 2\sin\varphi$.

Se știe că $\sin\varphi$ are valoarea maximă 1 pentru $\varphi = 90°$, deci aria S este maximă cînd $k = \text{tg}^2\frac{\varphi}{2} = \text{tg}^2 45° = 1$. În acest caz avem

$$\overline{AB} = \frac{2}{\sqrt{k}} = 2 \text{ și } \overline{CD} = 2\sqrt{k} = 2,$$

adică trapezul devine pătrat, de asemenea și patrulaterul $T'MTN$.

Scanned with OKEN Scanner

578. Un triunghi dreptunghic BAC are latura $\overline{AB}$ de 1 cm; se notează unghiul din C cu x. Să se exprime cu ajutorul lui x aria totală a conului obținut prin rotația acestui triunghi în jurul laturii AB. Cît trebuie să fie x pentru ca această arie totală să fie 3.

Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1952.

R. Aria totală a conului obținut prin rotirea în jurul laturii AB (fig. 201) are expresia

$$A = \pi \overline{AC} \cdot (\overline{BC} + \overline{AC}) \qquad (1)$$

Înlocuind în această expresie

$$\overline{AC} = \overline{AB} \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} x$$

și

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{\sin x} = \frac{1}{\sin x},$$

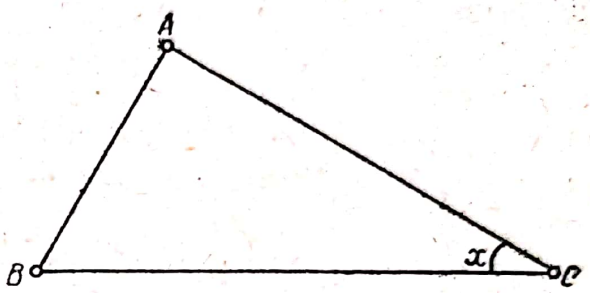


Fig. 201

obținem

$$A = \frac{\pi \cos x (1 + \cos x)}{\sin^2 x}.$$

Pentru a găsi x astfel ca A să fie egală cu 3, avem de rezolvat ecuația trigonometrică

$$\frac{\pi \cos x (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = 3.$$

După ce simplificăm cu $1 + \cos x$, obținem

$$\cos x = \frac{3}{\pi + 3}.$$

Cu ajutorul tabelelor găsim $x = 60°45'35''$.

579. Se dă un triunghi ABC în care $\overline{BC} = 8$ și înălțimea $AD = 8$. La ce distanță de vîrful A trebuie să se ducă o paralelă MN la latura BC pentru ca aria trapezului $MNCB$ să fie de trei ori mai mare decît aria triunghiului AMN.

Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1952.

R. Pentru ca trapezul $MNCB$ (fig. 202) să aibă o arie de trei ori mai mare ca a triunghiului AMN este necesar ca triunghiul ABC să aibă aria de patru ori mai mare ca a triunghiului AMN.

$$4 \text{ aria } AMN = \text{aria } ABC,$$

sau

$$4 \cdot \frac{\overline{MN} \cdot x}{2} = \frac{8 \cdot 8}{2}. \qquad (1)$$

Din asemănarea triunghiurilor AMN și ABC, avem

$$\frac{\overline{MN}}{8} = \frac{x}{8}$$

de unde rezultă $\overline{MN} = x$.

Înlocuind aceasta în (1), obținem $x = 4$.

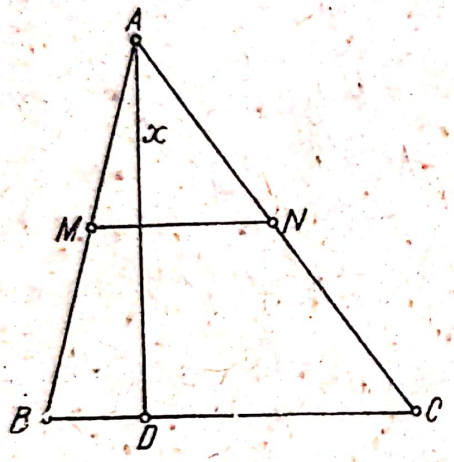


Fig. 202

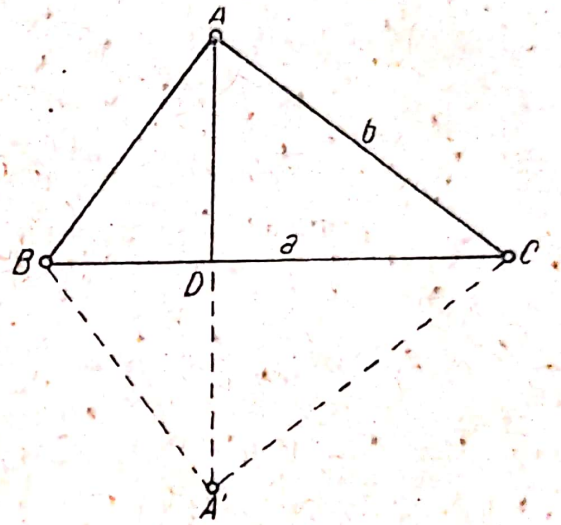


Fig. 203

589. Un triunghi dreptunghic ABC având cateta $\overline{AB}$ de 30 cm, se rotește în jurul ipotenuzei BC și generează un solid al cărui volum este de 9 600 π cm³. Să se afle celelalte două laturi ale triunghiului.

Facultatea de chimie, București, 1953.

R. Notăm ipotenuza cu a și cealaltă catetă cu b. Corpul obținut prin rotirea triunghiului ABC în jurul ipotenuzei $\overline{BC}$ (fig. 203) este format din două conuri al căror volum este

$$V = \frac{\pi \cdot \overline{AD}^2 \cdot \overline{BD}}{3} + \frac{\pi \overline{AD}^2 \cdot \overline{DC}}{3} = \frac{\pi \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC}}{3}.$$

Ținînd seama de faptul că înălțimea este medie proporțională între segmentele pe care le determină pe ipotenuză și de faptul

că o catetă este medie proporțională între ipotenuza întreagă și proiecția ei pe ipotenuză, expresia care ne dă volumul ia forma

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}^2}{BC}.$$

Scriind că volumul este 9 600 π și că între laturi există relația lui Pitagora, obținem sistemul

$$\begin{cases} b^2 = 32a \\ a^2 - b^2 = 900 \end{cases}$$

ale cărui soluții care au sens pentru problemă sînt

$$a = 50 \text{ cm}; \quad b = 40 \text{ cm}.$$

581. Se consideră următoarea reacție chimică

$$x \cdot HNO_3 + y \cdot HCl = z \cdot H_2O + u \cdot NOCl + v \cdot Cl$$

Să se determine algebric numerele întregi x, y, z, u și v.

Facultatea de chimie, București, 1953.

R. Scriind că numărul atomilor unui element este același în ambii membri, obținem sistemul

$$x = u; \; 3x = z + u; \; x + y = 2z; \; y = u + v,$$

care, rezolvat, ne dă soluția

$$x = u; \; y = 3u; \; z = 2u \text{ și } v = 2u.$$

Luînd $u = 1$, avem $x = 1$; $y = 3$; $z = 2$ și $v = 2$.

Egalitatea chimică devine astfel

$$HNO_3 + 3HCl = 2H_2O + NOCl + 2Cl.$$

582. Se consideră șirul de molecule

$$CH_4, \; C_2H_6, \; C_3H_8, \; C_4H_{10}, \; C_5H_{12}.$$

Cîte molecule trebuie să luăm din acest șir ca să avem în total 270 atomi de hidrogen?

Facultatea de chimie, București, 1953.

R. Numărul atomilor de hidrogen din molecule este dat de suma

$$4 + 6 + 8 + \ldots,$$

care este o progresie aritmetică cu raţia 2. Suma primilor n termeni ai acestei progresii este $n\ (n + 3)$.

Pentru a găsi numărul de molecule care să conţină 270 atomi de hidrogen, rezolvăm ecuaţia

$$n(n + 3) = 270$$

şi obţinem soluţia care are semnificaţia în problema noastră, $n = 15$.

583. Se consideră conurile drepte circumscrise unei sfere de rază r: printre aceste conuri există două cu volumul de $3\pi r^3$ fiecare. Să se afle unghiurile de la vîrf ale acestor două conuri.

Facultatea de chimie, Bucureşti, 1953.

R. Notăm cu 2α unghiul de la vîrful secţiunii unui plan dus prin axa conului şi ducem raza $\overline{OM} = r$ la punctul de contact (fig. 204). Din triunghiurile dreptunghice formate rezultă

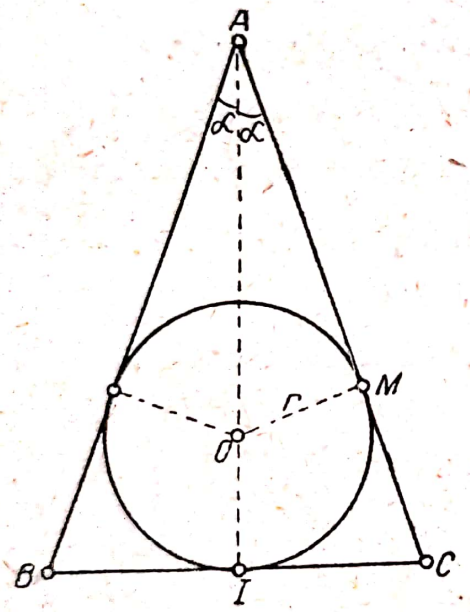


Fig. 204

$$\overline{AO} = \frac{r}{\sin\alpha}; \quad \overline{AI} = \frac{r(1 + \sin\alpha)}{\sin\alpha};$$

$$\overline{IC} = \frac{r(1 + \sin\alpha)}{\cos\alpha}.$$

Scriind că volumul conului este $3\pi r^3$, obţinem ecuaţia care dă pe α

$$(1 + \sin\alpha)^3 =$$

$$= 9 \sin\alpha\ (1 - \sin\alpha)\ (1 + \sin\alpha).$$

Trecem totul în membrul întîi şi dăm factor comun pe $1 + \sin\alpha$; obţinem $(1 + \sin\alpha)(10 \sin^2\alpha - 7 \sin\alpha + 1) = 0$.

Soluţiile acestei ecuaţii sînt date de

$$\sin\alpha = -1; \quad \sin\alpha = \frac{1}{2} \text{ şi } \sin\alpha = \frac{1}{5}.$$

Singurele soluţii care au sens în cazul problemei noastre sînt cele date de

$$\sin\alpha = \frac{1}{2} \text{ cu } \alpha = 30°$$

şi

$$\sin\alpha = \frac{1}{5} \text{ cu } \alpha = 11°32'12''.$$

Scanned with OKEN Scanner

584. Dacă numerele

$$\sin(B + C - A);\quad \sin(C + A - B);\quad \sin(A + B - C)$$

formează o progresie aritmetică, să se arate că și numerele

$$\operatorname{tg} A;\quad \operatorname{tg} B;\quad \operatorname{tg} C$$

formează de asemenea o progresie aritmetică (A, B, C sînt unghiurile unui triunghi).

Facultatea de matematică și fizică, Cluj, 1953.

R. Deoarece A, B, C sînt unghiurile unui triunghi, rezultă că expresiile date sînt respectiv egale cu

$$\sin 2A;\quad \sin 2B;\quad \sin 2C.$$

Scriind că aceste expresii sînt în progresie aritmetică, avem

$$2 \sin 2B = \sin 2A + \sin 2C$$

sau

$$4 \sin B \cos B = 2 \sin(A + C) \cos(A - C).$$

Simplificăm cu $2 \sin B = 2 \sin(A + C)$ și obținem

$$2 \cos B = \cos(A - C).$$

Această egalitate se mai poate scrie și astfel

$$\cos B = \cos(A + C) + \cos(A - C)$$

sau

$$\cos B = 2 \cos A \cos C.$$

Pusă sub formă de proporție, relația devine

$$\frac{2}{\cos B} = \frac{1}{\cos A \cos C}.$$

Înmulțim ambii membri cu $\sin B = \sin(A + C)$ și obținem

$$\frac{2 \sin B}{\cos B} = \frac{\sin(A + C)}{\cos A \ \operatorname{os} C} = \frac{\sin A \cos C + \sin C \cos A}{\cos A \cos C}.$$

De aici rezultă

$$2 \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C,$$

ceea ce dovedește că $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{tg} C$ sînt în progresie aritmetică.

Scanned with OKEN Scanner

585. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, ale cărui catete sînt $\overline{AB} = 4a$, $\overline{AC} = 3a$. Pe perpendiculara în A la planul acestui triunghi se ia punctul S astfel ca $\overline{AS} = 4a$.

a) Să se calculeze aria triunghiului SBC, distanța de la punctul A la planul SBC și raza sferei înscrise în tetraedrul $SABC$.

b) Printr-un punct M luat pe muchia $\overline{AC}$ astfel ca $\overline{AM} = x$, se duce un plan paralel cu muchiile $\overline{SA}$ și $\overline{BC}$. Să se arate că secțiunea tetraedrului prin acest plan este un dreptunghi. Să se determine x astfel ca perimetrul său să aibă o lungime dată l. Discuție.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1954.

R. a) Ducem dreapta AD perpendiculară pe ipotenuza $\overline{BC}$ (fig. 205).

După teorema celor trei perpendiculare, dreapta SD este de asemenea perpendiculară pe BC. Putem calcula lungimea acestei perpendiculare. Avem

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{9a^2 + 16a^2} = 5a$$

și

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3a \cdot 4a}{3a} = 2{,}4a$$

și prin urmare,

$$\overline{SD} = \sqrt{16a^2 + 5{,}76a^2} = \frac{4a\sqrt{34}}{5}.$$

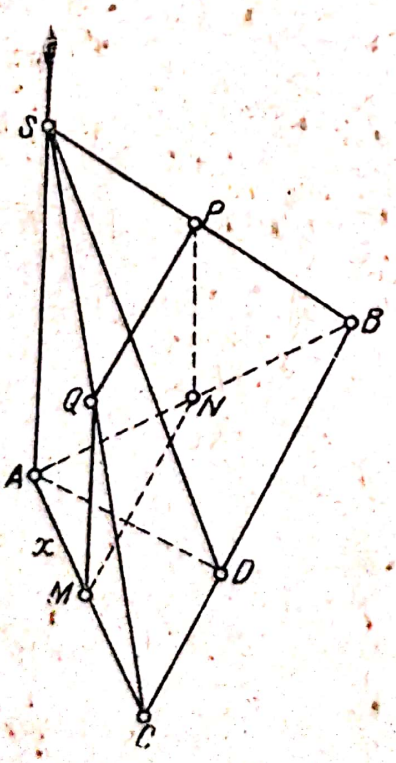


Fig. 205

Aria triunghiului SBC este egală cu

$$\frac{\overline{BC} \cdot \overline{SD}}{2} = \frac{5a \cdot \frac{4a\sqrt{34}}{5}}{2} = 2a^2\sqrt{34}.$$

Notăm distanța de la A la SBC cu d și exprimăm volumul piramidei $SABC$ în două feluri, de unde deducem distanța d. Avem

$$V = \frac{3a \cdot 4a \cdot 4a}{6} = \frac{2a^2\sqrt{34} \cdot d}{3};$$

rezultă

$$d = \frac{3 \cdot 3a \cdot 4a \cdot 4a}{6 \cdot 2a^2\sqrt{34}} = \frac{12a}{\sqrt{34}} = \frac{6a\sqrt{34}}{17}.$$

Pentru a afla raza r a sferei înscrise, unim centrul O cu vîrfurile A, B, C, S și scriem că volumul tetraedrului $SABC$ este egal cu suma volumelor $OABC$, $OABS$, $OBCS$ și $OACS$. Avem,

$$V = \frac{(ABC)\,r}{3} + \frac{(ABS)\,r}{3} + \frac{(BCS)\,r}{3} + \frac{(ACS)\,r}{3},$$

unde am notat, de exemplu, (ABC) aria feței ABC. Rezultă deci

$$r = \frac{3V}{\text{aria totală}} = \frac{24a^3}{6a^2 + 6a^2 + 8a^2 + 2a^2\sqrt{34}} = \frac{12a}{10 + \sqrt{34}} = \frac{2a(10 - \sqrt{34})}{11}.$$

b) Pentru a construi secțiunea paralelă cu SA și BC vom duce din M dreptele MQ și MN paralele respectiv la AS și CB. Acestea determină secțiunea $MNPQ$; să demonstrăm că ea este un dreptunghi. Planul $MNPQ$ este perpendicular pe ABC pentru că conține pe MQ, o dreaptă perpendiculară pe ABC (MQ paralel cu AS și AS perpendicular pe ABC). De asemenea, și SAB este perpendicular pe ABC pentru că conține perpendiculara SA pe planul ABC. Intersecția NP a planelor $MNPQ$ și SAB este deci o dreaptă perpendiculară pe ABC. Din triunghiurile asemenea SCA și QCM ca și din SBA și PBN, rezultă

$$\frac{\overline{SQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} \text{ și } \frac{\overline{SP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}.$$

Dreapta MN fiind paralelă cu BC, avem

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}, \text{ de unde deducem } \frac{\overline{SQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{SP}}{\overline{PB}}.$$

Rezultă, deci, că dreapta QP este paralelă cu BC prin urmare și cu MN. Patrulaterul $MNPQ$ avînd MQ paralelă cu NP și QP paralelă cu MN, precum și unghiurile din M și N drepte, este un dreptunghi.

Din proporția $\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}}$, deducem

$$\overline{MN} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{5a \cdot x}{3a} = \frac{5}{3}x.$$

Din relația $\frac{\overline{MQ}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CA}}$, avem

$$\overline{MQ} = \frac{\overline{AS} \cdot \overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{4a(3a - x)}{3a} = \frac{4}{3}(3a - x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca perimetrul secțiunii $MNPQ$ să fie l, trebuie să avem

$$\frac{5}{3}x + \frac{4(3a - x)}{3} = \frac{l}{2}.$$

Ecuația rezolvată ne dă soluția căutată

$$x = \frac{3l}{2} - 12a,$$

Pentru ca soluția să corespundă unei secțiuni din interiorul piramidei, trebuie să avem

$$0 < \frac{3l}{2} - 12a < 3a,$$

ceea ce dă condiția

$$8a < l < 10a.$$

586. Într-un triunghi isoscel ABC există relația

$$l \cos A + 2m \cos B = t,$$

în care A este unghiul de la vîrf și l, m, t cantități pozitive, iar $m > 2l$.

a) Să se calculeze unghiurile triunghiului pentru $t = m + \frac{l}{2}$.

b) Considerînd pe t variabil, iar pe m și l fixe, să se determine între ce limite trebuie să varieze t pentru ca problema să admită o soluție reală?

Facultatea de matematică și fizică, București, 1954.

R. Triunghiul fiind isoscel, avem

$$\hat{A} = 180 - 2\hat{B}.$$

Înlocuim în relația dată pe $\hat{A}$ în funcție de $\hat{B}$ și pe t prin $m + \frac{l}{2}$. Ecuația devine

$$-l \cos 2B + 2m \cos B = m + \frac{l}{2}$$

sau

$$4l \cos^2 B - 4m \cos B + (2m - l) = 0.$$

Rezolvînd în raport cu cos B, obținem

$$\cos B = \frac{2m \pm \sqrt{4m^2 - 4l(2m-l)}}{4l} = \frac{m \pm (m-l)}{2l},$$

care dă cazurile

I) $$\cos B = \frac{1}{2};$$

II) $$\cos B = \frac{2m-l}{2l}.$$

În primul caz, avem $\hat{B} = 60°$, prin urmare și $\hat{A} = 60°$; triunghiul este, deci, echilateral. În al doilea caz, putem scrie

$$\cos B = \frac{3}{2} + \frac{m-2l}{l},$$

și ținînd seama de datele problemei ($m > 2l$), rezultă că membrul întîi este o valoare supraunitară și ca atare nu există soluție pentru B.

b) Presupunem m, l fixe și t variabil, ecuația care dă unghiurile triunghiului este

$$2l \cos^2 B - 2m \cos B + t - l = 0$$

sau

$$f(z) = 2lz^2 - 2mz + (t-l) = 0, \qquad (1)$$

unde am pus $z = \cos B$.

Pentru ca problema să admită o soluție reală, trebuie ca ecuația (1) să aibă rădăcini reale și cel puțin una din aceste rădăcini să fie cuprinsă între 0 și + 1.

Realitatea rădăcinilor se exprimă prin condiția

$$\Delta = m^2 - 2l\,(t-l) \geqslant 0 \text{ sau } t \leqslant \frac{m^2 + 2l^2}{2l}.$$

Ca să avem cel puțin o rădăcină reală cuprinsă între 0 și 1, trebuie să existe relația $f(0) \cdot f(1) < 0$, ceea ce dă

$$(t-l)\,(t+l-2m) < 0,$$

de unde rezultă

$$l < t < 2m - l, \text{ dacă } m > l,$$

sau

$$2m - l < t < l, \text{ dacă } m < l.$$

În concluzie, pentru ca problema să admită o soluție reală, trebuie să dăm lui t o valoare cuprinsă între valorile l și $2m - l$ și care să fie mai mică sau cel mult egală cu $\frac{m^2 + 2l^2}{2l}$.

Observație. Soluțiile ecuației (1) cuprinse între -1 și 0 deși dau valori reale pentru B nu sînt acceptabile, pentru că unghiul B, fiind unul dintre unghiurile de la baza triunghiului isoscel, nu poate depăși 90°.

587. O paralelă la latura BC a triunghiului ABC taie laturile $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ în E și, respectiv F (fig. 206). Să se determine lungimea paralelei astfel încît

a) perimentrul triunghiului AEF să fie egal cu perimetrul trapezului $BCFE$;

b) D fiind un punct pe latura BC, triunghiul DEF să aibă aria maximă;

c) să se calculeze aria triunghiului AEF în cazul a), presupunînd $a = 10$ m, $b = 8$ m, $c = 12$ m.

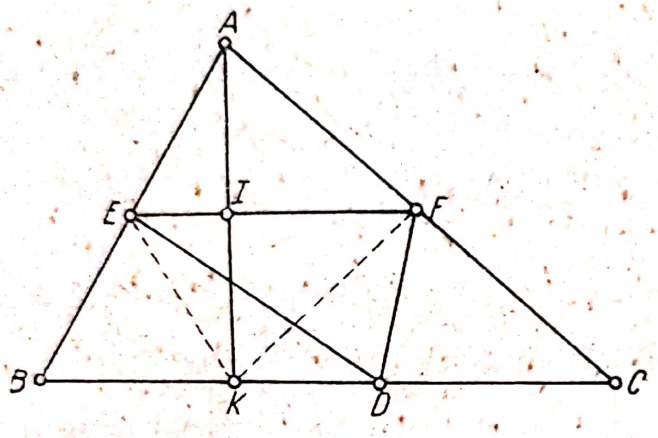


Fig. 206

Facultatea de matematică și fizică, București, 1954.

R. a) Scriem condiția cerută

$$\overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FA} = \overline{BE} + \overline{EF} + \overline{FC} + \overline{BC}.$$

Adăugăm la ambii membri suma $\overline{AE} + \overline{AF}$ și după ce reducem $\overline{EF}$, obținem

$$2(\overline{AE} + \overline{AF}) = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}. \qquad (1)$$

Dacă notăm cu a, b, c, laturile $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ și cu p semiperimetrul triunghiului, condiția (1) devine

$$\overline{AE} + \overline{AF} = p.$$

Din proporționalitatea laturilor triunghiurilor AEF și ABC, avem

$$\frac{\overline{AE} + \overline{AF}}{\overline{AB} + \overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}, \text{ sau } \frac{p}{b + c} = \frac{\overline{EF}}{a},$$

de unde

$$EF = \frac{ap}{b + c}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Aria triunghiului EFD este egală cu aria triunghiului KEF (unde K este piciorul înălțimii din A), deci

$$\text{aria } EDF = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{KI}}{2}.$$

Din asemănarea triunghiurilor AEF și ABC, avem

$$\frac{\overline{EF}}{a} = \frac{\overline{AI}}{\overline{AK}} = \frac{h - \overline{KI}}{h}, \tag{2}$$

unde am notat cu h lungimea înălțimii dusă din A.

Din (2) deducem

$$\overline{IK} = \frac{h(a - \overline{EF})}{a}.$$

Această expresie — introdusă în formula pentru aria triunghiului EDF — ne dă

$$\text{aria } EDF = \frac{h}{2a}\overline{EF} \cdot (a - \overline{EF}) = \frac{h}{2a}\left[\frac{a^2}{4} - \left(\overline{EF} - \frac{a}{2}\right)^2\right].$$

Din ultima expresie pentru aria EDF se vede că avem maximum atunci cînd scădem din $\frac{a^2}{4}$ valoarea cea mai mică, adică 0. În acest caz, avem

$$\overline{EF} = \frac{a}{2}.$$

Aria maximă a triunghiului EFD corespunde pentru cazul cînd $\overline{EF}$ unește mijloacele laturilor $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$.

c) În cazul $a = 10$; $b = 8$; $c = 12$; rezultă $p = 15$, iar $\overline{EF} = \frac{ap}{b + c} = \frac{10 \cdot 15}{20} = 7{,}5$.

Aria triunghiului ABC este egală cu

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{15 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3} = 15\sqrt{7},$$

iar pe aceea a triunghiului AEF o determinăm din raportul ariilor figurilor asemenea AEF și ABC. Avem

$$\frac{\text{aria } AEF}{\text{aria } ABC} = \left(\frac{EF}{BC}\right)^2 \quad \text{sau} \quad \frac{\text{aria } AEF}{15\sqrt{7}} = \left(\frac{7{,}5}{8}\right)^2.$$

de unde rezultă

$$\text{aria } AEF = \frac{15\sqrt{7}\cdot 15^2}{16^2} = \frac{15^3\sqrt{7}}{16^2} \approx 34{,}88.$$

588. Se dau două cercuri tangente exterioare O și O'. Tangentele comune exterioare au punctele de contact S, T cu cercul O și S', T' cu cercul O'. Se cere:

a) să se calculeze raportul razelor celor două cercuri, știind că cercul O' este cel mai mic și că unghiul $S'O'T' = 150°$;

să se arate că avem

$$\frac{R'}{R} = \operatorname{tg}^2 37°30';$$

b) presupunînd că cercurile O și O' nu sînt tangente, că unghiul $S'O'T' = 150°$, $R = 3$, $R' = 1$ și că ele reprezintă două roți de transmisie, să se calculeze lungimea curelei de transmisie presupusă perfect întinsă.

Institutul politehnic, București, 1954.

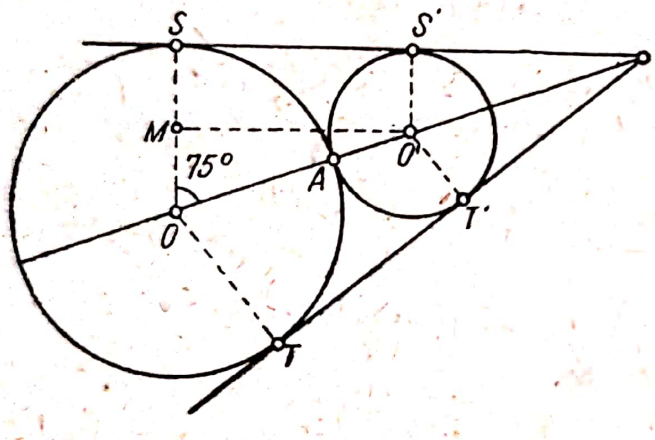


Fig. 207

R. a) Ducem din O' o paralelă $O'M$ la tangenta comună $S'S$. În triunghiul dreptunghic format OMO' (fig. 207) avem

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OO'}} = \cos 75°. \quad (1)$$

Avînd

$$\overline{OM} = \overline{OS} - \overline{O'S'} = R - R' \text{ și } \overline{OO'} = \overline{OA} + \overline{AO'} = R + R',$$

relația (1) devine

$$\frac{R - R'}{R + R'} = \cos 75°.$$

Din această egalitate, deducem

$$\frac{R'}{R} = \frac{1 - \cos 75°}{1 + \cos 75°} = \operatorname{tg}^2 37°30'.$$

b) Lungimea curelei este formată din lungimile tangentelor $\overline{SS'}$, $\overline{TT'}$ și ale arcelor de cerc SAT și $S'BT'$ (fig. 208).

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a obține lungimea tangentelor, ducem din O' o paralelă $O'M$ la tangenta $S'S$. În triunghiul dreptunghic format, $O'MO$, avem

$$\overline{O'M} = \overline{S'S} = \overline{OM} \operatorname{tg} 75°.$$

Avînd

$$\overline{OM} = \overline{OS} - \overline{O'S'} = 2,$$

rezultă

$$\overline{S'S} = \overline{T'T} = 2 \operatorname{tg} 75° = 2 \operatorname{tg}(30° + 45°) = 2(2 + \sqrt{3}).$$

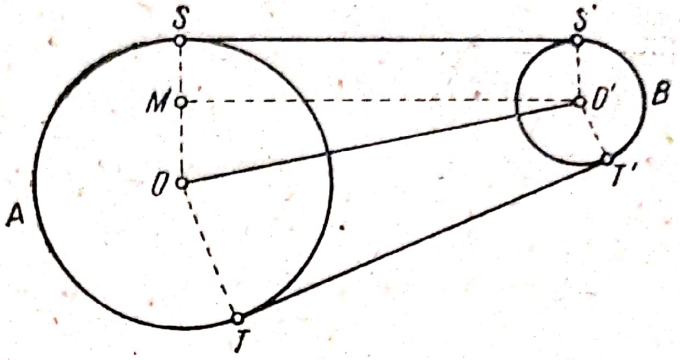


Fig. 208

Lungimea arcului de cerc SAT este $\frac{\pi \cdot 3 \cdot 210°}{180°}$, iar a arcului $S'BT'$ este $\frac{\pi \cdot 1 \cdot 150°}{180°}$.

Efectuînd calculele, găsim lungimea curelei $l \approx 28{,}54$.

589. Într-un trunchi de con este înscrisă o sferă de rază r. Generatoarea conului este înclinată cu unghiul α față de planul bazei.

Să se găsească aria laterală a trunchiului de con.

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

R. Fie trapezul $ABCD$ și cercul înscris O (fig. 209) secțiunea unui plan prin axa trunchiului de con. Aria laterală a trunchiului este dată de expresia

$$A = \pi \cdot \overline{BC}(\overline{MB} + \overline{NC}).$$

Avînd în vedere că patrulaterul $ABCD$ este circumscris cercului O, avem

$$\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{AD} + \overline{BC} \text{ sau}$$

$$2(\overline{MB} + \overline{NC}) = 2 \cdot \overline{BC}.$$

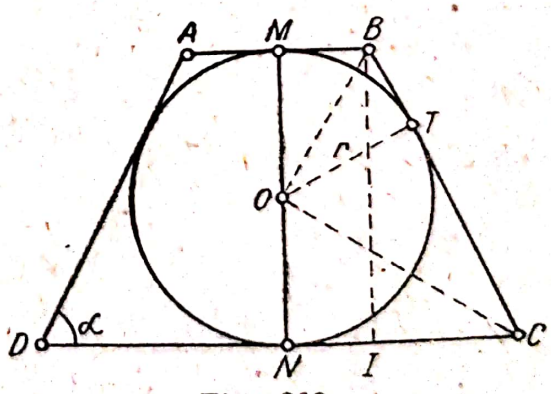


Fig. 209

Înlocuind în expresia ariei pe $\overline{MB} + \overline{NC}$ prin $\overline{BC}$, obținem

$$A = \pi \cdot \overline{BC}^2.$$

Ducînd din B perpendiculara BI pe DC, se formează triunghiul dreptunghic BIC, în care avem

$$\overline{BI} = 2r = \overline{BC} \sin \alpha,$$

de unde rezultă

$$\overline{BC} = \frac{2r}{\sin \alpha}$$

și, prin urmare,

$$A = \pi : \overline{BC}^2 = \frac{4\pi r^2}{\sin^2 \alpha}.$$

590. Fie K proiecția vîrfului A al triunghiului dreptunghic ABC pe ipotenuza BC, iar P și T proiecțiile lui K pe catetele AB și AC. Cunoscînd lungimile $\overline{BP} = d$ și $\overline{CT} = e$, să se calculeze lunginea ipotenuzei $\overline{BC}$.

Institutul de petrol și gaze, București, 1954.

R. Notăm $\overline{AB} = x$ și $\overline{AC} = y$, atunci $\overline{BK} = \sqrt{dx}$ și $\overline{CK} = \sqrt{ey}$. Din asemănarea triunghiurilor BPK și CTK (fig. 210), rezultă

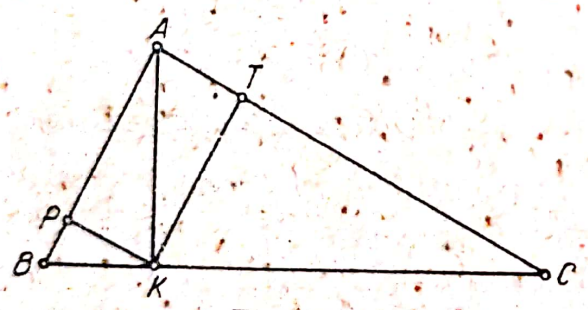


Fig. 210

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{KT}} = \frac{\overline{PK}}{\overline{CT}}$$

sau

$$\frac{\sqrt{dx}}{\sqrt{ey}} = \frac{d}{x-d} = \frac{y-e}{e}.$$

Din ultimele două rapoarte deducem

$$\frac{d}{x} + \frac{e}{y} = 1,$$

iar din primele două obținem

$$y = \frac{x(x-d)^2}{ed}.$$

Rezolvînd sistemul obținut, aflăm

$$\overline{AB} = x = d + \sqrt[3]{e^2 d}, \quad \overline{AC} = y = e + \sqrt[3]{ed^2}.$$

Ipotenuza $\overline{BC}$ va avea, deci, expresia

$$\overline{BC} = \sqrt{d^2 + e^2 + 3d\sqrt[3]{e^2 d} + 3e\sqrt[3]{ed^2}}.$$

591. Se dau cercurile O de rază R și O' de rază $3R$, tangente exterior în A. Tangenta comună în A întîlnește tangenta comună TT' în M. Se cere:

a) să se calculeze unghiurile TOA și $T'O'A$;

b) să se arate că unghiul OMO' este drept;

c) să se calculeze aria TAT'.

Institutul de arhitectură, București, 1954.

R. a) Ducem din O paralela OI la tangenta comună TT' (fig. 211). Dacă notăm $\widehat{IOO'} = \alpha$, avem

$$\sin \alpha = \frac{O'I}{OO'} = \frac{3R - R}{3R + R} = \frac{1}{2},$$

de unde rezultă $\alpha = 30°$ și deci

$$\widehat{TOA} = 90° + 30° = 120°$$

și

$$\widehat{T'O'A} = 90° - 30° = 60°.$$

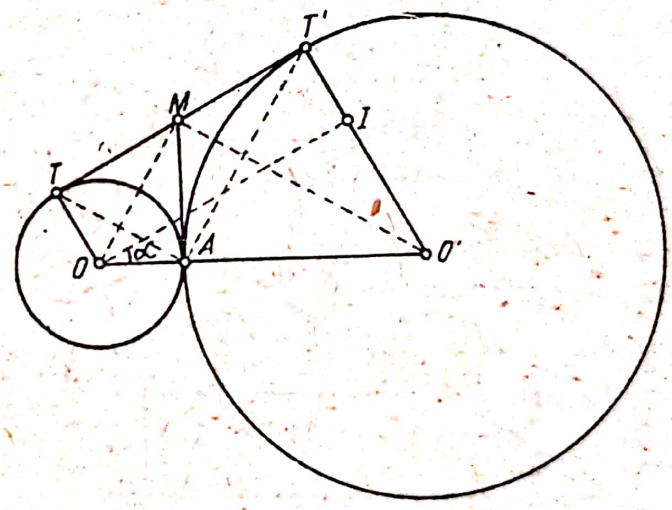


Fig. 211

b) Dreapta OM este bisectoarea unghiului tangentelor TM și AM, iar $O'M$ este bisectoarea unghiului tangentelor $T'M$ și AM. Dreptele OM și $O'M$ fiind bisectoarele a două unghiuri suplimentare adiacente sînt perpendiculare.

c) Dreptele TA și $T'A$ sînt respectiv perpendiculare pe OM și $O'M$; prin urmare, triunghiul TAT' este dreptunghic și aria lui este egală cu

$$A = \frac{\overline{AT} \cdot \overline{AT'}}{2};$$

$\overline{AT}$ este o coardă în cercul de rază R, care se opune unui unghi la centru de 120°, deci $\overline{AT}$ este latura triunghiului echilateral

înscris în cerc. Rezultă $\overline{AT} = R\sqrt{3}$. La fel, se vede că $\overline{AT'}$ este latura exagonului înscris în cercul de rază $3R$ și, prin urmare, $\overline{AT'} = 3R$. Aria căutată este, deci,

$$A = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}.$$

592. În triunghiul ABC cunoaștem, $\overline{BC} = 4$; înălțimea $AH = \sqrt{3}$; $B = 30°$. O paralelă la latura BC intersectează pe AB și AC, respectiv, în D și E, iar DE intersectează înălțimea AH în I.

a) Să se calculeze, în funcție de $\overline{IH} = x$, lungimile segmentelor $\overline{BD}$, $\overline{DE}$ și $\overline{EC}$.

b) Să se determine x, astfel ca aria totală a corpului rezultat din rotirea trapezului $BDEC$ în jurul lui BC să fie egală cu $3\pi(1 + \sqrt{3})$.

Din cele două valori pentru x se va alege aceea pentru care punctul I este așezat între A și H.

Institutul politehnic, Timisoara, 1954.

R. a) Din faptul că unghiul B (fig. 212) are 30° rezultă $\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{3}$. Prin aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic, avem

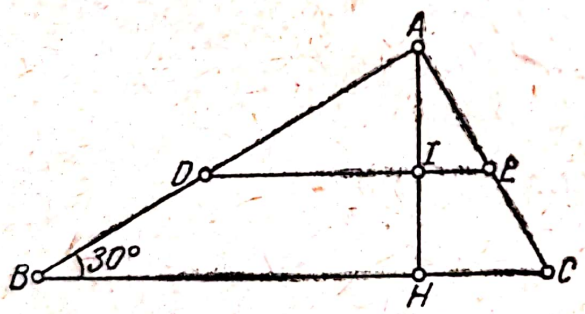


Fig. 212

$$\overline{BH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{4 \cdot 3 - 3} = 3,$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HC}^2} = \sqrt{3 + (4 - 3)^2} = 2.$$

Din proporționalitatea segmentelor formate prin ducerea paralelei DE, deducem

$$\overline{BD} = 2 \cdot \overline{HI} = 2x; \quad \overline{EC} = \frac{2x}{\sqrt{3}} \text{ și } \overline{DE} = \frac{4(\sqrt{3} - x)}{\sqrt{3}},$$

b) Aria totală a corpului ce se formează prin rotirea trapezului $BDEC$ în jurul lui BC este formată din ariile laterale ale conurilor descrise de $\overline{BD}$ și $\overline{EC}$, precum și din aria laterală a cilindrului descris de segmentul $\overline{DE}$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem, deci, aria totală

$$A_t = \pi \cdot \overline{BD} \cdot \overline{IH} + \pi \cdot \overline{IH} \cdot \overline{EC} + 2\pi \cdot \overline{IH} \cdot \overline{DE} =$$

$$= \pi \cdot \overline{IH} \, (\overline{BD} + \overline{EC} + 2 \cdot \overline{DE}).$$

Înlocuind $\overline{IH} = x$ și pe $\overline{BD}$, $\overline{EC}$ și $\overline{DE}$ prin expresiile obținute mai sus, avem

$$A_t = \pi x \left[2x + \frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{8(\sqrt{3} - x)}{\sqrt{3}} \right].$$

Pentru ca această arie să aibă valoarea $3\pi(1 + \sqrt{3})$, avem de rezolvat ecuația

$$x \left(2x + \frac{8\sqrt{3} - 6x}{\sqrt{3}} \right) = 3(1 + \sqrt{3}),$$

sau

$$2(\sqrt{3} - 1)x^2 - 8x + 3(\sqrt{3} + 1) = 0,$$

ale cărei soluții sînt

$$x_1 = \frac{3(\sqrt{3} + 1)}{2} \text{ și } x_2 = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

Soluția care corespunde cerințelor problemei este

$$x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

593. Se dă polinomul

$$P(x) = x^4 - (2 - \sin^2 \alpha)x^3 + 2x^2 \cos \alpha + (2 - 5 \sin^2 \alpha)\, x + 1$$

și se cere:

a) să se determine toate valorile lui α pentru care polinomul $P(x)$ se divide cu $x - 1$;

b) dacă notăm cu β valoarea lui α cuprinsă între 0 și $\frac{\pi}{2}$ care răspunde la condiția a), să se afle funcțiile trigonometrice ale unghiului b știind că $b = \beta + \frac{\pi}{12}$.

Institutul pedagogic, Timișoara, 1954.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Pentru ca polinomul să se dividă cu $x - 1$ trebuie să avem

$$P(1) = 1 - (2 - \sin^2 \alpha) + 2 \cos \alpha + 2 - 5 \sin^2 \alpha + 1 = 0$$

sau

$$2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0,$$

ale cărei valori α sînt date de ecuațiile

$$\cos \alpha_1 = -1 \quad \text{și} \quad \cos \alpha_2 = \frac{1}{2},$$

de unde

$$\alpha_1 = (2k+1)\,\pi \quad \text{și} \quad \alpha_2 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

b) Valoarea lui α cuprinsă între 0 și $\frac{\pi}{2}$ care răspunde la condiția a) este $\beta = \frac{\pi}{3}$. Avem

$$b = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}; \quad \sin b = \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4};$$

$$\cos b = \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4};$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}; \quad \operatorname{cotg} b = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

594. a) Să se verifice identitatea

$$(1 - \cos a \cos b)^2 - \sin^2 a \sin^2 b = (\cos a - \cos b)^2,$$

apoi să se rezolve ecuația

$$x^2 \sin^2 b - 2x(1 - \cos a \cos b) + \sin^2 a = 0.$$

b) x_1 și x_2 fiind rădăcinile ecuației de mai sus, să se calculeze

$$E = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}},$$

Facultatea de matematică și fixică, București, 1955.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Membrul întîi al identității de demonstrat se pune sub forma

$$1 - 2\cos a \cos b + \cos^2 a \cos^2 b - (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b) =$$
$$= 1 - 2\cos a \cos b + \cos^2 a \cos^2 b - 1 + \cos^2 a + \cos^2 b -$$
$$- \cos^2 a \cos^2 b = (\cos a - \cos b)^2.$$

Rădăcinile ecuației sînt date de formula

$$x_{1,2} = \frac{1 - \cos a \cos b \pm \sqrt{(1 - \cos a \cos b)^2 - \sin^2 a \sin^2 b}}{\sin^2 b}.$$

Ținînd seama de identitatea demonstrată, rezultă

$$x_{1,2} = \frac{1 - \cos a \cos b \pm (\cos a - \cos b)}{\sin^2 b}.$$

Rădăcinile găsite se mai pot scrie

$$x_1 = \frac{1 - \cos a \cos b + \cos a - \cos b}{\sin^2 b} = \frac{(1 - \cos b)(1 + \cos a)}{\sin^2 b} =$$
$$= \frac{4 \sin^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{a}{2}}{4 \sin^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{b}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{b}{2}};$$

$$x_2 = \frac{1 - \cos a \cos b - \cos a + \cos b}{\sin^2 b} = \frac{(1 + \cos b)(1 - \cos a)}{\sin^2 b} =$$
$$= \frac{4 \cos^2 \frac{b}{2} \sin^2 \frac{a}{2}}{4 \sin^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{b}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\sin^2 \frac{b}{2}}.$$

b) În urma rezultatelor obținute la pct. a) putem scrie

$$E = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} = \frac{\frac{\cos \frac{a}{2}}{\cos \frac{b}{2}} - \frac{\sin \frac{a}{2}}{\sin \frac{b}{2}}}{\frac{\cos \frac{a}{2}}{\cos \frac{b}{2}} + \frac{\sin \frac{a}{2}}{\sin \frac{b}{2}}} = \frac{\sin \frac{b - a}{2}}{\sin \frac{b + a}{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

595. Se consideră piramida regulată $VABC$, avînd ca bază un triunghi echilateral ABC înscris în cercul O de rază r. Se notează cu θ măsura unghiului AVB. Se cere:

a) să se calculeze, în funcție de r, latura bazei, muchia laterală, apotema și aria laterală a piramidei, pentru valorile $\theta = 60°$ și $\theta = 90°$;

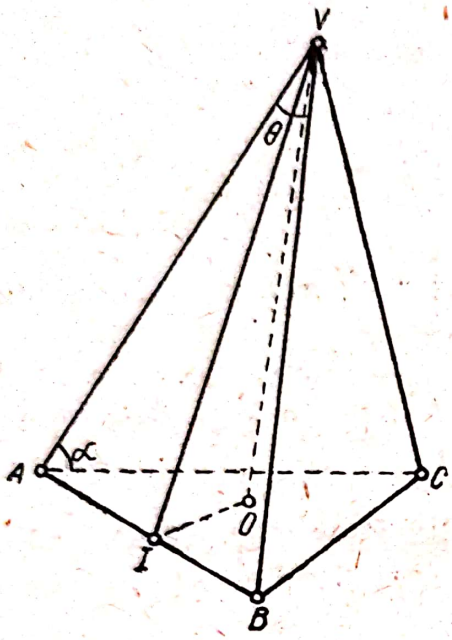


Fig. 213

b) în cazul general, se notează cu α măsura unghiului $\widehat{OAV}$. Să se calculeze $\sin\frac{\theta}{2}$ și $\cos\theta$ cu ajutorul funcțiilor trigonometrice ale lui α;

c) se notează $\cos\theta = y$ și $\cos 2\alpha = x$; se cere să se exprime $\cos\theta$ în funcție de $\cos 2\alpha$, adică y în funcție de x și să se reprezinte grafic variația lui y în funcție de x, cînd α crește de la 0° la 90°.

Facultatea de matematică și fizică. București, 1955,

R. a) Considerăm cazul general cînd $\widehat{AVB} = \theta$ (fig. 213). Latura bazei este $l = r\sqrt{3}$. Dacă ducem apotema piramidei VI, avem $\overline{AI} = \overline{VA}\sin\frac{\theta}{2}$, de unde reiese că muchia are expresia $m = \frac{r\sqrt{3}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$. Apotema piramidei se deduce la fel

$$a = \overline{VI} = \overline{AI}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

Aria laterală a piramidei este $L = \frac{9r^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$. Pentru $\theta = 60°$, avem

$$l = r\sqrt{3};\ m = r\sqrt{3};\ a = \frac{3r}{2};\ L = \frac{9r^2\sqrt{3}}{4};$$

pentru $\theta = 90°$:

$$l = r\sqrt{3};\ m = \frac{r\sqrt{6}}{2};\ a = \frac{r\sqrt{3}}{2};\ L = \frac{9r^2}{4}.$$

La rezultatele din cazurile particulare se poate ajunge și pe cale geometrică. Pentru $\theta = 60°$, triunghiul AVB este echilateral, iar pentru $\theta = 90°$, triunghiul AVB este dreptunghic isoscel.

b) Avem

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\overline{AI}}{\overline{AV}} = \frac{r\sqrt{3}}{2\cdot\overline{AV}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\overline{AO}}{\overline{AV}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$$

și

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \frac{3}{2}\cos^2\alpha.$$

c) Din formula care leagă pe $\cos 2\alpha$ de $\cos\alpha$ și din rezultatele obținute la b), deducem succesiv

$$x = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1}{3}(1 - 4\cos\theta) = \frac{1}{3}(1 - 4y),$$

de unde rezultă

$$y = \frac{1 - 3x}{4}.$$

Cînd α crește de la 0° la 90°, $x = \cos 2\alpha$ descrește de la 1 la -1. Reprezentarea grafică a funcției $y = \frac{1-3x}{4}$ este segmentul de dreaptă care unește punctele $A(-1;1)$ și $B\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ (fig. 214).

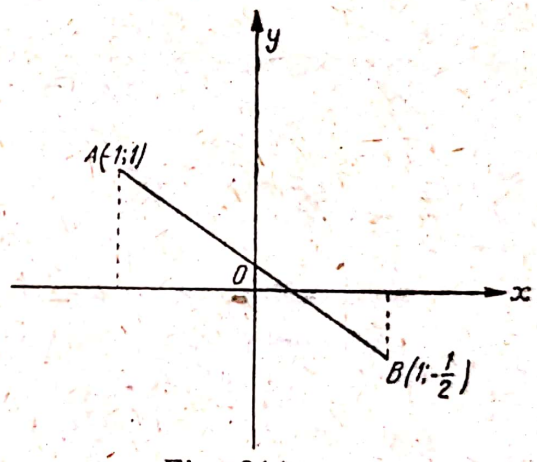


Fig. 214

596. Să se înscrie într-un cerc de rază R un triunghi isoscel care are suma bazei și a înălțimii egală cu l. Să se discute rezultatul arătîndu-se cazul de posibilitate a problemei și numărul soluțiilor. Să se construiască grafic soluțiile.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1955

R. Presupunem problema rezolvată și fie ABC triunghiul isoscel căutat (fig. 215). Prelungim înălțimea AD cu segmentul $\overline{DM} = \overline{BC}$. Conform datelor problemei, avem, prin urmare, $\overline{AM} = l$. Prelungim dreptele MB și MC pînă la întretăierea lor cu tangenta în A, respectiv în punctele E și F. Triunghiul isoscel EFM, fiind asemenea cu BCM, are baza egală cu înălțimea întocmai ca și acesta din urmă. Rezultă deci $\overline{EF} = \overline{AM} = l$.

De aici decurge modul de a construi un triunghi isoscel înscris într-un cerc de rază R, astfel ca suma dintre baza și înălțimea triunghiului să fie o lungime dată l. Într-un punct A de pe cerc se duce o tangentă și diametrul ce trece prin A. De o parte și de alta a punctului A pe tangentă se poartă segmentele $\overline{AE}=\overline{AF}=\frac{l}{2}$, iar pe diametru se ia lungimea $\overline{AM}=l$. Se unește M cu punctele E și F. Dreptele ME și MF taie cercul în celelalte două vîrfuri ale triunghiului căutat. În cazul figurii am obținut două soluții: triunghiurile ABC și $AB'C'$. Să verificăm, de exemplu, că $AB'C'$ corespunde cerințelor problemei. În adevăr, triunghiul isoscel $B'C'M$ este asemenea cu BCM, el are prin urmare baza $B'C'$ egală cu segmentul $\overline{D'M}$. Din egalitatea evidentă $\overline{AD'}+\overline{D'M}=l$, rezultă $\overline{AD'}+\overline{B'C'}=l$. Așadar, triunghiul $AB'C'$ este una din soluțiile problemei.

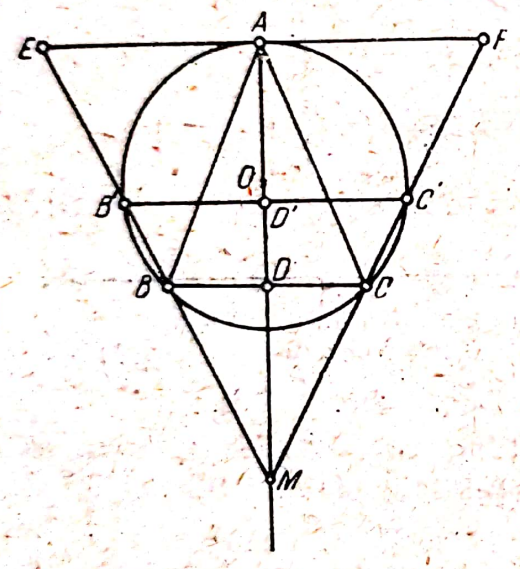


Fig. 215

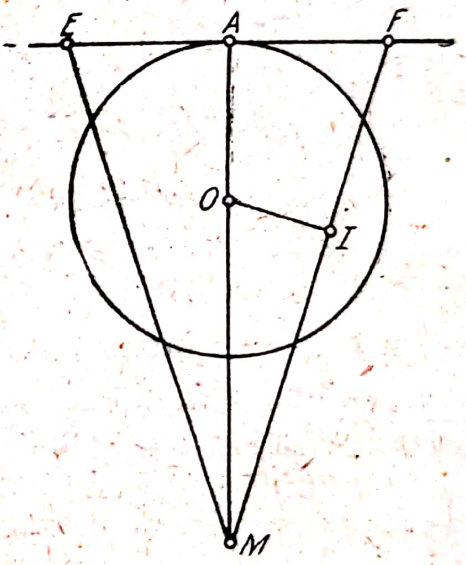


Fig. 216

Discuție. Problema admite două, una sau nici o soluție, după cum dreapta MF este secantă, tangentă sau exterioară cercului. Să stabilim condiția de posibilitate folosind datele problemei. În acest scop, să calculăm distanța OI de la centrul cercului la dreapta MF, în cazul mai general, cînd $\overline{AM}=l$ și $\overline{AF}=a$ (fig. 216).

Din asemănarea triunghiurilor OIM și AFM, rezultă

$$\overline{OI}=\overline{AF}\cdot\frac{\overline{OM}}{\overline{MF}}=a\,\frac{l-R}{\sqrt{l^2+a^2}}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\overline{OI} - R = \left(1 + \frac{a}{\sqrt{l^2 + a^2}}\right)\left[\frac{a}{l}\left(\sqrt{l^2 + a^2} - a\right) - R\right].$$

Dacă $\frac{a}{l}(\sqrt{l^2 + a^2} - a) < R$, atunci $\overline{OI} < R$; MF intersectează cercul în două puncte distincte.

Dacă $\frac{a}{l}(\sqrt{l^2 + a^2} - a) = R$, MF atinge cercul într-un singur punct.

Dacă $\frac{a}{l}(\sqrt{l^2 + a^2} - a) > R$, MF este exterioară cercului.

În cazul problemei dată spre rezolvare, avem $a = \frac{l}{2}$, iar

$$\frac{a}{l}(\sqrt{a^2 + l^2} - a) = l\frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{l}{\sqrt{5} + 1}.$$

Pe baza celor spuse mai sus rezultă:

dacă $l < R(\sqrt{5} + 1)$, problema admite două soluții;

dacă $l = R(\sqrt{5} + 1)$, problema admite o soluție;

dacă $l > R(\sqrt{5} + 1)$, problema este imposibilă.

597. Pe un plan orizontal (H) se așază o sferă de rază R_1 și un con cu raza bazei R_2 și înălțimea $2R_1$.

a) La ce distanță x de planul (H) trebuie dus un plan (P) paralel cu planul (H), astfel ca secțiunile în sferă și în con să fie egale? Caz particular $R_1 = R_2$.

b) La ce distanță x de planul (H) trebuie dus un plan (P) pentru ca aria calotei determinată în sferă să fie egală cu aria laterală a trunchiului de con determinat în con? Caz particular, $R_1 = R_2$.

Institutul politehnic, București, 1955.

R. a) Fie $\overline{DB} = r_1$ o rază a secțiunii în sferă la distanță x și $\overline{MN} = r_2$ o rază a secțiunii în con la aceeași distanță de planul (H) (fig. 217). Ducem diametrul CA perpendicular pe planul (H), în sferă, și înălțimea VMP și generatoarea VNQ, în con. În triunghiul dreptunghic ABC avem

$$\overline{DB}^2 = \overline{DA} \cdot \overline{DC},$$

ceea ce dă

$$r_1^2 = x\,(2R_1 - x).$$

Din asemănarea triunghiurilor VMN și VPQ, deducem

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{VM}}{\overline{VP}} \text{ sau } \frac{r_2}{R_2} = \frac{2R_1 - x}{2R_1},$$

de unde rezultă

$$r_2 = \frac{R_2\,(2R_1 - x)}{2R_1}.$$

Pentru ca secțiunile circulare la distanța x să fie egale, este necesar să avem

$$r_1 = r_2,$$

adică

$$\sqrt{x\,(2R_1 - x)} = \frac{R_2\,(2R_1 - x)}{2R_1},$$

care dă soluțiile

$$x = 2R_1 \quad \text{și} \quad x = \frac{2R_1R_2^2}{4R_1^2 + R_2^2}.$$

Prima soluție corespunde cazului banal cînd secțiunile în sferă și con sînt reduse la cîte un punct. A doua soluție este aceea care prezintă un interes. Pentru cazul particular $R_2 = R_1$, această soluție devine:

$$x = \frac{2}{5}R_1.$$

b) Aria calotei este $C = 2\pi R_1 x$. Pentru a afla și aria laterală a trunchiului de con, avem nevoie de generatoarea acestuia, $\overline{NQ}$. Din asemănarea triunghiurilor VMN și VPQ deducem

$$\overline{NQ} = \frac{x}{2R_1}\sqrt{R_2^2 + 4R_1^2}.$$

Aria laterală a trunchiului de con este

$$T = \frac{\pi R_2\sqrt{R_2^2 + 4R_1^2}}{4R_1^2} \cdot x\,(4R_1 - x).$$

Scriind egalitatea celor două arii, obținem pentru x soluția banală $x = 0$ și soluția

$$x = 4R_1\left[1 - \frac{2R_1^2}{R_2\sqrt{R_2^2 + 4R_1^2}}\right].$$

Pentru cazul particular, $R_2 = R_1$, avem

$$x = \frac{4}{5}(5 - 2\sqrt{5})\, R_1.$$

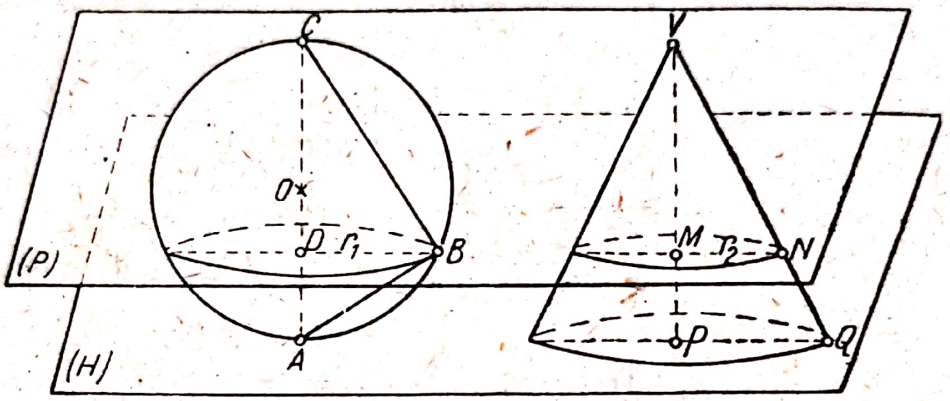


Fig. 217

598. a) Să se rezolve ecuația $\sin^2 x + \cos 2x = \frac{3}{4}$.

b) Dacă m este un parametru variabil, să se determine valorile lui m pentru ca ecuația

$$x^2 + (m - 1)\, x + m^2 - 3m + 1 = 0$$

să admită rădăcini reale simple, respectiv o rădăcină dublă.

Institutul politehnic, Iași, 1961.

R. a) Ecuația dată se scrie $\frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2x) + \cos 2x = \frac{3}{4}$ sau $\cos 2x = \frac{1}{2}$. Soluția generală este $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$, unde k este un întreg oarecare.

b) Realizantul ecuației este

$$R = -3m^2 + 10m - 3 = -3\left(m - \frac{1}{3}\right)(m - 3),$$

de unde rezultă că pentru a avea rădăcini reale simple, trebuie să avem $\frac{1}{3} < m < 3$ și rădăcini duble atunci cînd m este egal cu $\frac{1}{3}$ sau 3.

599. Se consideră, polinomul în x.

$$P(x) = x^4 - 2ax^2 + b.$$

a) Ce devine polinomul pentru $x_1 = \sqrt{\frac{a+\sqrt{b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{b}}{2}}$?

b) Pentru ce valori ale lui x, se anulează polinomul?

c) Să se verifice identitatea

$$\frac{\cos(a+b)\cdot\cos(a-b)}{\cos^2 a\cdot\cos^2 b} = 1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b.$$

Institutul de mine, Petroşeni, 1959.

R. a) Avem $x_1^2 = a + \sqrt{a^2 - b}$ şi $x_1^4 = 2a^2 - b + 2a\sqrt{a^2 - b}$, de unde rezultă că

$$P(x_1) = 2a^2 - b + 2a\sqrt{a^2-b} - 2a(a+\sqrt{a^2-b}) + b = 0.$$

b) Din $x^2 = a \pm \sqrt{a^2 - b}$, deducem că cele patru rădăcini ale ecuaţiei, sînt

$$\pm\sqrt{a-\sqrt{a^2-b}}, \pm\sqrt{a+\sqrt{a^2-b}}.$$

c) Înmulţind, direct, $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a\cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b$, obţinem

$$\frac{\cos(a+b)\cos(a-b)}{\cos^2 a\cos^2 b} = \frac{\cos^2 a\cos^2 b}{\cos^2 a\cos^2 b} - \frac{\sin^2 a\sin^2 b}{\cos^2 a\cos^2 b} = 1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b.$$

600. a) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

b) Să se rezolve ecuaţia

$$\sin 2x + \sin x + \cos x + 1 = 0.$$

Institutul politehnic, Bucureşti, 1960.

R. a) Notînd $x + y = u$, $xy = v$, sistemul de rezolvat devine

$$\begin{cases} uv = 30, \\ 6u - 5v = 0, \end{cases}$$

care are soluțiile $(u = 5;\ v = 6)$, $(u = -5;\ v = -6)$. Acestora le corespund soluțiile sistemului dat

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -6. \\ y = 1. \end{cases}$$

b) Ecuația dată se scrie

$$(\sin x + \cos x) + (\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) = 0$$

sau

$$(\sin x + \cos x) \cdot (1 + \sin x + \cos x) = 0$$

care se descompune în ecuațiile

$$\sin x + \cos x = 0 \quad (1) \quad \text{și} \quad \sin x + \cos x = -1 \quad (2)$$

Ecuația (1) are soluția generală $x' = \frac{(2n+1)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, iar (2), soluțiile $x'' = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$ și $x''' = (2n+1)\pi$.

601. Se consideră ecuația

$$2(2m + 3)\, x^2 + (2m^2 + 5m + 5)\, x + m + 1 = 0.$$

a) Să se arate că are rădăcini raționale și să se rezolve.
b) Să se determine valorile lui m pentru care ecuația de mai sus admite soluții dacă $x = \sin y$.
c) Care sînt valorile lui y pentru $m = -2$.

Institutul de mine, București, 1955.

R. a) Discriminantul ecuației este

$$\Delta = (2m^2 + 5m + 5)^2 - 8(m + 1)\,(2m + 3) =$$

$$= 4m^4 + 20m^3 + 29m^2 + 10m + 1 = (2m^2 + 5m + 1)^2.$$

Expresia lui Δ fiind un pătrat perfect, rezultă că rădăcinile sînt raționale

$$x_1 = \frac{-(2m^2 + 5m + 5) + (2m^2 + 5m + 1)}{4(2m + 3)} = -\frac{1}{2m + 3};$$

$$x_2 = \frac{-(2m^2 + 5m + 5) - (2m^2 + 5m + 1)}{4\,(2m + 3)} = \frac{-(2m^2 + 5m + 3}{2\,(2m + 3)} =$$

$$= \frac{-(2m + 3)\,(m + 1)}{2\,(2m + 3)} = -\frac{m + 1}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă punem $x = \sin y$, arcele y_1 și y_2 sînt date de ecuațiile

$$\sin y_1 = x_1 = -\frac{1}{2m+3} \quad \text{și} \quad \sin y_2 = x_2 = -\frac{m+1}{2}.$$

Pentru ca y_1 să existe, este necesar să avem

$$-1 \leqslant -\frac{1}{2m+3} \leqslant 1,$$

ceea ce implică să avem împlinite simultan inecuațiile

$$1 - \frac{1}{2m+3} \geqslant 0 \quad \text{și} \quad 1 + \frac{1}{2m+3} \geqslant 0,$$

sau

$$\frac{2(m+1)}{2m+3} \geqslant 0 \quad \text{și} \quad \frac{2(m+2)}{2m+3} \geqslant 0.$$

Inegalitățile sînt verificate simultan dacă avem

$$m \leqslant -2 \quad \text{sau} \quad m \geqslant -1.$$

Pentru ca y_2 să existe, trebuie să avem

$$-1 \leqslant -\frac{m+1}{2} \leqslant 1,$$

sau, în același timp, $\frac{m+1}{2} - 1 \leqslant 0$ și $\frac{m+1}{2} + 1 \geqslant 0$, care sînt verificate pentru valorile lui m:

$$-3 \leqslant m \leqslant 1.$$

Ajungem la concluzia că y_1 și y_2 există cînd m îndeplinește condițiile

$$-3 \leqslant m \leqslant -2 \quad \text{sau} \quad -1 \leqslant m \leqslant 1.$$

c) Pentru $m = -2$ avem

$$\sin y_1 = 1 \quad \text{și} \quad \sin y_2 = \frac{1}{2},$$

iar expresiile arcelor y_1 și y_2 sînt date de

$$y_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$y_2' = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad y_2'' = 2k\pi + \frac{5\pi}{6},$$

unde k este un întreg oarecare, pozitiv sau negativ

Scanned with OKEN Scanner

602. Într-un con de rază r, a cărui generatoare face cu înălțimea un unghi α, se înscrie un cilindru. Să se afle volumul cilindrului, știind că raportul dintre ariile laterale a cilindrului și a conului este $\frac{1-k^2}{2}\cos\alpha$.

Institutul de petrol și gaze, București, 1955,

R. Notăm raza și înălțimea cilindrului înscris în con cu x și y. Generatoarea VB a conului (fig. 218) se află din egalitatea $r = \overline{VB}\sin\alpha$, iar înălțimea din $\overline{VI} = r\operatorname{ctg}\alpha$.

Scriem ecuațiile care dau dimensiunile cilindrului

$$\frac{2\pi xy}{\pi r\cdot\frac{r}{\sin\alpha}} = \frac{1-k^2}{2}\cdot\cos\alpha$$

și

$$\frac{\overline{MD}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{VM}}{\overline{VI}} \quad \text{sau} \quad \frac{x}{r} = \frac{r\operatorname{ctg}\alpha - y}{r\operatorname{ctg}\alpha}.$$

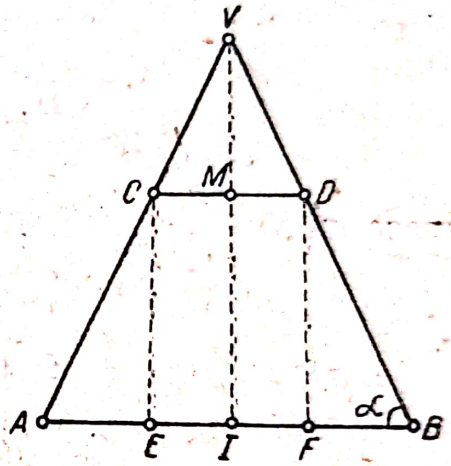


Fig. 218

Din a doua relație deducem

$$y = (r - x)\operatorname{ctg}\alpha,$$

pe care o introducem în prima și obținem ecuația care dă pe x

$$4x^2 - 4rx + (1-k^2)r^2 = 0,$$

de unde

$$x = \frac{r(1\pm k)}{2}$$

și deci

$$y = \frac{r(1\mp k)}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Volumul cilindrului are, așadar, valoarea

$$V = \pi x^2 y = \pi xy\cdot x = \frac{\pi r^2(1-k^2)}{4}\operatorname{ctg}\alpha\cdot\frac{r(1\pm k)}{2} =$$

$$= \frac{\pi r^3}{8}(1-k^2)(1\pm k)\operatorname{ctg}\alpha.$$

Celor două soluții ale problemei le corespund, respectiv, volumele

$$V_1 = \frac{\pi r^3}{8}(1+k)^2(1-k)\operatorname{ctg}\alpha \text{ și } V_2 = \frac{\pi r^3}{8}(1-k)^2(1+k)\operatorname{ctg}\alpha.$$

603. O sferă este înscrisă într-un con al cărui unghi ASB este egal cu 2α. Se consideră solidul cuprins între partea superioară a suprafeței sferei și aceea a conului.

I) Să se calculeze în funcție de raza R a sferei și de unghiul α: a) volumul acestui solid; b) aria totală a acestui solid.

II) Să se determine unghiul α astfel ca raportul dintre pătratul ariei totale a solidului și volumul acestuia să fie egal cu $36\pi R$.

Institutul de petrol și gaze, București, 1955.

R. I. a) Considerăm secțiunea axială prin con și sferă (fig. 219). Pentru rezolvarea problemei, calculăm elementele necesare pentru exprimarea volumului și a ariei totale.

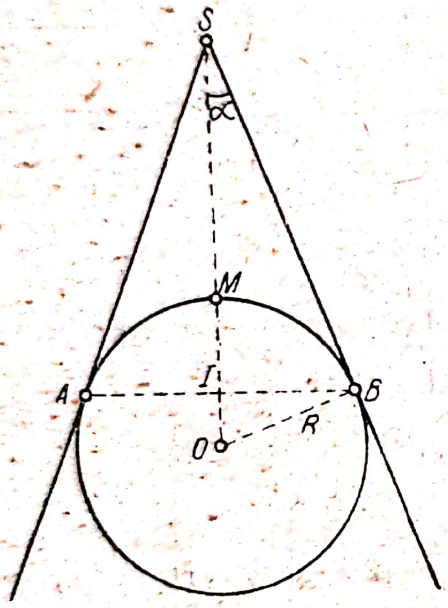


Fig. 219

Raza bazei, înălțimea și generatoarea conului tangent sînt

$$\overline{IB} = R\cos\alpha;\ \overline{SI} = \overline{IB}\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{R\cos^2\alpha}{\sin\alpha},\ \overline{SB} = R\ \operatorname{ctg}\alpha.$$

Înălțimea calotei sferice AMB este

$$\overline{IM} = \overline{OM} - \overline{OI} = R - R\sin\alpha = R(1-\sin\alpha).$$

Volumul părții corespunzătoare secțiunii $SAMB$ se obține scăzînd din volumul conului SAB pe acela al calotei AMB. Avem

$$V = \frac{\pi\overline{IB}^2\cdot\overline{IS}}{3} - \frac{\pi\overline{IM}^2(3R-\overline{IM})}{3}.$$

Înlocuind $\overline{IB}$, $\overline{IS}$, $\overline{IM}$ cu expresiile în funcție de R și α aflate mai sus, avem

$$V = \frac{\pi R^2\cos^2\alpha\cdot\dfrac{R\cos^2\alpha}{\sin\alpha}}{3} - \frac{\pi R^3(1-\sin\alpha)^2(2+\sin\alpha)}{3} =$$

$$= \frac{\pi R^3(1-\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha}.$$

b) Aria totală a corpului este formată din aria laterală a conului la care se adaugă aria calotei

$$A=\pi\cdot\overline{IB}\cdot\overline{SB}+2\pi R\cdot\overline{IM}=\pi R\cos\alpha\cdot R\operatorname{ctg}\alpha+2\pi R\cdot R(1-\sin\alpha)=$$

$$=\frac{\pi R^2(1-\sin\alpha)(1+3\sin\alpha)}{\sin\alpha}.$$

II. Ecuația care dă unghiul α este

$$\frac{(\text{aria})^2}{\text{volum}}=36\pi R$$

sau

$$\frac{\pi^2R^4(1-\sin\alpha)^2(1+3\sin\alpha)^2}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{3\sin\alpha}{\pi R^3(1-\sin\alpha)^2}=36\pi R.$$

După simplificări și reduceri, ajungem la ecuația

$$9\sin^2\alpha-6\sin\alpha+1=0$$

cu soluția

$$\sin\alpha=\frac{1}{3},\ \text{adică}\ \alpha=19°28'16''.$$

604. Se consideră un con circular drept cu raza bazei R și înălțimea H; cu centrul în vîrful conului se descrie o sferă de rază $r(r<H)$. Se suprimă porțiunea din suprafața sferei cuprinsă în interiorul conului și porțiunea din suprafața conului cuprinsă în interiorul sferei și se obține astfel corpul din fig. 220.

a) Se cere aria acestui corp (fără aria bazei conului).

b) Presupunînd cunoscută generatoarea G a conului și raza R a lui, precum și aria πa^2 a corpului de mai sus, să se găsească raza sferei precum și condiția de posibilitate a problemei.

Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1955.

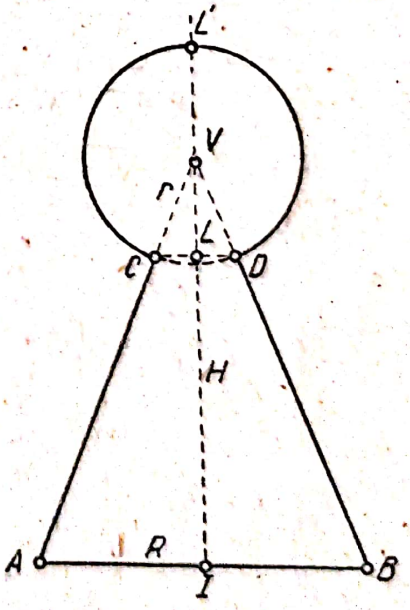


Fig. 220

R. a) Fiind date raza R și înălțimea H ale conului precum și r raza sferei, putem determina, cu ajutorul

acestora alte elemente necesare pentru a răspunde la problemă. Astfel, generatoarea G a conului este egală cu $\sqrt{R^2 + H^2}$, iar raza CL a secțiunii determinată de sferă în con precum și distanța $\overline{VL}$ de la centrul sferei la această secțiune se determină din considerarea triunghiurilor asemenea VCL și VAI. Avem

$$\frac{\overline{CL}}{R} = \frac{\overline{VL}}{H} = \frac{r}{G},$$

de unde rezultă

$$CL = \frac{Rr}{G} \quad \text{și} \quad \overline{VL} = \frac{Hr}{G}.$$

Înălțimea calotei $L'L$ este egală cu

$$\overline{L'L} = \overline{VL} + \overline{L'V} = \frac{Hr}{G} + r = \frac{r(H+G)}{G}.$$

Aria calotei de înălțime $L'L$ va fi deci

$$2\pi r \cdot \overline{L'L} = \frac{2\pi r^2 (H+G)}{G},$$

iar aria laterală a trunchiului de con este

$$\pi \overline{AC}\,(\overline{CL} + \overline{AI}) = \pi (G - r)\left(\frac{Rr}{G} + R\right) = \frac{\pi R (G^2 - r^2)}{G}.$$

Aria corpului (fără baza conului) devine în acest caz

$$A = \frac{2\pi r^2 (H+G)}{G} + \frac{\pi R (G^2 - r^2)}{G} = \frac{\pi [R(G^2 - r^2) + 2r^2(H+G)]}{G},$$

unde $G = \sqrt{R^2 + H^2}$.

b) Presupunînd cunoscute G, R și aria corpului $A = \pi a^2$, să determinăm raza sferei r și condiția de posibilitate a problemei.

În condițiile noi, formula găsită mai sus pentru A devine

$$\frac{\pi [R(G^2 - r^2) + 2r^2(H+G)]}{G} = \pi a^2.$$

Această ecuație rezolvată în raport cu r ne dă

$$r = \sqrt{\frac{G(a^2 - RG)}{(2G - R) + 2\sqrt{G^2 - R^2}}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca r să fie real este necesar să avem

$$RG < a^2;$$

aceasta constituie condiția de posibilitate a problemei pe lîngă aceea dată prin problemă, ca $r < H$.

605. Fie a, b, c trei numere reale.

a) Să se demonstreze inegalitatea

$$3a^2 + 2(b + c)\, a + 3b^2 + 3c^2 - 2bc \geqslant 0 \qquad (1)$$

și să se arate că semnul egal este posibil numai dacă $a=b=c=0$.

b) Punînd apoi $a = \cos u$, $b = \sin u$, $c = \operatorname{tg} u$, să se deducă inegalitatea

$$3 + \sin 2u + 2 \sin u + \frac{(3 - 2\cos u)\, \sin^2 u}{\cos^2 u} \geqslant 0, \qquad (2)$$

valabilă pentru orice u pentru care $\cos u \neq 0$. Este posibil ca inegalitatea (2) să devină o egalitate?

Institutul politehnic, Iași, 1955.

R. a) Expresia din membrul întîi poate fi considerată ca un trinom de gradul al doilea în a. Discriminantul acestui trinom este

$$\Delta = (b + c)^2 - 3(3b^2 + 3c^2 - 2bc) = -8(b^2 - bc + c^2),$$

sau

$$\Delta = -8\left[\left(b - \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{3c^2}{4}\right].$$

Scris sub această formă, se vede că discriminantul este negativ pentru orice valoare reală a lui b și c, și, prin urmare, trinomul este de același semn cu coeficientul lui a^2, adică pozitiv, pentru orice valoare reală a lui a, ceea ce trebuie demonstrat.

Pentru ca expresia din membrul întîi să fie nulă, trebuie ca și discriminantul să fie nul, pentru că altfel, a, care se exprimă cu ajutorul acestui discriminant, ar fi un număr complex.

Discriminantul este nul dacă $b=c=0$ și atunci rezultă $a=0$.

b) Înlocuind $a=\cos u$, $b=\sin u$ și $c=\operatorname{tg} u$, obținem inegalitatea

$$3\cos^2 u + 2(\sin u + \operatorname{tg} u)\cos u + 3\sin^2 u + 3\operatorname{tg}^2 u - 2\sin u \operatorname{tg} u \geqslant 0,$$

care se mai scrie și astfel

$$3(\cos^2 u + \sin^2 u) + 2\sin u \cos u + 2\sin u + \frac{(3 - 2\cos u)\, \sin^2 u}{\cos^2 u} \geqslant 0,$$

sau

$$3 + \sin 2u + 2\sin u + \frac{(3-2\cos u)\sin^2 u}{\cos^2 u} \geqslant 0.$$

Ca să avem egalitate, ar trebui ca $a=b=c=0$, conform cu cele spuse mai sus. Aceasta implică să avem simultan $\sin u = \cos u = \operatorname{tg} u = 0$, dar un astfel de arc u nu există.

606. Se consideră două conuri circulare drepte C și c avînd vîrful V comun și planurile bazelor P și p paralele între ele. Știind că pentru conurile considerate valorile numerice (exprimate în metri) ale razelor R și r și ale înălțimilor I și i satisfac sistemul de ecuații

$$\left.\begin{aligned} 3R - 5I + 2r + 4i &= 0 \\ 2R - I \quad\quad - i &= 0 \\ R + 2I - 7r \quad\quad &= 1 \\ 3I + 4r - 9i &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Se cere: a) să se determine soluția sistemului (1) eliminînd necunoscuta i din ecuația a doua;

b) să se verifice că generatoarele conurilor fac același unghi cu înălțimile corespunzătoare;

c) să se calculeze diferența volumelor conurilor C și c precum și ariile laterale ale lor;

d) să se calculeze cu aproximație pînă la 0,001, raza unui al treilea con circular drept avînd înălțimea $I - i$ și volumul egal cu diferența volumelor conurilor C și c.

Institutul politehnic, Iași, 1955.

R. a) Adunînd la prima ecuație pe o doua înmulțită cu 4, scăzînd din a patra pe a doua înmulțită cu 9 și simplificînd rezultatul cu 2, obținem sistemul

$$\left\{\begin{aligned} 11R - 9I + 2r &= 0 \\ R + 2I - 7r &= 1 \\ -9R + 6I + 2r &= 0. \end{aligned}\right.$$

Eliminînd pe r între prima și a treia, apoi între a doua și a treia, deducem

$$\left\{\begin{aligned} 20R - 15I &= 0 \\ -61R + 46I &= 2. \end{aligned}\right.$$

Acest sistem are soluția

$$R = 6; \quad I = 8.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind R și I în ecuațiile anterioare, obținem

$$r = 3; \quad i = 4.$$

b) Dacă notăm cu α unghiul generatoarelor conului mare cu înălțimea și cu β unghiul generatoarelor conului mic cu înălțimea sa, avem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{I} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ și } \operatorname{tg}\beta = \frac{r}{i} = \frac{3}{4},$$

de unde rezultă $\alpha = \beta$.

c) Volumul conului mare este

$$C = \frac{\pi R^2 I}{3} = \frac{\pi \cdot 36 \cdot 8}{3} = 96\pi.$$

Volumul conului mic este

$$c = \frac{\pi r^2}{3} = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 4}{3} = 12\pi.$$

Ariile laterale ale celor două conuri sînt, respectiv, egale cu

$$A = \pi RG = \pi \cdot 6\sqrt{6^2 + 8^2} = 60\pi$$

și

$$a = \pi rg = \pi \cdot 3\sqrt{3^2 + 4^2} = 15\pi.$$

d) Dacă x este raza conului avînd volumul $C - c$ și înălțimea $I - i$, trebuie să avem

$$\frac{\pi x^2 (I - i)}{3} = C - c,$$

de unde rezultă $x = \sqrt{63} \approx 7{,}93725$.

607. Se dă piramida $SABCD$ cu baza un pătrat, avînd muchia SA perpendiculară pe baza $ABCD$. Fie $\overline{AB} = a$, $\overline{AS} = h$ și M un punct variabil pe muchia SA. Să notăm cu x distanța punctului M la baza piramidei. Să se intersecteze piramida cu un plan trecînd prin M și paralel cu baza și să se înscrie în piramidă o prismă dreaptă cu înălțimea x.

a) Să se exprime aria laterală L a prismei în funcție de x.

b) Care este poziția punctului M pentru care L este maxim, dacă $a = 1$, $h = 2$.

Facultatea de chimie, Cluj, 1955.

R. a) Secțiunea paralelă cu baza dusă prin M fiind un pătrat, să calculăm latura acestuia.

Din asemănarea triunghiurilor SMN și SAB (fig.221), rezultă

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SM}}{\overline{SA}} \text{ sau } \frac{\overline{MN}}{a} = \frac{h-x}{h},$$

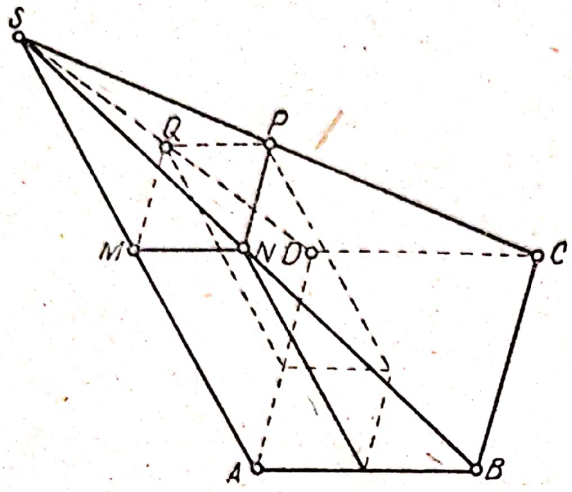


Fig. 221

deci

$$\overline{MN} = \frac{a(h-x)}{h}.$$

Aria laterală L a prismei înscrisă în piramidă, având ca bază secțiunea dusă prin M, are valoarea

$$L = \frac{4a}{h} x(h-x) = \frac{4a}{h} y,$$

unde am notat cu

$$y = x(h-x).$$

b) Aria laterală L va fi maximă atunci cînd expresia variabilă $y = x(h-x)$ va fi maximă. Putem scrie

$$y = -x^2 + hx = \frac{h^2}{4} - \left(x - \frac{h}{2}\right)^2.$$

Se vede că $y \leqslant \frac{h^2}{4}$. Valoarea maximă a ariei laterale este atinsă atunci cînd $x - \frac{h}{2} = 0$, adică atunci cînd M se află la mijlocul distanței dintre S și A.

608. O placă de bronz (greutatea specifică $= 8\,800$ kg/m³) trebuie să aibă forma unui triunghi dreptunghic BAC, cu ipotenuza $a = 24$ cm și lungimea bisectoarei din A, $d = 7\sqrt{2}$ cm. Să se determine laturile b și c precum și greutatea plăcii, știind că grosimea ei este de 5 mm (se vor determina întîi necunoscutele $X = b + c$, $Y = bc$). Verificarea soluțiilor. Generalizîndu-se problema la cazul unor dimensiuni a și d oarecare, să se precizeze condițiile în care problema admite o soluție.

Institutul de industrii alimentare, Galați 1955.

R. Considerăm cazul general cînd lungimea bisectoarei date este d, iar ipotenuza a. Proiectăm piciorul M al bisectoarei în

Scanned with OKEN Scanner

punctele D și E de pe catete (fig.222). Patrulaterul $ADME$ fiind un pătrat a cărui diagonală este d rezultă că lungimea laturii este $\overline{AE} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$. Avem

$$\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} = b - \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

Scriem proporționalitatea laturilor triunghiurilor asemenea MEC, ABC;

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{ME}}{\overline{BA}}$$

sau

$$\frac{b - \frac{d\sqrt{2}}{2}}{b} = \frac{\frac{d\sqrt{2}}{2}}{c} = \frac{\left(b - \frac{d\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{d\sqrt{2}}{2}}{b + c} = \frac{b}{b + c},$$

de unde rezultă

$$\frac{bc}{b + c} = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

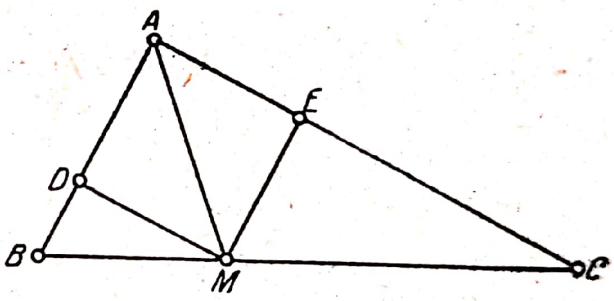


Fig. 222

Această relație împreună cu

$b^2 + c^2 = (b + c)^2 - 2bc = a^2$

formează sistemul care ne dă

pe b și c. Pentru rezolvare, punem $b + c = X$ și $bc = Y$. Sistemul devine

$$\frac{Y}{X} = \frac{d\sqrt{2}}{2} \text{ și } X^2 - 2Y = a^2.$$

Înlocuind $Y = \frac{d\sqrt{2}}{2} X$ în ecuația a doua, obținem

$$X^2 - (d\sqrt{2})\, X - a^2 = 0,$$

care admite două rădăcini reale dintre care una pozitivă și singura convenabilă

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[d + \sqrt{d^2 + 2a^2}\right],$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă și

$$Y = \frac{d}{2}\left[d + \sqrt{d^2 + 2a^2}\right].$$

Laturile b și c sînt date de rădăcinile ecuației

$$Z^2 - XZ + Y = 0.$$

Problema este posibilă numai dacă discriminantul

$$\Delta = X^2 - 4Y \geqslant 0,$$

pentru că, în acest caz, ecuația în Z are rădăcini reale, ambele pozitive. Avem

$$\Delta = X^2 - 4Y = X^2 - 4\,\frac{d\sqrt{2}}{2}\,X = X\left[X - 2d\sqrt{2}\right].$$

Pentru ca $\Delta \geqslant 0$, este necesar ca $X \geqslant 2d\sqrt{2}$, ceea ce ne dă condiția de posibilitate a problemei $a \geqslant 2d$.

În cazul numeric dat la începutul problemei, avem

$$d = 7\sqrt{2} \text{ cm și } a = 24 \text{ cm}.$$

Folosind formulele stabilite mai sus pentru cazul general, obținem

$$b + c = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[d + \sqrt{d^2 + 2a^2}\right] = 32$$

și

$$bc = \frac{d\sqrt{2}}{2}\,X = 7 \cdot 32 = 224.$$

Ecuația care dă pe b și c este

$$Z^2 - 32Z + 224 = 0,$$

ale cărei soluții sînt

$$Z_1 = b = 16 + 4\sqrt{2} \text{ și } Z_2 = c = 16 - 4\sqrt{2}.$$

Verificare:

$$(16 + 4\sqrt{2})^2 + (16 - 4\sqrt{2})^2 = 16\left[16 + 8\sqrt{2} + 2 + 16 - 8\sqrt{2} + 2\right] =$$
$$= 16 \cdot 36 = (4 \cdot 6)^2 = 24^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a obține greutatea plăcii de bronz, calculăm volumul prismei care are ca bază triunghiul cu catetele b și c și ca înălțime grosimea de 5 mm

$$V = \frac{bc}{2} \cdot g = \frac{224}{2} \cdot 0{,}5 = 56 \text{ cm}^3;$$

deci greutatea G a plăcii, în grame, va fi

$$G = 56 \times 8{,}8 = 492{,}8 \text{ g}.$$

609. O piramidă regulată pătrată are latura bazei $4a$. Ea este circumscrisă unei sfere cu raza a. Să se afle volumul piramidei.

Institutul tehnic, Craiova, 1955.

R. Considerăm ABC o secțiune în piramidă, ce trece prin axă și este perpendiculară pe două laturi opuse ale bazei. Secțiunea în sferă este cercul O tangent laturilor triunghiului (fig. 223). Notăm înălțimea piramidei cu x și ducem OT raza la punctul de tangență T. Din asemănarea triunghiurilor AOT și APC, rezultă

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{PC}} \text{ sau } \frac{x-a}{\sqrt{x^2+4a^2}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Ecuația obținută devine, după eliminarea numitorilor și ridicarea la pătrat,

$$(2x - 2a)^2 = 4a^2 + x^2,$$

care admite soluțiile $x = 0$ și $x = \frac{8a}{3}$.

Numai ultima soluție este acceptabilă. Având înălțimea piramidei $\overline{AP} = \frac{8a}{3}$, volumul cerut va fi

$$V = \frac{16a^2 \cdot \frac{8a}{3}}{3} = \frac{128a^3}{9}.$$

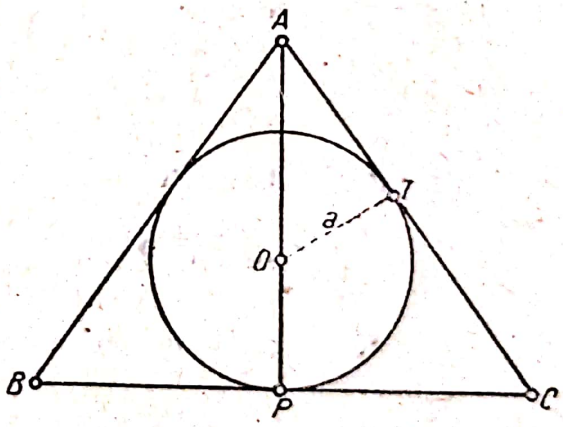


Fig. 223

610. Se așază pe un plan orizontal P o sferă de rază R și un con drept de rază R și înălțimea $2R$. La ce distanță x de planul P trebuie dus un plan orizontal Q pentru ca volumul segmentului sferic cuprins între planele P și Q să fie egal de n ori volumul trunchiului de con cuprins între aceleași plane. Pentru ce valori ale lui n problema este posibilă?

Institutul tehnic, Craiova, 1955.

Scanned with OKEN Scanner

R. Să considerăm secțiunea unui plan dus prin axa conului și centrul sferei (fig. 224) format de cercul O și triunghiul ABC. Notăm cu x distanța de la planul dat, paralel cu baza conului, pînă la planul orizontal care trebuie dus, și prin $MNEF$ linia de intersecție a acestuia din urmă cu planul dus prin axa conului și centrul sferei.

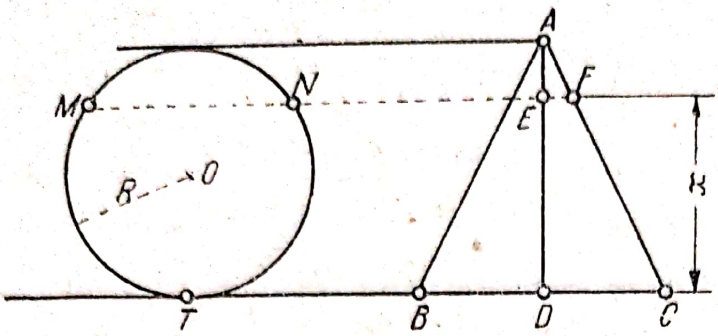


Fig. 224

Pentru a calcula volumul trunchiului de con, avem nevoie și de $\overline{EF} = r$ raza mică a trunchiului de con. Din asemănarea triunghiurilor AEF și ADC deducem

$$\frac{r}{R} = \frac{2R - x}{2R},$$

de unde rezultă

$$r = R - \frac{x}{2}.$$

Volumul calotei MTN este dat de formula

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 (3R - x).$$

Volumul trunchiului de con are expresia

$$V = \frac{\pi x}{3}\left[R^2 + \left(R - \frac{x}{2}\right)^2 + R\left(R - \frac{x}{2}\right)\right].$$

Ecuația problemei este deci

$$\frac{1}{3}\pi x^2(3R - x) = n\frac{\pi x}{3}\left[R^2 + \left(R - \frac{x}{2}\right)^2 + R\left(R - \frac{x}{2}\right)\right].$$

Prin simplificare cu x se pierde soluția $x = 0$ nesemnificativă. Celelalte soluții sînt date de ecuația

$$(n + 4)x^2 - 6R(n + 2)x + 12nR^2 = 0,$$

care admite soluțiile

$$x_{1,2} = \frac{R}{n + 4}\left[3(n + 2) \pm \sqrt{-3(n^2 + 4n - 12)}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca problema să fie posibilă, trebuie să avem

$$n^2 + 4n - 12 \leqslant 0.$$

Inegalitatea este satisfăcută de valorile lui n pentru care avem

$$-6 \leqq n \leqslant 2.$$

Pentru că n este un număr pozitiv trebuie să avem numai

$$0 \leqslant n \leqslant 2.$$

611. În trapezul isoscel $ABCD$ se dă baza mică $\overline{AB} = 2a$, baza mare $\overline{CD} = 8a$ și laturile neparalele $\overline{AD} = \overline{BC} = 5a$. Fie O punctul de întîlnire a diagonalelor $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ și unghiul $AOB = \varphi$. Să se calculeze $\sin \varphi$.

Facultatea de chimie industrială, București, 1957.

R. Înălțimea trapezului (fig. 225) este dată de

$$\overline{AI} = \sqrt{\overline{(5a)^2 - \left(\frac{8a - 2a}{2}\right)^2}} = 4a,$$

iar lungimea comună a diagonalelor, de expresia

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{(4a)^2 + (5a)^2}} = a\sqrt{41}.$$

Exprimînd aria trapezului în două moduri, obținem relația care ne dă $\sin \varphi$.

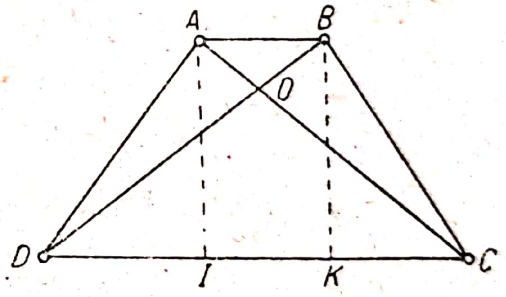


Fig. 225

$$\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD} \sin \varphi}{2} = \frac{(\overline{DC} + \overline{AB}) \cdot \overline{AI}}{2}.$$

Rezultă

$$\sin \varphi = \frac{(\overline{DC} + \overline{AB}) \cdot \overline{AI}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}} = \frac{10a \cdot 4a}{a\sqrt{41} \cdot a\sqrt{41}} = \frac{40}{41}.$$

612. Se dă un cerc de rază R și un triunghi înscris avînd unghiurile la centru opuse laturilor în progresie aritmetică.

a) Să se calculeze aria S a acestui triunghi.

Să se calculeze perimetrul L al acestui triunghi.

c) Între ce limite trebuie să varieze raportul $x = \frac{S}{RL}$ pentru ca problema să admită soluție?

Institutul de petrol și gaze, București, 1957.

R. Cele trei unghiuri la centru pot fi $120° - 2u$; $120°$; $120° + 2u$; unde u poate varia între $0°$ și $60°$ $(0 < u < 60°)$.

a) Aria S a triunghiului este în acest caz egală cu

$$S = \frac{R^2 \sin 120°}{2} + \frac{R^2 \sin (120° - 2u)}{2} + \frac{R^2 \sin (120° + 2u)}{2}$$

sau

$$S = \frac{R^2}{2}(\sin 120° + 2 \sin 120° \cos 2u) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}(4 \cos^2 u - 1).$$

b) Lungimea L este dată de expresia

$$L = 2R \sin 60° + 2R \cdot \sin (60° - u) + 2R \sin (60° + u)$$

sau

$$L = 2R (\sin 60° + 2 \sin 60° \cos u) = R\sqrt{3}(1 + 2 \cos u).$$

c) Raportul x este dat de expresia

$$x = \frac{S}{RL} = \frac{\frac{R^2\sqrt{3}}{4}(4 \cos^2 u - 1)}{R^2\sqrt{3}(2 \cos u + 1)} = \frac{2 \cos u - 1}{4};$$

ținînd seama că u variază între $0°$ și $60°$, rezultă că x variază între valoarea minimă $\frac{2 \cos 60° - 1}{4} = 0$ și valoarea maximă $\frac{2 \cos 0° - 1}{4} = \frac{1}{4}$.

Așadar problema admite o soluție dacă $x < \frac{1}{4}$.

613. Se dă triunghiul ABC și se duc bisectoarele unghiului A care intersectează latura $\overline{BC}$ în punctele D, E. Se cere:

a) să se arate că pentru a avea $\overline{AD} = \overline{AE}$ trebuie ca diferența unghiurilor B, C ale triunghiului ABC să fie egală cu $90°$;

b) perpendicularele în B, C pe laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ se intersectează în F; să se demonstreze că $\overline{AF}$ este paralelă cu $\overline{BC}$;

c) dacă presupunem în plus că triunghiul ABC este și isoscel, să se calculeze unghiurile triunghiului.

Institutul de construcții, București, 1957.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Fiind dat $\overline{AD} = \overline{AE}$ (fig. 226) triunghiul DAE este dreptunghic isoscel, astfel încît avem $\widehat{ADE} = \widehat{AED} = 45°$ și deci $\widehat{ADB} = 135°$. Pe de altă parte avem

$$\widehat{ADB} = 135° = \hat{C} + \frac{\hat{A}}{2} \text{ și } \widehat{ADC} = 45° = \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2},$$

de unde deducem

$$\left(\hat{C} + \frac{\hat{A}}{2}\right) - \left(\hat{B} + \frac{\hat{A}}{2}\right) = \hat{C} - \hat{B} = 135° - 45° = 90°,$$

ceea ce a trebuit dovedit.

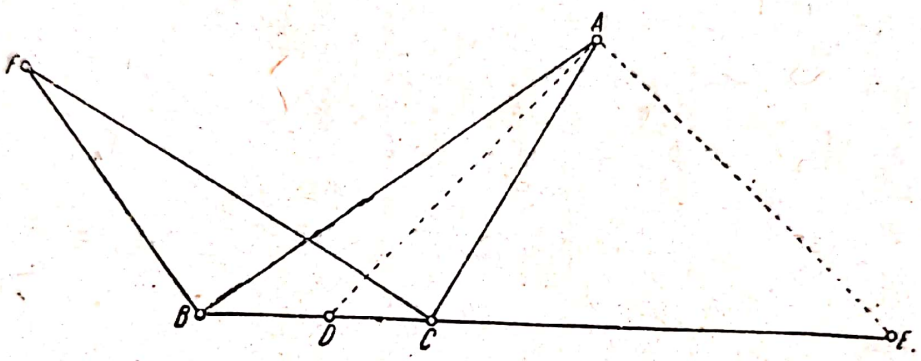


Fig. 226

b) Triunghiurile FBC și ABC sînt egale, pentru că au latura $\overline{BC}$ comună, unghiul FBC egal cu C, deoarece $\widehat{FBC} = \widehat{FBA} + \hat{B} = 90° + \hat{B}$, iar unghiul FBC este egal cu B, pentru că $\widehat{FCB} = \widehat{ACB} - \widehat{ACF} = \hat{C} - 90°$. Rezultă că punctele F și A sînt egal depărtate de dreapta BC și prin urmare FA este paralelă cu BC.

c) În situaţia cînd $\hat{C} - \hat{B} = 90°$ triunghiul ABC este isoscel, numai dacă $\overline{BC} = \overline{CA}$. Considerăm $\overline{BC} = \overline{CA}$ și notăm $\hat{B} = \alpha$. În acest caz $\hat{C} = 90° + \alpha$ și $\hat{A} = 90° - 2\alpha$ și pentru că avem $\overline{BC} = \overline{CA}$, rezultă $90° - 2\alpha = \alpha$ sau $\alpha = 30°$.

Unghiurile triunghiului sînt deci $\hat{A} = \hat{B} = 30°$ și $\hat{C} = 120°$.

614. Să se determine arcul x pentru care avem inegalitatea

$$\frac{1 - \sin x}{1 - 2\sin x} < \frac{\sin x}{1 - 4\sin^2 x}.$$

Facultatea de matematică și fizică, Bucureşti, 1957.

R. Inegalitatea dată se mai poate scrie

$$\frac{\sin x}{1-4\sin^2 x}-\frac{1-\sin x}{1-2\sin x}>0 \text{ sau } \frac{2\sin^2 x-1}{1-4\sin^2 x}>0,$$

care ne conduce la dubla inegalitate

$$\frac{1}{4}<\sin^2 x<\frac{1}{2}.$$

Se obţin soluţiile generale

$$\begin{aligned} & 30^\circ+n\cdot 360^\circ<x<45^\circ+n\cdot 360^\circ \\ \text{sau} \quad & 135^\circ+n\cdot 360^\circ<x<150^\circ+n\cdot 360^\circ \\ \text{sau} \quad & 210^\circ+n\cdot 360^\circ<x<225^\circ+n\cdot 360^\circ \\ \text{sau} \quad & 315^\circ+n\cdot 360^\circ<x<330^\circ+n\cdot 360^\circ, \end{aligned}$$

unde n este un întreg oarecare.

615. Să se rezolve inecuaţia $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4(x+1)}>1$.

Facultatea de matematică şi fizică, Bucureşti, 1961.

R. Inecuaţia este verificată, dacă avem

$$n\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi x}{4(x+1)}<n\pi+\frac{\pi}{2},$$

unde n este un întreg oarecare.

Dubla inegalitate de mai sus se desface în următoarele inecuaţii, care trebuie să aibă loc simultan:

$$\frac{x}{x+1}<4n+2 \text{ şi } \frac{x}{x+1}>4n+1.$$

Scăzînd 1 din ambii membri ai celor două inegalităţi şi schimbînd semnul, obţinem dubla inecuaţie

$$-4n-1<\frac{1}{x+1}<-4n.$$

De aici deducem că $x+1\in\left(-\frac{1}{4n},\ -\frac{1}{4n+1}\right)$

şi prin urmare

$$x\in\left(-\frac{4n+1}{4n},\ -\frac{4n+2}{4n+1}\right).$$

Deoarece

$$-\frac{4n+2}{4n+1}>-\frac{4n+1}{4n},$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru că avem

$$\frac{4n+1}{4n}-\frac{4n+2}{4n+1}=\frac{1}{4n(4n+1)}>0 \text{ pentru orice } n \text{ întreg,}$$

rezultă

$$-\frac{4n+1}{4n}<x<-\frac{4n+2}{4n+1},$$

unde n poate avea orice valoare întreagă.

Dacă $n=0$, nu există valori x care să satisfacă inecuația.

616. În triunghiul ABC se dau unghiurile $B=15°$ și $C=60°$, înălțimea din A pe latura BC egală cu h. Se cere:

a) să se afle perimetrul și aria triunghiului APQ format de vîrful A și de picioarele înălțimilor duse din B și C;

b) să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}$.

(Institutul politehnic, Brașov, 1958.)

R. a) Picioarele P și Q ale înălțimilor duse din B și C cad pe prelungirile laturilor AC și AB, pentru că unghiul $A=105°$ este obtuz (fig. 227).

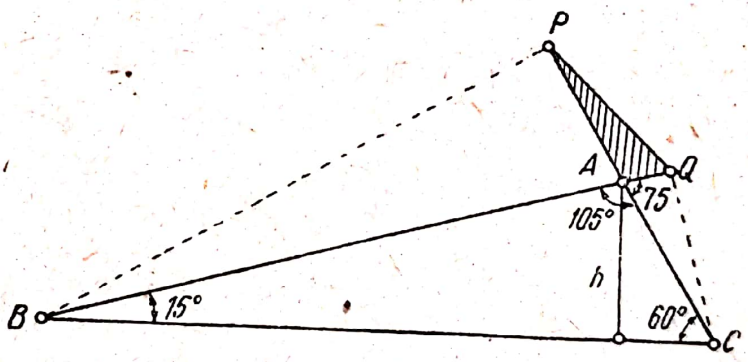


Fig. 227

Avem $AB=\frac{h}{\sin 15°}$; $AC=\frac{h}{\sin 60°}$ și prin urmare

$$\overline{AP}=\overline{AB}\cos 75°=\frac{h\cos 75°}{\sin 15°}=h,$$

$$\overline{AQ}=\overline{AC}\cos 75°=\frac{h\cos 75°}{\sin 60°}=\frac{h}{6}(3\sqrt{2}-\sqrt{6})$$

și

$$\overline{PQ}=\frac{h}{6}(3\sqrt{2}+\sqrt{6}).$$

Perimetrul triunghiului APQ este deci egal cu

$$P = h(\sqrt{2} + 1).$$

Aria triunghiului APQ este egală cu

$$\frac{\overline{AP} \cdot \overline{AQ} \sin 105°}{2} = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{6}(3\sqrt{2} - \sqrt{6}) \sin 75° = \frac{h^2\sqrt{3}}{12}.$$

b) $\operatorname{tg} \frac{B+C}{2} = \operatorname{tg} \frac{75°}{2} = \frac{\sin 75°}{1 + \cos 75°} = \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2.$

617. a) Fie ecuaţia $4x^2 - 2\lambda x + \lambda - 2 = 0$.

a) Să se arate că ea are rădăcini reale, oricare ar fi λ.

b) Să se arate cînd sînt rădăcinile de semne contrare.

c) Să se găsească un punct A pe axa x, de abscisă x_0 astfel ca produsul $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)$ să nu depindă de λ, unde x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei date pentru un λ oarecare. Ce reprezintă diferenţele $x_1 - x_0$; $x_2 - x_0$?

d) Care este minimul distanţei $(x_2 - x_1)$, luată în valoare absolută?

Institutul tehnic, Galaţi, 1956.

R. a) Discriminantul ecuaţiei este $\Delta = (\lambda - 2)^2 + 4$, care este pozitiv pentru orice valoare a lui λ; prin urmare ecuaţia dată are rădăcini reale pentru orice valoare a lui λ.

b) Pentru ca rădăcinile să aibă semne contrare, este necesar ca produsul rădăcinilor să fie negativ, adică $x_1x_2 = \frac{\lambda - 2}{4} < 0$.

Rezultă că $\lambda < 2$ este condiţia cerută.

c) Avem

$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) = x_1x_2 - x_0(x_1 + x_2) + x_0^2 = \frac{\lambda(1 - 2x_0) + 4x_0^2 - 2}{4},$$

de unde rezultă că produsul nu depinde de λ, dacă avem $1 - 2x_0 = 0$, adică $x_0 = \frac{1}{2}$.

Dacă x_1 şi x_2 sînt abscisele a două puncte M_1, respectiv M_2, atunci diferenţele $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0$ sînt segmentele orientate $\overline{AM_1}$, $\overline{AM_2}$.

d) Din identitatea $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$, rezultă

$$(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{4}[(\lambda - 2)^2 + 4].$$

Se constată deci că valoarea absolută a diferenţei $x_2 - x_1$ este minimă, atunci cînd avem $\lambda = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

618. Se consideră ecuația

$$x^2 - 2x \cos \alpha + \sin^2 \alpha = 0$$

cu rădăcinile x_1 și x_2.

a) Fără a calcula aceste rădăcini, să se arate că expresia $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2$ este independentă de arcul α. Mai există combinații între x_1 și x_2 independente de α?

b) să se discute natura rădăcinilor x_1 și x_2 cînd α variază între 0 și 2π.

c) să se arate că, dacă ecuația de mai sus are rădăcinile reale și distincte. atunci ecuația

$$x^2 - 2x \sin \alpha + \cos^2 \alpha = 0$$

le are imaginare și reciproc.

Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1958.

R. a) Avem $E = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2$.

Înlocuind $x_1 + x_2 = 2 \cos \alpha$ și $x_1x_2 = \sin^2 \alpha$, obținem

$$E = 4 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha = 4,$$

care este independentă de α.

Dacă ar mai exista o relație $f(x_1, x_2) = k$ independentă de α, ar urma că rezolvînd sistemul

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 = 4, \\ f(x_1x_2) = k \end{cases}$$

cu necunoscutele x_1, x_2 să obținem pentru x_1 și x_2 expresii independente de α, ceea ce este imposibil. Rezultă deci că nu există alte combinații în x_1 și x_2 care să fie independente de α.

b) Natura rădăcinilor depinde de semnul discriminantului

$$\Delta = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha,$$

al cărui semn este înregistrat în tabela de mai jos

α	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
Δ		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Rezultă că ecuația are rădăcini reale pentru

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}, \text{ sau pentru } \frac{3\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{5\pi}{6}, \text{ sau pentru}$$

$$\frac{7\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi.$$

c) Discriminantul ecuației de la pct. c) este

$$\Delta' = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha,$$

de unde deducem $\Delta' = -\Delta$, ceea ce justifică afirmația din enunț.

619. Fiind dat un unghi a, se cere:

a) să se discute și să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x \cos^2 a + y \sin^2 a = 1. \\ x + y = 2 + 4 \operatorname{cotg}^2 2a; \end{cases}$$

b) să se arate că între soluțiile x, y ale acestui sistem există o relație $y = f(x)$ independentă de a. Față de un sistem ortogonal de axe xOy, să se reprezinte graficul acestei funcții?;

c) ce legătură există între soluțiile sistemului de mai sus și rădăcinile ecuației

$$z^2 - (2 + 4 \operatorname{cotg}^2 2a)z + 1 = 0.$$

Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1958.

R. a) Presupunînd $2a \neq k\pi$, ecuația a doua are sens și scoatem

$$y = 2 + 4 \operatorname{cotg}^2 2a - x$$

pe care-l introducem în ecuația I și obținem

$$x \cos 2a = \cos 2a \cdot \operatorname{tg}^2 a.$$

Dacă în plus $2a \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, atunci avem $x = \operatorname{tg}^2 a$ și apoi $y = \operatorname{cotg}^2 a$.

Așadar, în cazul $a \neq \frac{k\pi}{2}$ și $a \neq \frac{(2k+1)\pi}{4}$, soluția sistemului este $x = \operatorname{tg}^2 a$ și $y = \operatorname{cotg}^2 a$.

Să vedem ce se întîmplă în cazurile $a = \frac{k\pi}{2}$ și $a = \frac{(2k+1)\pi}{4}$.

Dacă $a = \frac{k\pi}{2}$, atunci $\operatorname{cotg} 2a$ nu există și sistemul este imposibil.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $a=\frac{(2k+1)\pi}{4}$, avem $\cos^2 a = \sin^2 a = \frac{1}{2}$, iar $\operatorname{cotg}^2 2a = 0$, astfel că sistemul devine $x + y = 2$ și $x + y = 2$, adică este nedeterminat.

b) Cînd sistemul are soluția $x = \operatorname{tg}^2 a$; $y = \operatorname{cotg}^2 a$, atunci avem $xy = 1$; adică între x și y există o relație independentă de a. Graficul funcției $y = \frac{1}{x}$ este o hiperbolă echilateră.

c) Deoarece avem $xy = 1$ și $x + y = 2 + 4 \operatorname{cotg}^2 2a$, rezultă că x și y sînt rădăcinile ecuației

$$Z^2 - (2 + 4 \operatorname{cotg}^2 2a)\, Z + 1 = 0.$$

620. 1. Să se arate că oricare ar fi coeficienții a, b, c ecuațiile $ax^2 - 2bx + c = 0$; $cx^2 - 2bx + a = 0$ au rădăcinile respectiv inverse.

2. Să se rezolve aceste ecuații în cazul cînd a, b, c sînt laturile unui triunghi ABC, care are unghiul $B = \frac{\pi}{3}$ și să se arate că ecuațiile au rădăcini reale și pozitive.

3. În același condiții ca la pct. 2) să se arate că fracția

$$y = \frac{ax^2 - 2bx + c}{cx^2 - 2bx + a}$$

poate lua orice valoare reală.

Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1958.

R. 1) Dacă rădăcinile ecuației $ax^2 - 2bx + c = 0$ sînt x_1 și x_2, atunci cînd se formează ecuația cu rădăcinile $\frac{1}{x_1}$ și $\frac{1}{x_2}$ se obține $cx^2 - 2bx + a = 0$. Această constatare demonstrează afirmația din enunț.

2) Dacă unghiul $B = 60°$ și punem $A = 60° + \alpha$, atunci $C = 60° - \alpha$. Notînd cu R raza cercului circumscris triunghiului, laturile au expresiile

$$a = 2R \sin (60° + \alpha); \quad b = 2R \sin 60°; \quad c = 2R \sin (60° - \alpha),$$

iar prima din ecuațiile date devine

$$2Rx^2 \sin (60° + \alpha) - 4Rx \sin 60° + 2R \sin (60° - \alpha) = 0,$$

sau după simplificarea cu $2R$

$$x^2 \sin (60° + \alpha) - 2x \sin 60° + \sin (60° - \alpha) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Discriminantul acestei ultime ecuații este

$$\Delta = \sin^2 60° - \sin (60° + \alpha) \sin (60° - \alpha) = \sin^2 \alpha,$$

ceea ce dovedește că ecuația are rădăcinile reale și distincte. Numai cînd triunghiul este echilateral, rădăcinile sînt reale și egale.

Deoarece atît produsul rădăcinilor cît și suma lor, respectiv egale cu $\frac{c}{a}$ și $\frac{2b}{a}$, sînt pozitive, rezultă că ambele rădăcini ale ecuației sînt pozitive.

Ecuația $cx^2 - 2bx + a = 0$ avînd rădăcini inverse rădăcinilor primei ecuații, acestea sînt de asemenea reale și pozitive.

3) Să formăm ecuația care ne dă pe x cînd se cunoaște y; ea este

$$(cy - a)\, x^2 - 2b\,(y - 1)\, x + ay - c = 0.$$

Discriminantul acestei ecuații are expresia

$$\Delta = b^2(y - 1)^2 - (ay - c)\,(cy - a) = (b^2 - ac)\, y^2 + \\ + (a^2 + c^2 - 2b^2)\, y + b^2 - ac$$

al cărei semn este mereu plus, pentru că $b^2 - ac$ este pozitiv, după cum s-a arătat la punctul precedent. Într-adevăr, discriminantul trinomului în y este

$$D = (a^2 + c^2 - 2b^2)^2 - 4(b^2 - ac)^2 = (a - c)^2\,(a + c + 2b)\,(a + c - 2b),$$

care este negativ, pentru că $a + c - 2b = 2R\,[\sin (60° + \alpha) + \\ + \sin (60° - \alpha) - 2 \sin 60°] = 4R \sin 60°.\,(\cos \alpha - 1) < 0$. Așadar, discriminantul Δ fiind pozitiv pentru orice valoare a lui y, rezultă că există o valoare pentru x, astfel încît fracția dată să poată lua valoarea y, care poate fi orice număr real.

621. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi oarecare și A, B, C unghiurile lui, se cere:

a) să se găsească soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} b \sin (x + y - z) + c \sin (x - y + z) = a \\ c \sin (-x + y + z) + a \sin (x + y - z) = b \\ a \sin (x - y + z) + b \sin (-x + y + z) = c \end{cases}$$

în funcție de unghiurile A, B, C;

b) să se determine relațiile pe care trebuie să le verifice unghiurile A, B, C, astfel încît x, y, z să fie unghiurile unui triunghi.

Facultatea de matematică și fizică, București, 1959.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Dacă notăm $\sin(-x+y+z)=u$; $\sin(x-y+z)=v$ și $\sin(x+y-z)=w$, avem de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} bw+cv=a \\ cu+aw=b \\ av+bu=c. \end{cases} \tag{1}$$

Se găsește $u=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)$

$$v=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\cos B=\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right) \text{ și}$$

$$w=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\cos C=\sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right).$$

Sistemul dat se înlocuiește deci cu următorul

$$\begin{cases} \sin(-x+y+z)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right) \\ \sin(x-y+z)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right) \\ \sin(x+y-z)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-C\right) \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} -x+y+z=(-1)^m\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)+m\pi \\ x-y+z=(-1)^n\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)+n\pi \\ x+y-z=(-1)^p\left(\dfrac{\pi}{2}-C\right)+p\pi \end{cases} \tag{2}$$

unde m, n, p sînt întregi oarecare, pozitivi*).

Din ultimul sistem obținem

$$x=\frac{1}{2}\left[(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-B\right)+(-1)^p\left(\frac{\pi}{2}-C\right)+(n+p)\pi\right]$$

$$y=\frac{1}{2}\left[(-1)^m\left(\frac{\pi}{2}-A\right)+(-1)^p\left(\frac{\pi}{2}-C\right)+(m+p)\pi\right]$$

*) În problema aceasta este indicat să folosim forma unică pentru arcele care au un același sinus.

Scanned with OKEN Scanner

și

$$z = \frac{1}{2}\left[(-1)^m\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + (-1)^n\left(\frac{\pi}{2} - B\right) + (m+n)\pi\right].$$

b) Pentru ca x, y, z să fie unghiurile unui triunghi, este necesar și suficient ca aceste numere să fie pozitive, diferite de zero și astfel ca

$$x + y + z = \pi.$$

Dacă adunăm, membru cu membru, ecuațiile celui de-al doilea sistem (2) obținem

$$x + y + z = -(-1)^m A - (-1)^n B - (-1)^p C + (m + n + p)\pi + [(-1)^m + (-1)^n + (-1)^p]\frac{\pi}{2}.$$

Avînd în vedere că $x + y + z = \pi$, deducem o relație pe care trebuie să o verifice unghiurile A, B, C pentru ca și x, y, z să fie unghiurile unui triunghi

$$(-1)^m A + (-1)^n B + (-1)^p C = \left[(m + n + p - 1) + \frac{(-1)^m + (-1)^n + (-1)^p}{2}\right]\pi. \qquad (3)$$

Să găsim astfel de unghiuri A, B, C.

Putem avea mai multe cazuri pentru m, n, p.

1) m, n, p numere de aceeași paritate, atunci membrul stîng al egalității (3) valorează $\pm\pi$, ceea ce este imposibil, pentru că membrul drept valorează un număr fracționar de π.

2) Două numere dintre cele trei m, n, p sînt impare.

Să presupunem $m = 2m_1 + 1$, $n = 2n_1 + 1$ și $p = 2p_1$; în acest caz egalitatea (3) devine

$$-A - B + C = \left(2m_1 + 2n_1 + 2p_1 + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

sau după ce înlocuim $A + B = \pi - C$ obținem

$$C = \left(m_1 + n_1 + p_1 + \frac{3}{4}\right)\pi.$$

Întrucît $C < \pi$, rezultă că $m_1 = n_1 = p_1 = 0$ și prin urmare $m = 1$, $n = 1$, $p = 0$, $c = \frac{3\pi}{4}$, sau 135°, iar unghiurile x, y, z exprimate la pct. a) devin $x = \frac{\pi + B - C}{2}$; $y = \frac{\pi + A - C}{2}$;

$z = \frac{\pi + A + B}{2}$, unde $C = \frac{3\pi}{4}$, sau 135°. Luînd analog numai m par și apoi numai n par, obținem și soluțiile $\left(x = \frac{\pi + B + C}{2}; y = \frac{\pi + C - A}{2}; z = \frac{\pi + B - A}{2}\right)$, unde $A = \frac{3\pi}{4}$; $\left(x = \frac{\pi + C - B}{2}; y = \frac{\pi + A + C}{2}; z = \frac{\pi + A - B}{2}\right)$, unde $B = \frac{3\pi}{4}$.

3) Două numere dintre cele trei m, n, p sînt pare.

Să presupunem $m = 2m_1$, $n = 2n_1$ și $p = 2p_1 + 1$; în acest caz egalitatea (3) devine

$$A + B - C = \left(2m_1 + 2n_1 + 2p_1 + \frac{1}{2}\right)\pi$$

sau după ce înlocuim $A + B = \pi - C$, obținem

$$C = \left(\frac{1}{4} - m_1 - n_1 - p_1\right)\pi.$$

Întrucît $C > 0$, trebuie să avem $m_1 = n_1 = p_1 = 0$ și prin urmare $m = 0$, $n = 0$, $p = 1$, $C = \frac{\pi}{4}$, sau 45°, iar unghiurile x, y, z devin

$$x = \frac{\pi + C - B}{2}; \quad y = \frac{\pi + C - A}{2}; \quad z = \frac{C}{2}, \text{ unde } C = \frac{\pi}{4} \text{ sau } 45°.$$

Luînd analog numai m impar și apoi numai n impar, obținem și soluțiile

$$\left(x = \frac{A}{2}; y = \frac{\pi + A - C}{2}; z = \frac{\pi + A - C}{2}\right), \text{ unde } A = \frac{\pi}{4},$$

$$\left(x = \frac{\pi + B + C}{2}; y = \frac{B}{2}; z = \frac{\pi + B - A}{2}\right), \text{ unde } B = \frac{\pi}{4}.$$

622. Să se rezolve ecuația $x^2 + 4(m + 1)x + 4(2m + 1) = 0$, știind că rădăcinile ecuației sînt funcții de m, să se reprezinte grafic aceste funcții și să se determine intersecția curbelor reprezentative.

Facultatea de chimie industrială, Iași, 1961.

R. Rădăcinile ecuației sînt $x_1 = -2$ și $x_2 = -2(2m + 1)$.

Față de două axe Om, Oy funcțiile $y = -2$ și $y = -2(2m + 1)$, reprezintă drepte: $y = -2$, o paralelă cu Om, iar a doua o dreaptă de pantă -2, care trece prin $I\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Intersecția celor două drepte se află în $A(0, -2)$.

Scanned with OKEN Scanner

623. Se dă trapezul dreptunghic $ABCD$ avînd unghiurile drepte A și D, baza mare $\overline{AB} = a$, baza mică $\overline{DC} = b$ și diagonala $\overline{BD}$ bisectoare a unghiului B.

a) Să se calculeze înălțimea trapezului și să se arate că $a < 2b$.

b) Să se arate că $\overline{DB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{DC}^2$.

c) Dacă E este punctul de intersecție a diagonalelor $\overline{DB}$ și $\overline{AC}$, iar G și H sînt punctele în care dreptele AD și BC sînt intersectate de paralela dusă prin E la bază, să se calculeze segmentele GE și EH.

d) Considerînd pe (AB) ca axă Ox și pe (AD) ca axă Oy, să se calculeze analitic coordonatele punctului E.

Institutul Politehnic, București, 1962.

R. a) BD fiind bisectoarea unghiului B (fig. 228), rezultă că triunghiul DCB este isoscel și, prin urmare, $\overline{BC} = b$. Înălțimea trapezului este, deci, egală cu

$$I = \sqrt{b^2 - (a-b)^2} = \sqrt{a(2b-a)}.$$

Dată fiind expresia de sub radical, este necesar ca să avem $a < 2b$.

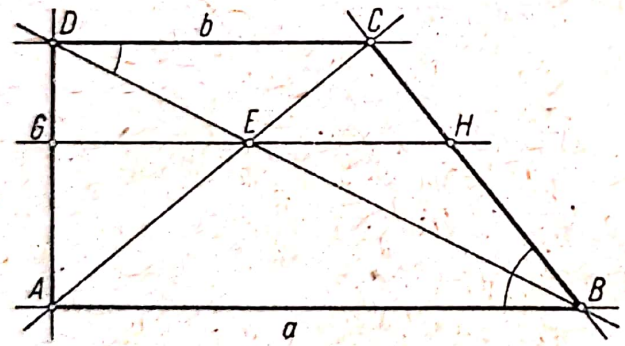


Fig. 228

b) Relația rezultă din triunghiurile dreptunghice ADC, ADB care au cateta comună AD.

c) Aplicînd teorema bisectoarei în triunghiul ABC în care BE este bisectoare, obținem

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{EC}}{b} = \frac{\overline{EA}}{a} = \frac{\overline{AC}}{a+b},$$

iar din asemănările $ECH \sim ACB$, $EGA \sim CDA$, avem

$$\frac{\overline{EH}}{a} = \frac{\overline{EC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{GE}}{a} = \frac{b}{a+b} \text{ și prin urmare } \overline{GE} = \overline{EH} = \frac{ab}{a+b}.$$

d) Punctul E are coordonatele $x = \overline{GE} = \frac{ab}{a+b} = \frac{a \cdot \overline{AD}}{a+b} = \frac{a\sqrt{a(2b-a)}}{a+b}$.

Scanned with OKEN Scanner

624. Se dă un dreptunghi $ABCD$ cu laturile $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ și $\overline{BC} = \overline{DA} = b$. Notăm cu M mijlocul lui $\overline{BC}$, cu P un punct de pe $\overline{AB}$ și $\overline{AP} = q$. Se cere:

a) să se determine valorile lui q pentru care triunghiul DPM este isoscel;

b) să se calculeze aria triunghiului DPM;

c) să se arate cum se construiește grafic segmentul q determinat de expresia obținută la punctul a);

d) să se verifice analitic, rezultatul de la punctul b), considerînd pe AB ca axă Ox și pe AD ca axă Oy.

Institutul politehnic, București, 1961.

R. a) $\Delta\, DPM$ este isoscel dacă 1) $\overline{DP} = \overline{MP}$, 2) $\overline{PD} = \overline{MD}$ și 3) $\overline{DM} = \overline{PM}$ (fig. 229).

În cazul 1) obținem $q = \dfrac{4a^2 - 3b^2}{8a}$.

Dacă trebuie să avem $\overline{PD} = \overline{MD}$, atunci $q^2 = \dfrac{4a^2 - 3b^2}{4}$.

În cazul (3) obținem $q = 0$, sau $q = 2a$. Dacă $q = 0$, triunghiul isoscel este DMA, iar cînd $q = 2a$, D, M, P sînt coliniare.

b) Să calculăm aria $\Delta\, DPM$ în cazul 2) luînd $q = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 3b^2}$. Scădem din aria dreptunghiului, ariile triunghiurilor DAP, PBM, MCD

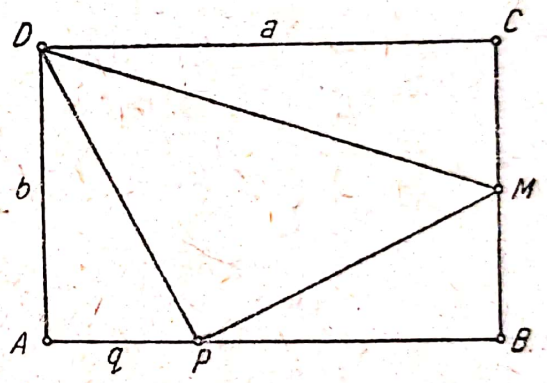


Fig. 229

Se obține:

$$\text{aria } \Delta\, PDM = ab - \left[\frac{bq}{2} + \frac{b(a-q)}{4} + \frac{ab}{4}\right] = \frac{b(2a-q)}{4},$$

unde se substituie $q = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 3b^2}$. În celelalte cazuri aria se află la fel, substituind valoarea corespunzătoare a lui q.

c) În cazul 2) segmentul q se mai scrie:

$$q = \frac{1}{2}\sqrt{(2a)^2 - (b\sqrt{3})^2}$$

de unde se constată modul de a construi grafic segmentul q. Se construiește un triunghi dreptunghic cu ipotenuza $2a$ și o catetă egală cu latura triunghiului echilateral înscris în cercul de rază b; jumătatea celeilalte catete este segmentul q.

Scanned with OKEN Scanner

d) Dacă AB este Ox și AD, Oy, atunci $P\ (q,\ 0)$, $M\left(a,\ \frac{b}{2}\right)$ și $D(0,\ b)$. Substituind aceste coordonate în formula ariei

$$A = \pm\frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2)\right],$$

obținem

$$A = \frac{b\,(2a - q)}{4}.$$

625. În triunghiul dreptunghic ABC cunoaștem ipotenuza $\overline{BC} = 2a$ și cateta $\overline{AB} = c$. Se notează cu M mijlocul ipotenuzei $\overline{BC}$ și cu D simetricul punctului M față de AC. Se cere:

a) să se arate că patrulaterul $ABCD$ este un trapez;

b) să se calculeze aria acestui trapez;

c) să se calculeze diagonalele trapezului;

d) se ia BC ca axă Ox și perpendiculara din A pe BC ca axă Oy. Să se scrie ecuațiile dreptelor AB și CD pentru $a = c = 20$ m.

Institutul politehnic, București, 1960.

R. a) Trebuie demonstrat că $AD \parallel BC$. Ținînd seama că D (fig. 230) este simetricul lui M și pentru că $\overline{AM} = \frac{1}{2}\,\overline{BC} = \overline{MC}$, avem:

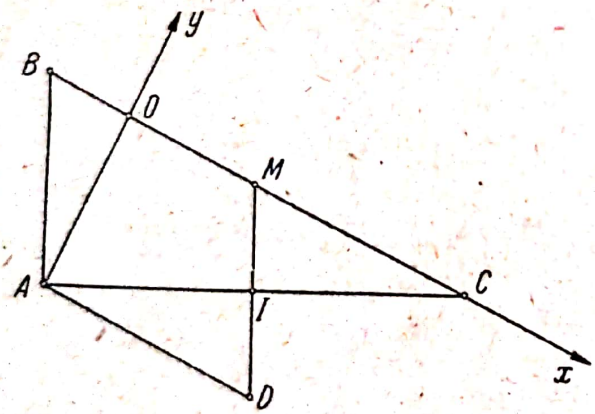


Fig. 230

$$\overset{\frown}{IAD} = \overset{\frown}{IAM} = \overset{\frown}{MCI}$$

deci $AD \parallel BC$.

b) Distanța de la A la BC este egală cu $\frac{c\cdot\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{c\sqrt{4a^2 - c^2}}{2a}$, iar $\overline{AD} = \overline{MC} = a$.

Rezultă că aria $(ABCD) = \frac{3}{4}\,c\sqrt{4a^2 - c^2}$.

c) Diagonalele trapezului sînt $\overline{AC} = \sqrt{4a^2 - c^2}$ și $\overline{BD}$ care se obține din formula

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + 2\cdot\overline{AD}\cdot \mathrm{pr}_{\overline{AD}}\,\overline{AB}.$$

Rezultă că $\overline{BD} = \sqrt{a^2 + 2c^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

d) Luînd ca axe, cele indicate în enunț, avem

$$A\left(0, -\frac{c\sqrt{4a^2-c^2}}{2a}\right),\ B\left(-\frac{c^2}{2a}, 0\right),\ C\left(\frac{4a^2-c^2}{2a}, 0\right)$$

și $D\left(a, -\frac{c\sqrt{4a^2-c^2}}{2a}\right)$.

De unde deducem ecuațiile dreptelor AB, CD

$$(AB)\ \frac{2ax}{c^2} + \frac{2ay}{c\sqrt{4a^2-c^2}} + 1 = 0 \quad \text{și}$$

$$(CD)\quad y = \frac{c\sqrt{4a^2-c^2}}{2a^2-c^2}\left(x - \frac{4a^2-c^2}{2a}\right)$$

Pentru $a = c = 20$, ecuațiile de mai sus devin:

$(AB)\ \ x\sqrt{3} + y + 10\sqrt{3} = 0$ și $(CD)\ x\sqrt{3} - y - 30\sqrt{3} = 0$.

626. Se dă triunghiul ABC în care $\overline{BC} = 2a$, $\overline{AB} = \overline{AC} = a\sqrt{5}$. Se notează cu O mijlocul laturii BC. Se cere să se exprime în funcție de a:

a) cele trei înălțimi ale triunghiului;

b) distanțele punctului O la laturile AB și AC;

c) raza cercului circumscris triunghiului;

d) volumul corpului descris de acest triunghi cînd se rotește în jurul laturii AC;

e) să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului ABC, dacă BC este axa absciselor, iar OA axa ordonatelor.

Institutul de mine, Petroșeni, 1961.

R: a) $h_A = 2a$, $h_B = h_C = \frac{4a\sqrt{5}}{5}$. b) $d_{AB} = d_{AC} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

c) $R = \frac{5}{4}a$. d) $\frac{16\pi a^3\sqrt{5}}{15}$. e) $x^2 + y^2 - \frac{3a}{2}y - a^2 = 0$.

627. a) Fie G centrul de greutate al triunghiului isoscel $\overline{ABC}$, $(\overline{AB} = \overline{AC})$. Să se demonstreze că $\overline{AB}^2 = 2\,\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2$.

b) O piramidă are vîrful V și baza un triunghi echilateral ABC cu latura a. Muchia laterală VA este perpendiculară pe

planul bazei, iar fața laterală VBC face cu baza un unghi de 60°. Să se afle volumul și aria totală a piramidei.

c) Laturile unui triunghi au ecuațiile $x + y - 2 = 0$, $x + 3y - 4 = 0$ și $x + 2y - 4 = 0$. Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului și ecuația tangentei la acest cerc într-unul din vîrfuri.

Institutul agronomic, Craiova, 1960.

R. a) Avem (fig. 231): $\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + 2\overline{AG} \cdot \overline{GI}$. Substituind în această relație pe $\overline{GI}$ cu $\frac{1}{2}\overline{AG}$, obținem tocmai ceea ce trebuie demonstrat.

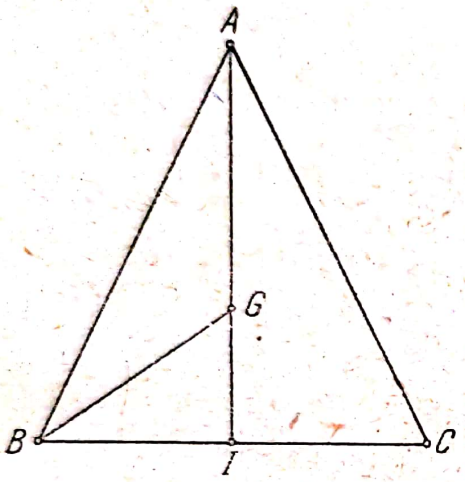


Fig. 231

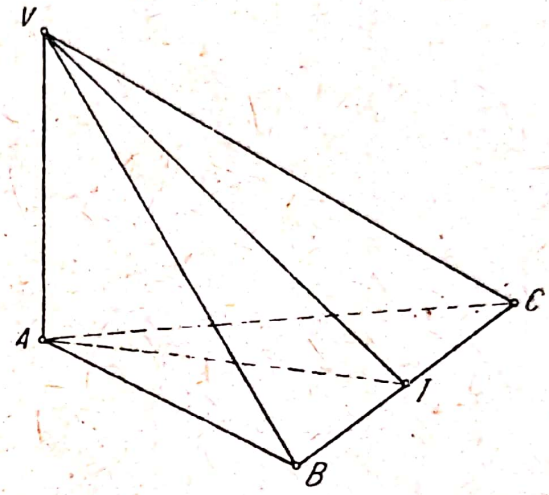


Fig. 232

b) Dacă notăm (fig. 232) cu $\overline{AI}$ înălțimea din A a triunghiului echilateral ABC, avem

$$\overline{AV} = \overline{AI} \operatorname{tg} 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2};$$

rezultă că volumul V al piramidei este

$$V = \frac{\text{aria } (ABC) \cdot \overline{AV}}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}.$$

Aria totală a piramidei este formată din aria ABC adunată cu dublul ariei VAB și cu aria VBC.

$$\text{Deducem } A_{tot} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2(6 + 3\sqrt{3})}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Se găsește că vîrfurile A, B, C ale triunghiului au coordonatele

$$A\ (1, 1), \quad B\ (0, 2) \quad \text{și} \quad C\ (4, 0).$$

Ecuația cercului circumscris este

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0.$$

Tangenta în A are ecuația $3x + 4y - 7 = 0$, aceea din B, $4x + 3y - 6 = 0$, iar aceea din C, $y = 0$.

628. Se notează cu x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile ecuației

$$mx^4 - 2\ (m + 4)\ x^2 + 4m + 5 = 0.$$

a) Să se determine m astfel ca

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 20.$$

b) Să se verifice că în acest caz rădăcinile sînt în progresie aritmetică.

c) Să se calculeze valorile maxime și minime ale funcției

$$y = x^4 - 10\ x^2 + 9.$$

Institutul politehnic, București, 1960.

R. a) Dacă notăm $x^2 = y$, rădăcinile y sînt date de ecuația

$$my^2 - 2\ (m + 4)\ y + 4m + 5 = 0,$$

iar relația dată devine $2y_1 + 2y_2 = 20$, de unde rezultă

$$m = 1.$$

b) Pentru $m = 1$, rădăcinile x sînt date de

$$x^4 - 10\ x^2 + 9 = 0,$$

de unde deducem că ele sînt ± 1 și ± 3.

Aceste rădăcini, așezate în ordinea: -3, -1, 1, 3, formează o progresie aritmetică cu rația 2, iar în ordinea 3, 1, -1, -3, o pogresie aritmetică cu rația -2.

c) Maximele și minimele funcției $f(x) = x^4 - 10\ x^2 + 9$ se obțin pentru acele valori ale lui x pentru care se anulează derivata

$$f'(x) = 4x^3 - 20x = 4x\ (x^2 - 5),$$

adică pentru $-\sqrt{5}$, 0, $\sqrt{5}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a distinge maximele de minime calculăm valorile derivatei a doua, $f''(x) = 4(3x^2 - 5)$. Se obține $f''(-\sqrt{5}) = 40$, $f''(0) = -20$ și $f''(\sqrt{5}) = 40$. Deoarece derivata a doua este pozitivă cînd $x = \pm\sqrt{5}$ și negativă cînd $x = 0$, rezultă că pentru $x = \pm\sqrt{5}$, funcția dată este minimă, iar pentru $x = 0$, maximă. Așadar, maximul lui y este 9, iar minimul -16.

629. Să se rezolve ecuația.

$$\sqrt{5 + x^2} + \sqrt{1 + 2x^2} = 6.$$

b) Să se demonstreze identitatea

$$(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{cotg} x) = 2(1 + \operatorname{cosec} 2x).$$

c) Se dă funcția

$$y = \frac{\sqrt{x}}{1 + x}.$$

Să se calculeze derivata funcției. Pentru ce valoare a lui x funcția admite un extrem? Care este valoarea acestui extrem?

Institutul de construcții, București, 1960.

R. a) După două ridicări la pătrat, ecuația devine.

$$x^4 - 224x^2 + 880 = 0,$$

care are soluțiile $x_{1,2} = \pm 2$ și $x_{3,4} = \pm\sqrt{220}$.

Soluțiile bune pentru ecuația dată sînt numai $x = -2$ și $x = 2$.

b) Avem

$$(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{cotg} x) = \frac{2(\sin x + \cos x)^2}{\sin 2x} = 2(1 + \operatorname{cosec} 2x).$$

c) Derivata funcției este $y' = \dfrac{1 - x}{2(1 + x)^2\sqrt{x}}$.

Pentru $x = 1$ funcția are un maximum egal cu $\dfrac{1}{2}$.

630. Între x_1 și x_2 există relațiile:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a + 2\sqrt{a - 1}}{a - 2\sqrt{a - 1}}, \quad x_1 - x_2 = \frac{4\sqrt{a - 1}}{a - 2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se scrie ecuația de gradul al doilea care are rădăcinile x_1 și x_2.

b) Să se determine valorile lui a pentru care

$$x_1, \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), x_2$$

sînt în progresie aritmetică.

c) Să se calculeze în funcție de a expresia

$$f(a) = x_1 + x_2 - x_1 x_2.$$

d) Să se reprezinte grafic variația funcției $f(a)$ în care a este variabila independentă.

Institutul politehnic, București, 1961.

R. a) Scriind relația dată sub forma

$$\frac{x_1}{a + 2\sqrt{a-1}} = \frac{x_2}{a - 2\sqrt{a-1}} = \frac{x_1 - x_2}{4\sqrt{a-1}} = \frac{4\sqrt{a-1}}{a-2} : 4\sqrt{a-1} = \frac{1}{a-2},$$

găsim

$$x_1 = \frac{a + 2\sqrt{a-1}}{a-2} \quad \text{și} \quad x_2 = \frac{a - 2\sqrt{a-1}}{a-2}.$$

Deducem $x_1 + x_2 = \frac{2a}{a-2}$, iar $x_1 x_2 = 1$. Ecuația cu rădăcinile x_1, x_2 este $(a-2)\, x^2 - 2ax + (a-2) = 0$.

b) Pentru ca $x_1, \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), x_2$ să fie în progresie aritmetică, trebuie să avem: $\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{x_1 + x_2}{2}$, sau $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = x_1 + x_2$. Rezultă

$$\frac{4a^2}{(a-2)^2} - 2 = \frac{2a}{a-2}$$

ecuație care are ca rădăcină $a = \frac{2}{3}$.

c) $x_1 + x_2 - x_1 x_2 = \frac{2a}{a-2} - 1 = \frac{a+2}{a-2}$

d) $f(a) = 1 + \frac{4}{a-2}$ are domeniul de definiție $a \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$, derivata $f'(a) = -\frac{4}{(a-2)^2}$ este negativă pentru orice valoare a lui a.

Tabloul de variație a funcției este

a	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(a)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$ $\searrow$ 1

Graficul variației este indicat în fig. 233.

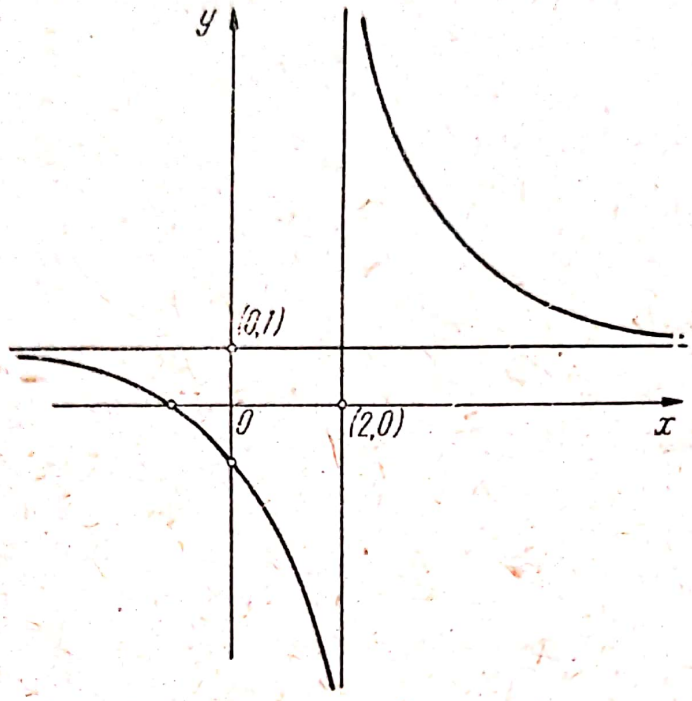


Fig. 233

631. a) O progresie aritmetică are suma 222. Să se afle cîți termeni are progresia, știind că termenul al treilea adunat cu al șaptelea dă 28, iar termenul al patrulea adunat cu al optulea dă 34.

b) Să se afle dimensiunile unui bidon cu baza pătrată care să conțină 64 l, știind că pentru confecționarea lui s-a întrebuințat minimum de material.

c) Se dă $\operatorname{tg} a = \frac{1}{5}$ și $\operatorname{ctg} b = \frac{5}{12}$. Se cere să se afle $\sin(2a + b)$.

Institutul agronomic, Craiova, 1960.

R. a) Avînd $a_3 + a_7 = 28$ și $a_4 + a_8 = 34$ deducem, $a_1 = 2$ și $r = 3$. Substituind $a_n = a_1 + (n-1)\, r = 3\, n - 1$ și $a_1 = 2$ în relația

$$\frac{(a_1 + a_n)\, n}{2} = 222,$$

obținem $n = 12$.

b) Notînd cu x latura pătratului bazei şi cu y înălţimea, avem $x^2y = 64$ dm^3.

Pentru a întrebuinţa un minim de material la confecţionarea bidonului, trebuie să scriem că aria totală a bidonului este minimă.

Ţinînd seama că $x^2y = 64$, atunci aria totală A a bidonului este

$$A = 4xy + 2x^2 = 2\left(\frac{128}{x} + x^2\right).$$

Minimul lui A are loc pentru acea valoare a lui x pentru care derivata $A' = 2\left(-\frac{128}{x^2} + 2x\right)$ este nulă, adică pentru $x = 4$, la care corespunde $y = 4$.

c) Avem $\sin(2a + b) = \sin 2a \cos b + \sin b \cos 2a$. În această relaţie substituim

$$\sin 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a} = \frac{5}{13}, \quad \cos 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a} = \frac{12}{13}$$

şi

$$\sin b = \frac{\varepsilon \cdot 12}{13}, \quad \cos b = \frac{\varepsilon \cdot 5}{13}, \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Se obţine $\sin(2a + b) = \pm 1$.

632. Se dă ecuaţia $m = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{x}} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ şi se cere:

a) Să se afle rădăcinile ecuaţiei.

b) Să se afle intervalul în care rădăcinile sînt reale.

c) Să se afle valoarea lui x pentru care m este maxim.

Institutul politehnic, Bucureşti, 1962.

R. a) Ecuaţia dată se reduce la $mx^2 - mx - 1 = 0$, ale cărei rădăcini sînt $x_{1,2} = \frac{1}{2m}(m \pm \sqrt{m^2 + 4m})$.

b) Ecuația are rădăcini reale pentru m aparținînd reuniunii de intervale

$$m \in (-\infty, -4] \cup [0, +\infty).$$

c) Din $m = \frac{1}{x^2 - x}$ rezultă derivata $m' = \frac{1 - 2x}{x^2 (x-1)^2}$; prin urmare, m este maxim atunci cînd $x = \frac{1}{2}$.

Valoarea maximă a lui m este -4.

633. Să dă funcția

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - a}{x^2 - bx}.$$

Se cere:

a) Să se determine parametrii a și b astfel ca $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{49}{9}$ să fie un extrem relativ al funcției date.

b) Știind că una din soluțiile punctului precedent este $a = 10$ și $b = 3$, să se facă graficul funcției corespunzătoare.

c) Să se discute rădăcinile ecuației

$$(\lambda - 1) x^2 - 3(\lambda - 1) x + 10 = 0,$$

λ fiind un parametru și să se verifice rezultatele cu ajutorul graficului făcut.

d) Să se rezolve ecuația

$$(\sin 2x - \cos 2x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 2.$$

Institutul pedagogic de trei ani, Galați, 1962.

R. a) Scriind că $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{49}{9}$ și $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, obținem un sistem în a, b, care rezolvat ne dă soluțiile: $a = 10$; $b = 3$ și $a = -\frac{9}{4}$; $b = \frac{3}{2}$.

b) Pentru $a = 10$, $b = 3$, avem

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 3x} \text{ și } f'(x) = \frac{10(2x - 3)}{x^2 (x - 3)^2}.$$

Pentru grafic se obține următorul tablou de variație

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{3}{2}$		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	0	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{49}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	1

iar graficul corespunzător este dat în fig. 234.

c) Realizantul ecuației fiind $R = (\lambda - 1) \cdot (9\lambda - 49)$, rezultă că pentru $\lambda \in (-\infty, 1) \cup \cup \left(\frac{49}{4}, +\infty\right)$ ecuația are rădăcini reale și diferite; dacă $1 < \lambda < \frac{49}{9}$, ecuația are rădăcini imaginare; pentru $\lambda = 1$ nu există rădăcini și pentru $\lambda = \frac{49}{9}$ ecuația are două rădăcini egale cu $\frac{3}{2}$.

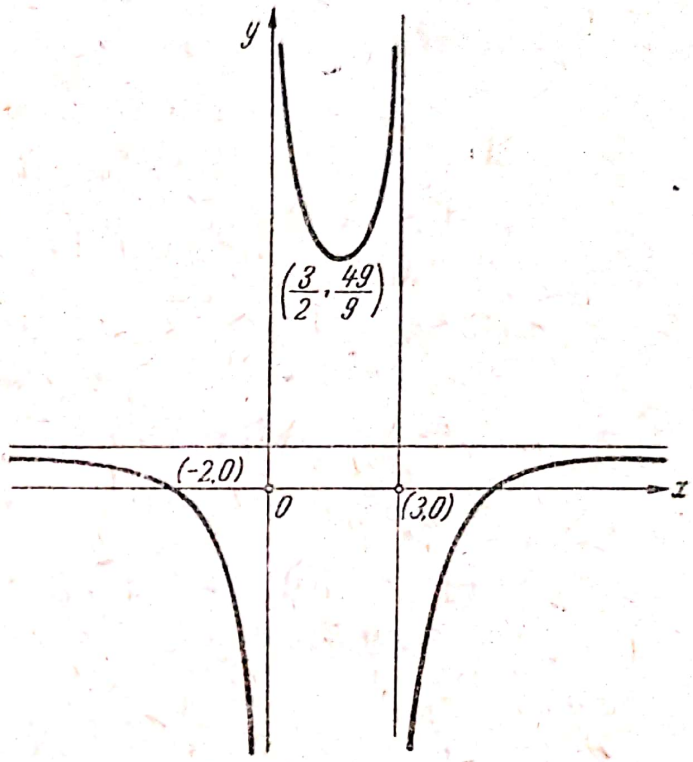


Fig. 234

Cele afirmate în rîndurile precedente rezultă și din grafic.

Într-adevăr rădăcinile ecuației date sînt abscisele punctelor de intersecție dintre dreapta $y = \lambda$ și curba

$$y = \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 3x}.$$

Mișcînd dreapta $y = \lambda$ paralel cu ea însă, se verifică rezultatele de mai sus.

d) Substituind $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, ecuația devine $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$ care se descompune în $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} x = -3$. Soluțiile generale sînt

$$x' = k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ și } x'' = k\pi - \operatorname{arctg} 3,$$

unde k este un întreg oarecare.

634. a) Să se determine α astfel, încît între rădăcinile ecuației

$$\alpha x^2 - x + \beta = (x^2 - 3x + 2)^2$$

să existe relația $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.

b) Cu această valoare a lui α, să se determine β astfel, încît funcția

$$f(x) = \frac{\sqrt{\alpha x^2 - x + \beta}}{x - \ldots}$$

să aibă în punctul de abscisă -1 un punct extrem.

c) Cu α și β mai sus determinate, să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{\sqrt{\alpha x^2 - x + \beta}}{x - 1}.$$

Facultatea de fizică București, 1962.

R. a) Ecuația dată se mai scrie

$$x^4 - 6x^3 + (13 - \alpha)x^2 - 11x + 4 - \beta = 0.$$

Ținînd seama de relațiile dintre rădăcini și coeficienți:

$$(x_1 + x_4) + (x_2 + x_3) = 6,$$

$$(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + x_1x_4 + x_2x_3 = 13 - \alpha,$$

$$(x_1 + x_4)x_2x_3 + (x_2 + x_3)x_1x_4 = 11, \quad x_1x_4 \cdot x_2x_3 = 4 - \beta$$

și de condiția dată, $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$, găsim $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 3$ și $\alpha = \frac{1}{3}$.

b) Pentru $\alpha = \frac{1}{3}$, avem $\sqrt{3}\, f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3\beta}}{x - 1}$.

Scriind că derivata

$$\sqrt{3}\, f'(x) = \frac{x + 3 - 6\beta}{2(x - 1)^2 \sqrt{x^2 - 3x + 3\beta}}$$

se anulează pentru $x = -1$, atunci funcția admite un extrem pentru această valoare a lui x. Pentru ca $f'(-1) = 0$, trebuie ca β să aibă valoarea $\frac{1}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Pentru $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$, avem

$$\sqrt{3}\, f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 1}}{x - 1} \text{ și } \sqrt{3}\, f'(x) = \frac{x + 1}{2(x-1)^2 \sqrt{x^2 - 3x + 1}}.$$

Domeniul de definiție a funcției este dat de

$$x \in \left(-\infty, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

Tabloul de variație a funcției este

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$				$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0				0		$\nearrow$		$+\infty$

Graficul corespunzător are două asimptote paralele cu axa Ox

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ și } y = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Curba reprezentativă a variației funcției este dată în fig. 235.

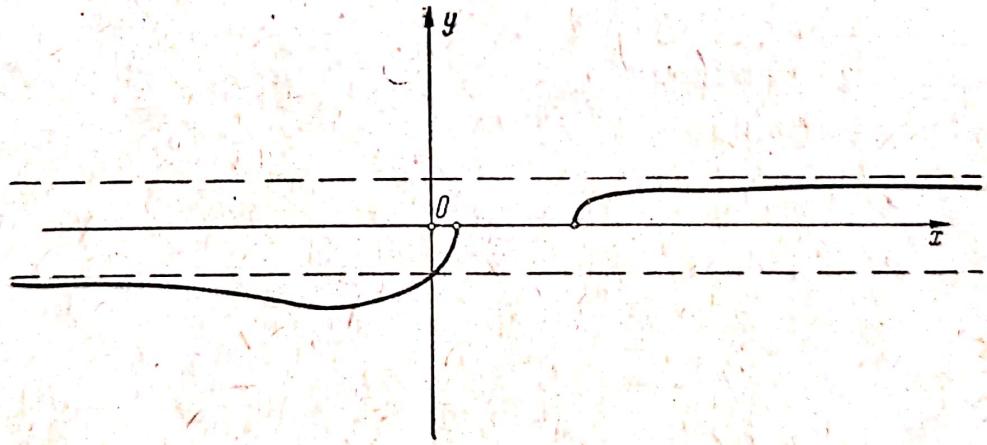


Fig. 235

635. Se consideră ecuația

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - a \operatorname{tg} \alpha + 1 = 0.$$

a) Pentru ce valori ale lui a ecuația admite soluții?

b) Pentru valorile lui a pentru care ecuația admite soluții situate în primul cadran se consideră aceste soluții α_1 și α_2, $\alpha_1 < \alpha_2$. Să se calculeze $\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Notăm $2\alpha_1 = f(a)$. Să se studieze variația funcției $f(a)$ și să se reprezinte grafic.

Facultatea de matematică-mecanică, București, 1962.

R. a) Ecuația admite tg α real și, deci, α real, cînd $a^2 - 4 \geqslant 0$, ceea ce implică

$$a \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$

b) Pentru a avea soluții situate în primul cadran, trebuie să avem simultan

$$\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 = a > 0 \text{ și } \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = 1 > 0 \ (\alpha_1 < \alpha_2).$$

În acest caz,

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{a - \sqrt{a^2-4}}{2}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{a + \sqrt{a^2-4}}{2}.$$

Totodată avem

$$\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_1} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_2} = \frac{2(1 - \operatorname{tg}^2\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha_2)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha_1)(1+\operatorname{tg}^2\alpha_2)} = 0.$$

c) Avem $f(a) = 2 \operatorname{arctg} \frac{a - \sqrt{a^2-4}}{2}$ și deci $f'(a) = -\frac{2}{a\sqrt{a^2-4}}$.

Domeniul de definiție este dat de condițiile a) și b):

$$a \in [2, +\infty).$$

Tabloul de variație a determinărilor principale ale funcției $f(a)$ este următorul

a	2								$+\infty$
$f'(a)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(a)$	$\frac{\pi}{2}$	↘				↘			0

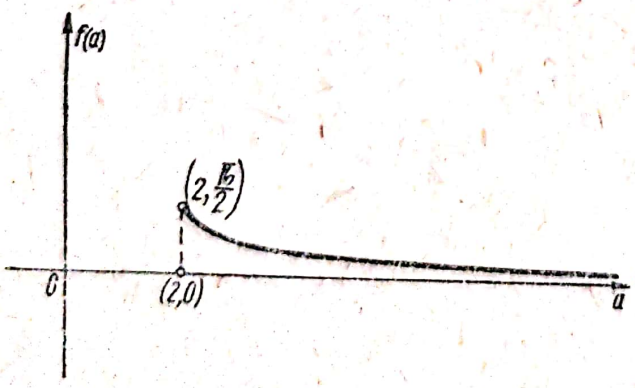


Fig. 236

S-a ținut seama că pentru $a \to \infty$, avem

$$\lim_{a\to\infty} \frac{a - \sqrt{a^2-4}}{2} =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{2}{a + \sqrt{a^2+4}} = 0.$$

Graficul variației este dat în fig. 236.

636. Într-un semicerc dat se înscrie un trapez a cărui bază mare este diametrul semicercului. Să se determine unghiurile dintre baza mare și laturile neparalele ale trapezului, astfel încît aria trapezului să fie maximă.

Facultatea de fizică Cluj, 1962.

R. Fie trapezul $ABCD$ (fig. 237) în care baza mare $\overline{AD}$ este egală cu $2R$.

Notînd cu x unghiurile bazei mari cu laturile neparalele și știind că ABD, ACD sînt triunghiuri dreptunghice, găsim

$$\overline{AB} = \overline{CD} = 2R \cos x \quad \text{și}$$
$$\overline{BC} = 2R - 4R \cos^2 x.$$

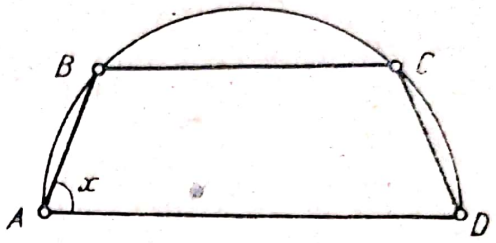


Fig. 237

Înălțimea trapezului fiind $I = 2R \cos x \sin x$, rezultă aria

$$A = \frac{(2R + 2R - 4R \cos^2 x)\, 2R \sin x \cos x}{2} \quad \text{sau} \quad A = 4R^2 \sin^3 x \cos x$$

Aria trapezului va fi maximă atunci cînd funcția

$$f(x) = \sin^3 x \cos x$$

va fi maximă.

În acest scop, calculăm derivata $f'(x) = \sin^2 x\,(1 + 2 \cos 2x)$ care se anulează pentru $x = 0$ și $x = 60°$. Maximul are loc cînd $\overline{AB} = \overline{CD}$ sînt laturi ale exagonului regulat înscris în cerc.

637. Să se determine patrulaterul de arie maximă înscris în cercul de rază R, știind că două laturi opuse sînt lungimi constante: $2a$, respectiv $2b$.

Facultatea de matematică-mecanică, București, 1962.

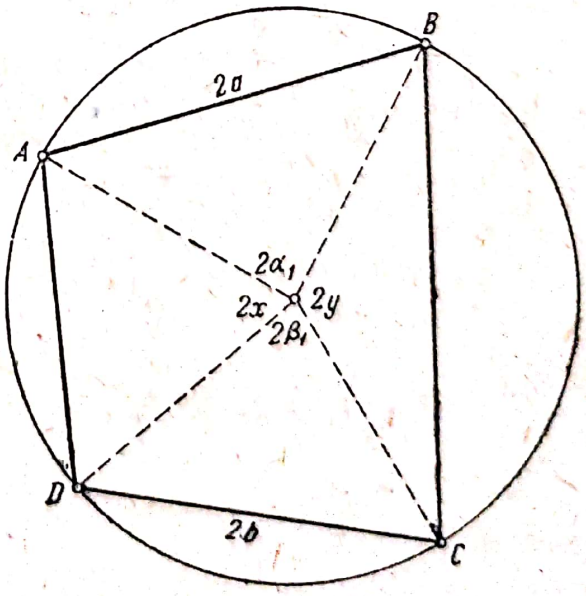


Fig. 238

R. Notînd cu $ABCD$ patrulaterul înscris în cercul de rază R (fig. 238) care are laturile $\overline{AB} = 2a$, $\overline{CD} = 2b$ și cu $2\alpha_1$, $2\beta_1$, $2x$, $2y$ unghiurile

la centru corespunzătoare, respectiv, coardelor AB, CD, AD, BC, aria A a patrulaterului este

$$A = \frac{R^2}{2}(\sin 2x + \sin 2y + \sin 2\alpha_1 + \sin 2\beta_1).$$

Ţinînd seama că

$$2x + 2y + 2\alpha_1 + 2\beta_1 = 2\pi,$$

rezultă $\sin 2y = -\sin 2(x + \alpha_1 + \beta_1)$ şi prin urmare

$$A = \frac{R^2}{2}[\sin 2x - \sin 2(x + \alpha_1 + \beta_1) + \sin 2\alpha_1 + \sin 2\beta_1].$$

Aria este maximă pentru acea valoare a lui x care face ca

$$A' = R^2[\cos 2x - \cos 2(x + \alpha_1 + \beta_1)] = 0.$$

Aceasta se întîmplă cînd $2x + 2(x + \alpha_1 + \beta_1) = 2\pi$, adică pentru $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$.

Pentru această valoare a lui x avem

$$y = \pi - x - \alpha_1 - \beta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}.$$

Aşadar, aria patrulaterului este maximă cînd $x = y$, în care caz patrulaterul devine trapez isoscel.

638. Dintr-o bilă sferică de rază R se cere să se strunjească o piesă în formă de con circular drept, astfel încît pierderea de material să fie minimă. Să se exprime în funcţie de R aria laterală a conului rezultat.

Examenul de maturitate, iunie, 1962.

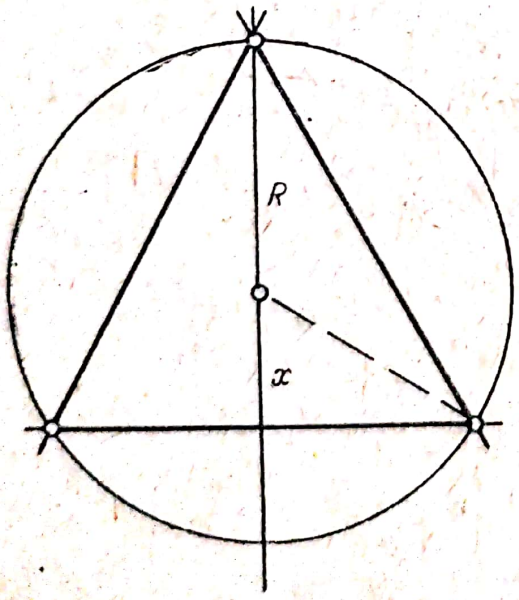


Fig. 239

R. Notînd cu x distanţa de la centrul sferei la baza conului (fig. 239) pe care trebuie să-l scoatem din sfera de raza R, prin strunjire, raza y a bazei conului este

$$y = \sqrt{R^2 - x^2},$$

iar volumul V al conului devine

$$V = \frac{\pi}{3}(R - x)(R + x)^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca pierderea de material să fie minimă este necesar ca volumul conului înscris în sfera de raza R să fie maxim. Acest maxim are loc pentru acea valoare a lui x ($-R < x < R$) pentru care derivata

$$V' = \frac{\pi}{3}(R + x)(R - 3x)$$

se anulează. Această valoare este $x = \frac{R}{3}$. Volumul maxim al conului este

$$V_{max} = \frac{32\pi R^3}{81},$$

iar aria laterală a acestui con este

$$A_{lat} = \frac{8\pi R^2\sqrt{3}}{9}.$$

639. O piramidă are ca bază un triunghi echilateral cu latura x variabilă și muchia k dată. În ce caz este volumul maxim?

Examenul de maturitate, iunie, 1962.

R. În funcție de datele problemei se găsește că volumul piramidei este

$$V = \frac{x^2\sqrt{3k^2 - x^2}}{12}.$$

De aici rezultă că V este maxim o dată cu funcția

$$f(x) = (x^2\sqrt{3k^2 - x^2})^2 = x^4(3k^2 - x^2),$$

a cărei derivată $f'(x) = 6x^3(2k^2 - x^2)$ se anulează pentru $x = 0$ și $x = \pm k\sqrt{2}$.

Piramida are volumul maxim atunci cînd $x = k\sqrt{2}$, iar acest volum este

$$V_{max} = \frac{k^3}{6}.$$

640. Secțiunea transversală a unui siloz pentru nutreturi murate este un trapez isoscel care are baza mică egală cu suma laturilor neparalele.

Ce înclinare trebuie să aibă latura neparalelă față de baza mare pentru ca silozul să aibă capacitatea maximă?

Examenul de maturitate, iunie, 1962.

Scanned with OKEN Scanner

R. Pentru ca silozul să aibă capacitatea maximă este necesar ca secțiunea transversală, care este un trapez iscoscel (fig. 240), să aibă aria maximă. Notînd cu l lungimea comună a laturilor neparalele ale trapezului și cu x înclinarea lor pe baza mare, aria trapezului capătă expresia

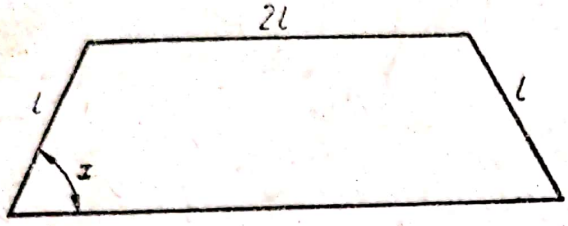


Fig. 240

$$A = l^2 (2 + \cos x) \sin x.$$

Pentru ca A să aibă valoarea maximă este necesar ca funcția

$$z = (2 + \cos x) \sin x$$

să aibă o valoare maximă.

Avînd în vedere că derivata funcției z este

$$z' = 2 \cos^2 x + 2 \cos x - 1,$$

rezultă că, z este maxim atunci cînd

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

căruia îi corespunde unghiul ascuțit

$$x = \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 68°31'.$$

INDICATOR AL PROBLEMELOR

Algebră. Numerele reprezintă ordinea problemelor din „Culegere" care se referă prin conținut la tema respectivă.

Ecuații de gradul al doilea: 15; 16; 18; 20; 55; 121; 123; 620.
Ecuații de gradul al doilea — cu parametri: 31; 33; 34; 36—39; 118—120; 126; 539; 561; 562; 569; 598; 601; 617; 618; 619; 620; 622; 628; 632; 633.
Ecuații de gradul al treilea și de grad mai mare: 83; 96; 496—501; 517; 520; 522; 523; 524; 526; 527; 534; 535; 565; 634.
Ecuații bipătrate: 43; 44; 45.
Ecuații iraționale cu o necunoscută: 14; 17; 71; 97; 629.
Ecuații logaritmice: 79; 80; 540.
Exponenți fracționari: 13.
Expresii algebrice în numere întregi: 98.
Expresii dependente de rădăcinile unei ecuații de gradul al doilea: 21—26; 29; 32; 36—42; 119—125; 538; 562; 594; 618; 628; 630; 634.
Expresii cu radicali: 9—12; 44; 90; 92—95.
Fracții algebrice: 6—8; 88; 89; 560; 620.
Funcții exponențiale: 84.
Identități algebrice: 4—6; 89.
Inecuații: 5; 32; 33; 41; 42; 47; 108—112; 115—117; 523; 537; 539; 560.
Inegalități: 113; 114; 605.
Maxime și minime: 570; 587; 607; 617.
Număr natural având divizori primi cu anumite condiții: 1.
Polinom cu coeficienți nedeterminați: 2; 3; 42; 85; 536.
Probleme de pus în ecuație: 73; 573; 574; 577; 579—581; 585; 590; 608; 610.
Progresii aritmetice și geometrice: 45; 46; 72—76; 80; 113; 127—132; 582; 630; 631.
Rădăcini comune: 27; 28.
Reprezentări grafice: 30; 98; 564; 570; 595; 619.
Sisteme de ecuații de gradul întîi: 47—51; 54; 98—100; 606; 619.
Sisteme de ecuații care se rezolvă prin artificii de calcul: 52; 53.
Sisteme de ecuții de gradul al doilea și de grad mai mare: 46; 50; 55—57; 58; 59; 60; 62; 65—70; 73; 101—107; 600.
Sisteme de ecuații iraționale: 61; 63; 64.
Sisteme de ecuații exponențiale: 78.
Sisteme de ecuații logaritmice: 81; 82.
Șiruri oarecare: 77.
Transformări echivalente: 86; 87; 91; 119.
Trinomul de gradul al doilea: 19; 30.
Trinomul de gradul al doilea — cu parametri: 35.

Scanned with OKEN Scanner

Geometrie. Numerele reprezintă ordinea acelor probleme din „Culegere“ în care se cere efectuarea unui calcul, o construcție geometrică, un loc geometric sau o demonstrare a unei teoreme în legătură cu tema respectivă.
Aria unor suprafețe de corpuri: 186; 202; 206; 208; 211; 212; 214; 243; 244; 244 bis; 247; 250; 547; 551; 559; 560; 592; 597; 604; 607; 627.
Arii echivalente și rapoarte de arii: 161; 167; 177; 189; 235; 238; 249; 303.
Arce egale: 212.
Bisectoare: 156; 218; 246.
Calculul unor arii și al unor arii maxime sau minime: 158; 172; 176; 186; 190 191; 195; 197; 198; 203; 225; 228; 231; 232; 236; 242; 563; 569; 585; 587; 591; 616; 624; 625.
Calculul perimetrelor unor figuri și unor segmente sau perimetre maxime sau minime: 194; 196; 208; 228; 587; 616.
Calculul unor unghiuri: 201; 219; 220; 233; 241; 242; 568; 572; 591; 613.
Cercuri care trec prin același punct: 222.
Cercuri tangente: 209; 569.
Construcții geometrice: 137; 148; 195; 213; 219; 220; 221; 229; 233; 235; 244; 247; 596; 624.
Corpuri echivalente: 207; 249.
Desfășurarea unor suprafețe pe un plan: 202; 210.
Determinarea lungimii unor segmente, laturi ale unor triunghiuri, raze de cercuri, distanțe sau rapoarte de lungimi: 144; 154; 155; 158; 160; 162; 163; 171; 175; 182; 186; 191—198; 200; 203; 205—208; 215; 224; 226; 227; 228; 231; 233; 237; 242; 244 bis; 245; 250; 547; 560; 568; 570 571; 572; 588; 592; 597; 604; 623; 625; 626.
Drepte care trec printr-un punct fix: 173; 174.
Drepte concurente: 135; 136; 138; 223; 228; 250.
Drepte concurente pe un cerc: 144; 151.
Drepte confundate: 156; 218.
Drepte paralele: 138; 149; 176; 220; 223; 239; 613.
Drepte perpendiculare: 146; 185; 201; 204; 205; 209; 233; 250; 557; 568; 591.
Drepte variabile tangente la un cerc fix: 174; 240.
Dreptunghiuri: 225; 226; 232.
Figuri egale și figuri asemenea: 156; 187; 194; 217; 218; 236; 240.
Locuri geometrice: 133; 146; 147; 173; 176; 185; 227; 230; 232; 235; 239; 241 244; 247; 564; 566.
Paralelograme: 225; 238.
Pătrate: 222; 232.
Patrulatere circumscriptibile: 200; 208.
Patrulatere inscriptibile: 149; 165; 200.
Puncte coliniare: 134; 139; 156; 189; 223.
Puncte confundate: 162; 201.
Poligoane regulate: 206.
Poligoane variabile cu un perimetru constant: 159.
Relații metrice: 157; 159; 164; 165; 168—171; 177; 179; 180; 183; 184; 188; 193; 199; 200; 201; 217; 219; 220; 221; 623; 627.
Relații între segmente; 138; 144; 187; 188; 217; 234; 240; 246.
Romburi: 152.
Segmente egale: 135; 136; 143; 145; 146; 162; 200; 217; 219; 230; 238; 239; 242; 571; 613.
Segmente variabile care au o sumă constantă: 133.
Segmente variabile cu un produs constant: 166; 181.
Tangente la cerc: 142; 143; 151; 153; 176; 187; 226; 230.
Trapez oarecare și isoscel: 141; 625.

Scanned with OKEN Scanner

Triunghiuri dreptunghice: 140; 169; 162; 190; 192; 197; 224; 240; 585.
Triunghiuri echilaterale: 150.
Triunghiuri isoscele: 133; 150; 188; 192; 234; 240; 241; 624.
Unghiuri diedre: 165; 245.
Unghiuri egale: 147; 217.
Volume, corpuri cu același volum și rapoarte de volume: 202—204; 206; 208—212; 214; 216; 243; 244; 244 bis; 245; 246; 247; 248; 249; 548; 550; 551; 554; 559; 560; 561; 563; 568; 570; 571; 606; 609; 626; 627.

Trigonometrie. Numerele reprezintă ordinea problemelor din „Culegere" care se referă prin conținut la tema respectivă.

Aria unor suprafețe de corpuri: 549; 552; 553; 555; 557; 558; 578; 589; 595; 603.
Calculul unor arce sau al unor relații între arce: 273; 294; 332; 334; 337.
Calculul valorii unor funcții trigonometrice: 254; 262; 268; 295; 327; 328; 329; 330; 331; 333; 338; 341; 342; 569; 571; 595; 611; 616; 631; 635.
Ecuații trigonometrice și probleme de pus în ecuație: 274; 292—296; 361—379 543—546; 557; 560; 562; 563; 576; 578; 583; 593; 598; 600; 601; 633; 635.
Eliminarea unor arce: 339; 595.
Expresii calculabile prin logaritmi: 265; 269; 294; 312; 315; 326; 335; 343; 346; 349; 351; 352; 357;
Identități trigonometrice: 251—253; 255; 257; 258; 261; 263; 266; 267; 270, 271; 272; 304; 305; 344; 345; 347; 350; 354—356; 358; 359; 360; 406; 417; 562; 594; 629.
Inecuații trigonometrice: 386; 387; 614; 615.
Inegalități trigonometrice: 605.
Maxime și minime: 340; 577.
Relații între elementele unui triunghi: 306—308; 313; 316; 317; 320; 322; 323; 326; 394; 396; 410; 413; 418; 560; 570; 575.
Relații între elementele unui patrulater sau ale unui poligon cu mai multe laturi: 419; 422.
Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice și oarecare: 304; 305; 309—311; 318; 319, 321; 324; 336; 388; 390; 391; 392; 393; 395; 397—405; 407—409; 411; 412; 414—416; 420; 423—434; 567; 574; 586; 588; 595; 606; 612.
Rezolvarea unor patrulatere sau poligoane: 314; 325; 421.
Sisteme de ecuații trigonometrice și probleme de pus în ecuație: 297—303; 380—385; 558; 621.
Transformări identice: 256; 259; 260; 264; 348; 353; 372; 389; 541: 542; 584.
Volume: 549; 552; 555; 557; 558; 562; 602; 603.

Geometrie analitică: Numerele reprezintă ordinea problemelor din „Culegere" care se referă prin conținut la tema respectivă.

Arii: 455; 469; 477.
Asimptote: 461.
Axă radicală, centru radical: 467; 473.
Bisectoare (ecuațiile lor): 440; 450.
Cerc tangent unei drepte: 451; 471; 475;
Cercul ca loc geometric: 443; 444; 454; 468; 469; 471; 474; 476; 478; 480.
Cercuri care se văd sub un anumit unghi: 452.
Cercuri ortogonale: 481.
Coordonatele unor puncte (determinarea lor): 453; 464—466; 470; 472; 478; 479; 481—483; 623.
Curbe de grad superior ca loc geometric: 458; 463; 484; 486; 489; 501.
Distanțe și relații între ele: 439, 447—449; 452; 465; 476.
Drepte concurente: 435; 468; 489.

Scanned with OKEN Scanner

Dreapta ca loc geometric: 437; 459; 465; 470; 473; 475.
Dreaptă care trece printr-un punct fix: 441; 444; 466; 469.
Ecuația cercului: 436; 438—442; 445; 455; 457; 462; 473; 476; 626; 627.
Ecuația dreptei: 436; 438; 439. 466; 622; 625.
Ecuația elipsei: 447; 565.
Ecuația hiperbolei: 452; 481.
Ecuația parabolei: 459—461.
Elipsa ca loc geometric: 446—449; 478; 485; 488.
Hiperbola ca loc geometric: 461; 482; 483.
Intersecții (determinarea lor): 440; 460; 467; 477; 490.
Pante: 472.
Pătrat: 481.
Parabola ca loc geometric: 442; 454—458; 460; 462; 487; 489; 490.
Paralele (ecuațiile lor): 442; 474; 488.
Paralelogram: 464.
Perpendiculare (ecuațiile lor): 435; 439; 442; 459; 466.
Puncte coliniare: 444.
Puncte conciclice: 463; 480.
Raportul în care o dreaptă de ecuație dată împarte un segment: 445.
Tangente și normale (determinarea lor): 438; 445; 448; 467; 469; 474; 479; 480; 482; 484—486; 488; 501; 521; 565; 627.
Unghiuri (determinarea lor): 472; 478.

Analiză matematică. Numerele reprezintă ordinea problemelor din „Culegere" care se referă prin conținutul lor la tema respectivă Asimptote: 500; 501; 503; 511.
Derivate (calculul lor): 491; 492; 494—505; 503—505; 518; 519; 629.
Domeniul de definiție al unei funcții: 495—499; 506; 507.
Extremele unei funcții: 492—495; 528; 530; 628; 629; 634.
Funcții care păstrează o valoare constantă: 491.
Funcții iraționale: 504; 505; 512.
Funcții logaritmice: 493.
Funcții raționale: 492; 496—503; 506—510; 521.
Funcții trigonometrice directe și inverse: 491; 494; 495; 512—515.
Integrale: 520; 524; 525; 527; 529; 532.
Intervale și reuniuni de intervale: 495; 500; 502—505.
Limite: 529.
Limite la dreapta și la stînga: 515.
Puncte în care funcția nu există: 500.
Puncte de inflexiune: 497; 498; 501; 513.
Puncte de maxim al unei funcții: 493; 496; 499; 501—503; 632; 636; 637; 639; 640.
Puncte de minim ale unei funcții: 496; 498; 499; 501; 503; 631; 638.
Rădăcini multiple: 530; 531.
Reprezentări grafice: 496—505; 506—515; 522; 523; 525—535; 630; 633; 634; 635.
Tangente: 521.
Teorema lui Rolle: 516; 520; 533; 535.

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

Prefață 3

Cap. I. **Algebră**

A. Exerciții și probleme rezolvate 5

B. Exerciții și probleme urmate de răspunsuri și indicații 69

Cap. II. **Geometrie**

A. Exerciții și probleme rezolvate 84

B. Exerciții și probleme urmate de răspunsuri și indicații 168

Cap. III. **Trigonometrie**

A. Exerciții și probleme rezolvate 197

B. Exerciții și probleme urmate de răspunsuri și indicații 256

Cap. IV. **Geometrie analitică**

A. Exerciții și probleme rezolvate 289

B. Exerciții și probleme urmate de răspunsuri și indicații 318

Cap. V **Analiză matematică**

A. Exerciții și probleme rezolvate 331

B. Exerciții și probleme urmate de răspunsuri și indicații 355

Cap. VI **Probleme diverse**

A. Exerciții și probleme rezolvate propuse la examenele de maturitate 367

B. Exerciții și probleme rezolvate propuse la examenele din institute și facultăți 401

Indicator al problemelor 491

Scanned with OKEN Scanner

Redactor responsabil : TEODORESCU CLOTILDA
Tehnoredactor : NEGREANU BETTY

Dat la cules 21.12.1962. Bun de tipar 20.05.1963. Apărut 1963. Tiraj 45 000+140 broşate. Hîrtie semivelină de 63 g/m². Format 610×860/16. Coli editoriale 27,02. Coli de tipar 31. A. 4456/1962. C. Z. pentru bibliotecile mari 51 (076). C. Z. pentru bibliotecile mici 51.

Tiparul executat la
Intreprinderea Poligrafică „13 Decembrie 1918",
str. Grigore Alexandrescu nr. 93—95,
Bucureşti — R.P.R., comanda nr. 3066.

Scanned with OKEN Scanner